# Història de la matemàtica: Grècia IIIa

## (el segle d'or: Aristeu, Eudem, Euclides i Aristarc)

*Resultats, textos i contextos*

Josep Pla i Carrera

Institut d'Estudis Catalans

Secció de Ciències i Tecnologia

# Història de la matemàtica: Grècia IIIa (el segle d'or: Aristeu, Eudem, Euclides i Aristarc)

Resultats, textos i contextos

Josep Pla i Carrera

Barcelona, 2021

Institut d'Estudis Catalans
Secció de Ciències i Tecnologia

Biblioteca de Catalunya. Dades CIP

**Pla i Carrera, Josep, autor**
Història de la matemàtica. Grècia IIIa (el segle d'or: Aristeu, Eudem, Euclides i Aristarc) : resultats, textos i contextos. — Primera edició
Bibliografia. Índexs
ISBN 9788499655888
I. Institut d'Estudis Catalans. Secció de Ciències i Tecnologia II. Títol
1. Euclides, -300 aC 2. Aristeu, de Crotona, actiu segle IV aC 3. Eudem, actiu segle IV aC
4. Aristarc, de Samos, aproximadament 310 aC-aproximadament 230 aC
5. Matemàtica grega — Història 6. Matemàtics — Grècia
51(38)(091)
51-051(38)

Classificació AMS: Primària: 01Axx, 01A20, 01A75 i 00B55.
Secundària: 01A05, 97A30, 26-03 i 51-03.

Projecte «*Història de la Matemàtica grega*», dut a terme sota la direcció de Pilar Bayer, membre de la Secció de Ciències i Tecnologia de l'Institut d'Estudis Catalans.


Carrer del Carme, 47. 08001 Barcelona

Primera edició: març de 2021

Assessoria lingüística: Margarida Bassols
Text revisat lingüísticament per la Unitat de Correcció del Servei Editorial de l'IEC

Disseny de la coberta: Azcunce | Ventura

Imprès a Producciones Gráficas Ecológicas, SL

ISBN: 978-84-9965-588-8
Dipòsit Legal: B 5424-2021

*Al meu mestre Josep Vaquer* († 2020),
in memoriam.

*Quan vaig començar els estudis*
*de la llicenciatura de matemàtiques,*
*em va introduir en la disciplina*
*des d'una perspectiva novella.*

*I el darrer curs acadèmic (1968-1969),*
*ens va acomiadar a tots els d'aquell any*
*amb una visió molt formal*
*de la geometria diferencial.*
*Aquesta va ser la primera i única*
*assignatura que vam fer en català,*
*i li ho vull agrair.*

*Juntament amb Francesc d'Assís Sales,*
*em va mostrar com fer més valuosa*
*la Facultat de Matemàtiques de la UB,*
*participant en els òrgans de gestió*
*i sent fidel a la seva democràcia interna.*

*Vam discrepar molt,*
*però sempre ens vam apreciar i respectar.*

*Per això vull recordar, d'una manera especial,*
*el seu acolliment i la seva amistat*
*fora de l'àmbit acadèmic,*
*al costat de la Mercè, sempre tan discreta*
*i afable.*

Josep

There is no scorn more profound,
or on the whole more justifiable,
than that of the men who make
for the men who explain.

GODFREY HAROLD HARDY*

*HARDY (1940), traducció catalana, p. 77: «No hi ha desdeny més profund o, en darrer terme, més justificat que el que senten els creadors pels qui en comenten les creacions.»

Ens hem permès repetir aquesta expressió de Hardy a cada llibre perquè la considerem absolutament desafortunada i la usem com a denúncia d'una manera de pensar errònia.

# Sumari

Introducció xi

Capítol 1. La transició: Aristeu el Vell i Eudem de Rodes 1
Capítol 2. La situació política i cultural grega (segle iii aC) 23
Capítol 3. Les aportacions conceptuals d'Euclides 71
Capítol 4. Les obres d'Euclides, llevat dels *Elements* 105
Capítol 5. Aristarc de Samos i la seva obra 135

Apèndix A. Textos sobre Aristeu i el seu teorema, i sobre Eudem 155
Apèndix B. Textos històrics i polítics (segle iii aC) 171
Apèndix C. Textos relatius a les aportacions conceptuals d'Euclides 205
Apèndix D. Textos d'Euclides sense els *Elements* 239
Apèndix E. L'obra d'Aristarc de Samos 299

Les figures del text 347
Matemàtics i personatges citats 351
Bibliografia 417
Índex de mots i formes 441
Índex de noms propis: antropònims, topònims i altres noms 447
Índex d'obres i citacions 477
Índex de termes 493
Índex general 517

*Μίνως γὰρ παλαίτατος ὧν ἀκοῇ ἴσμεν ναυτικὸν ἐκτήσατο καὶ τῆς νῦν Ἑλληνικῆς θαλάσσης ἐπὶ πλεῖστον ἐκράτησε καὶ τῶν Κυκλάδων νήσων ἦρξέ τε καὶ οἰκιστὴς πρῶτος τῶν πλείστων ἐγένετο, Κᾶρας ἐξελάσας καὶ τοὺς ἑαυτοῦ παῖδας ἡγεμόνας ἐγκατεστήσας: τό τε ληστικόν, ὡς εἰκός, καθῄρει ἐκ τῆς θαλάσσης ἐφ᾽ ὅσον ἐδύνατο, τοῦ τὰς προσόδους μᾶλλον ἰέναι αὐτῷ.*

TUCÍDIDES[†]

[†] TUCÍDIDES (1953-1981), edició catalana (1953-1981), volum I, IV, [1], p. 52: «Minos és el primer, dels qui coneixem per la tradició, que aplegà una marina de guerra. Estengué el seu imperi sobre la major part del que avui coneixem com la mar Hel·lènica, conquerí les illes Cíclades i en fou el primer colonitzador, foragità els caris i hi establí com a governadors els propis fills. A més, com és natural, procurà, fins on pogué, netejar la mar de pirates perquè els tributs li arribessin millor.»

# Introducció

> La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit, mais c'est cet éclair qui est tout.
>
> Henri Poincaré[‡]

El segle III aC és *el* segle de la matemàtica grega i, per això, hi ha autors que l'anomenen el *segle d'or de la matemàtica grega*. És, de fet, el moment en el qual s'assoleix la síntesi —han fet el cim— de les aportacions epistemològiques i metodològiques dels tres segles precedents, el període en el qual es fa necessari classificar i aprofundir els descobriments geomètrics i aritmètics aconseguits fins al moment per a poder resoldre alguns dels problemes plantejats i per a consolidar els estudis d'astronomia.

La importància dels resultats assolits llavors es justifica plenament gràcies a tres autèntics gegants de la matemàtica de tots els temps: Euclides, Arquimedes i Apol·loni. Però els seus resultats no exhaureixen el cabal de coneixement que ens ofereix aquesta època. Hi trobem també l'astrònom Aristarc; els alexandrins, deixebles d'Euclides, Conó i Dositeu; Nicomedes i Diocles, inventors de la concoide i la cissoide; Dionísodor, creador d'un mètode per a solucionar una equació cúbica, i Eratòstenes, bibliotecari, geògraf i matemàtic.

[‡] «El pensament no és més que un llamp enmig d'una llarga nit, però aquest llamp ho és tot.» Poincaré (2003), p. 276.

I, a més, s'hi poden tenir en compte les aportacions d'Aristeu el Vell, que permeten fer un tractament més integral de l'estudi de les còniques, i les aportacions històriques de l'aristotèlic Eudem.

TAULA I.1. *Cronologia dels matemàtics i astrònoms grecs del segle III aC*

| *Període* | *Nom* | *Tema* |
|---|---|---|
| ∼370-∼300 aC | Aristeu | còniques |
| ∼350-∼290 aC | Eudem ($\varphi$) | història de la matemàtica i l'astronomia |
| ∼325-∼265 aC | Euclides | geometria, fonaments, òptica i còniques |
| ∼310-∼230 aC | Aristarc | astronomia |
| 287-242 aC | Arquimedes | geometria, càlcul, estàtica i hidrostàtica |
| ∼280-∼220 aC | Conó | astronomia i còniques |
| ∼280-∼210 aC | Nicomedes | concoide |
| ∼276-∼194 aC | Eratòstenes | geometria, aritmètica i geografia |
| ∼262-∼190 aC | Apol·loni | geometria i còniques |
| ∼250-∼190 aC | Dionísodor | resolució de la cúbica |
| ∼240-∼180 aC | Diocles | cissoide i òptica |
| ∼230-? aC | Dositeu | astronomia |

Però, un cop assolit el cim —*Història de la matemàtica. Grècia IIIa*, *Grècia IIIb* i *Grècia IIIc*—, començà el declivi, un declivi lent en el qual, malgrat tot, aniran apareixent pics d'excel·lència indiscutible, que recollirem en *Història de la matemàtica. Grècia IV*.

Abans, els volums *Grècia IIa* i *Grècia IIb* d'aquesta *Història* han contingut una adaptació comentada dels *Elements* d'Euclides, ja que són el «tractat fonamental» damunt del qual es va bastir la matemàtica de moltíssims segles i, per tant, mereixedors d'un comentari i un estudi separats.

Aquí, a *Grècia IIIa*, hi trobarem explicitades les contribucions conceptuals d'aquest insigne mestre de la geometria grega i una exposició detallada dels continguts de les altres obres seves, amb uns quants textos que n'exemplifiquen el contingut en l'apèndix D (pàgines 239-298).

La raó d'aquesta divisió és simple: si haguéssim aplegat tot el segle d'or de la matemàtica grega en un sol volum, incloenthi els *Elements*, l'hauríem fet excessivament voluminós i, per tant, poc manejable.

I, a més, volem aclarir que, malgrat la importància innegable que tenen les monografies d'Arquimedes, en l'apèndix corresponent (*Grècia IIIb*),[§] solament en reproduirem els fragments necessaris per a completar l'explicació del corpus matemàtic d'aquest ínclit prohom i veure'n el desenvolupament conceptual i metodològic. Recordem que, en el cas del geòmetra de Siracusa, disposem de les traduccions en català d'algunes de les seves monografies,[¶]

En canvi, en el cas d'Apol·loni, en l'apèndix corresponent (*Grècia IIIc*), oferim l'adaptació en català dels set llibres de les *Còniques* que s'han conservat en grec o en àrab.[‖]

De la resta de matemàtics de la taula I.1, només ens n'han arribat textos doxogràfics, a excepció de l'astrònom Aristarc, del geògraf Eratòstenes i del geòemtra Diocles,. En aquest volum, hi trobem el d'Aristarc, pare de l'heliocentrisme, *De les mides i les distàncies del Sol i la Lluna* (*Πϵρὶ μϵγϵθῶν καὶ ἀπὸστημάτων ἡλόυ καὶ σϵλῆνης*).[**]

També en aquesta ocasió, per raons de manejabilitat dels volums, presentem el segle d'or de la matemàtica grega en quatre volums, *Grècia IIIa*, *Grècia IIIb*, *Grècia IIIc* i *Grècia IIId*.

---

[§]Els volums *Grècia IIIb*, *Grècia IIIc* i *Grècia IIId*, pendents de publicació, els hem inclòs en la bibliografia com a Pla (en premsa *a*), Pla (en premsa *b*) i Pla (en premsa *c*).

[¶]Arquimedes (1997), (2010) i (2016), tots publicats en la col·lecció de clàssics grecs i romans de la Fundació Bernat Metge.

[‖]Aquesta feina de traducció-adaptació anotada amb una introducció clarificadora és una tasca realment complexa que demana dedicació i estudi, i requereix voluntat, interès i passió.

[**]Vegeu l'apèndix E (pàgines 299-346). Tanmateix, disposem també de la traducció castellana *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna* (Aristarc (2007)).

En el primer trobem les aportacions i els textos d'Aristeu, d'Euclides i d'Aristarc. En el segon, la vida i obra d'Arquimedes. En el tercer, les d'Apol·loni. I, en el quart, les aportacions matemàtiques i astronòmiques de Conó i de Dositeu, les de Nicomedes i d'Eratòstenes, i també les de Dionísodor i de Diocles.[††]

El context històric és doble. Mentre l'imperi d'Alexandre es divideix i, gràcies a aquesta divisió, sorgeix Alexandria amb tot el seu potencial polític i cultural —simbolitzats en el far, el museu i la biblioteca, que tanta importància tindrà en el desenvolupament de la matemàtica grega del segle III i següents—, Roma es consolida i esmerça esforços per conquerir la Mediterrània. Aquesta gesta ressona en la vida i mort d'Arquimedes. Per això, hem volgut fixar l'atenció en aquests i altres fets, a voltes, una mica esvanits entre la realitat i la ficció, jugant amb la història i la faula: la consolidació d'Alexandria, el naixement del que, amb el pas dels segles, serà l'Imperi romà i la Segona Guerra Púnica en què tenen lloc les gestes d'Arquimedes. I ho hem fet amb la intenció de deixar ben palesa la dualitat història/llegenda, amb més o menys intensitat, que trobem en totes elles.

[††] D'aquest autor donem l'adaptació al català del llibre *Dels miralls ustoris o ardents* (*Πϵρὶ τοῦ πυρίον*).

# Capítol 1

# La transició: Aristeu el Vell i Eudem de Rodes

> Il y a plus affaire à interpreter les interpretations qu'à interpreter les choses, et plus de livres sur les livres que sur autre subject: nous ne faisons que nous entregloser. Tout fourmille de commentaires; d'auteurs, il en est grand cherté.
>
> MONTAIGNE[1]

> Zuvörderst lernen Sie eins: Es ist immer alles anders. Es ist dem noch mysteriös, der's lebt, wie dürfte der sich anmaßen und sagen: Es war so oder so, der nur davon weiß. Aber ich will nicht zu scharf mit dir ins Gericht gehen, Jungchen, du tust mir leid.
>
> WASSERMANN[2]

---

1. «És més difícil interpretar les interpretacions que les coses, i hi ha més llibres sobre llibres que sobre cap altre assumpte: no fem res més que glossar-nos els uns als altres. Tot és un formigueig de comentaris; d'autors en manquen.» Vegeu MONTAIGNE (1595), llibre III, capítol 13, p. 472v.

2. «Per començar, aprèn aquesta lliçó: les coses no són mai el que semblen. Fins i tot per a qui l'ha viscuda, l'experiència és un misteri. Així doncs, com es pot atrevir a dir, "fou així o això", aquell que només n'ha sentit a parlar? No creguis que et jutjo amb massa severitat, jove. No, no-

A *Grècia I* hem exposat totes les aportacions matemàtiques prèvies als *Elements* d'Euclides, que obren el segle III aC amb la consolidació de la geometria. I ho hem fet seguint de molt a prop el text de Procle *Comentari al llibre primer dels Elements d'Euclides* que, com hem vist, conté el *Sumari* de les aportacions dels geòmetres que l'havien precedit.[3]

I, tanmateix, aquest *Sumari* omet un matemàtic realment notable que, al nostre entendre, és molt important per a comprendre la transició de la matemàtica grega produïda entre els segles VI i IV aC i una part important de la que es desenvolupa al segle III, concretament, l'estudi i l'ús de les còniques. Ens referim a Aristeu el Vell, o de Crotona. El vincle d'aquest matemàtic amb Euclides i, de retruc, amb Arquimedes, Conó i Apol·loni és indiscutible, com veurem en diversos punts d'aquest volum.

A més, hi ha un altre personatge —en aquest cas, un filòsof peripatètic— que també esdevé un lligam entre el passat i el futur: Eudem de Rodes. La seva aportació és històrica i, en tant que és històrica, uneix Tales i Pitàgores amb Euclides.[4]

Malauradament, les obres d'aquests dos personatges rellevants, a cavall entre el segle IV i III aC, s'han perdut i només podem parlar-ne per boca de tercers. Tanmateix, ens semblaria molt poc adient no fer-hi una mínima referència. Per això els dediquem aquest breu capítol, tan acurat com hem estat capaços.

més em fas pena.» Vegeu Wassermann (1928), capítol XI, 1, edició castellana, p. 348.

3. Vegeu Pla (2016*b*), p. 373-375.

4. És el primer historiador de la ciència que coneixem.

## 1.1 Una nota sobre la vida i l'obra d'Aristeu el Vell

### 1.1.1 Introducció

Aristeu el Vell (*Ἀριστεύς*) (Crotona, ∼370 aC - ∼300 aC) era més gran que Euclides però contemporani seu. Gairebé no en sabem res, excepte que Pappos s'hi refereix com a Aristeu el Vell, cosa que fa pensar en l'existència d'un altre matemàtic posterior amb el mateix nom.

Chasles diu:

> L'obra principal d'Aristeu constava de cinc llibres referits a les seccions còniques. Els antics l'esmenten sempre amb grans elogis. Dels cinc llibres sobre els llocs sòlids, no ens n'ha arribat res.[5]

Aquesta afirmació de Chasles és un eco de l'afirmació de Pappos que li atribueix una obra, formada per cinc llibres, titulada *Elements dels llocs sòlids* (*Στοιχεία των κωνικών τομώμ*).[6] Ja hem dit que se n'ha perdut el rastre del tot. Recordem que l'expressió *lloc sòlid* serveix per a referir-se a les seccions còniques en grec. Per això es creu que l'altra obra sobre aquestes corbes, *Còniques* (*Κωνικά*), que de vegades se li atribueix i que també consta de cinc llibres, és la mateixa.

Pappos assegura, també, que Euclides va compilar resultats elementals sobre aquestes en el seu tractat *Còniques* (*Κωνικά*). I que, en aquest text, no incorpora els resultats d'Aristeu, «molt més profunds, originals i especialitzats», perquè prefereix que siguin consultats en la presentació original del de Crotona.

5. Chasles (1837), p. 7.
6. Vegeu, en línia, <http://www.greekencyclopedia.com/aristaios-o-presvyteros-v-miso-4oy-ai-px-p14131.html>.

Heath proposa uns continguts possibles per als *Elements dels llocs sòlids*:

> Una part molt gran de les propietats estàndard de les còniques es pot enunciar en forma de teoremes de llocs [...]. Però defensem que l'obra d'Aristeu no és una simple recopilació de proposicions ordinàries, sinó que tracta de teoremes nous relatius als llocs que no s'infereixen directament de les definicions i propietats fonamentals de les còniques, com ara [...] els teoremes dels llocs de les tres o les quatre rectes. I, encara més, creiem que inclou una propietat que per nosaltres és ordinària: la de la directriu i el focus.[7]

Aquest problema, en síntesi, és el següent:

> Problema de les tres o les quatre rectes. Suposem que tenim tres rectes, que tirem una perpendicular a cada una des d'un punt i que, finalment, la raó que hi ha entre el rectangle que determinen dues d'aquestes i el quadrat que determina l'altra és donada. Aleshores, els punts que compleixen això formen un lloc que queda donat en posició i que és una de les tres seccions còniques. Si, en lloc de tres rectes, fossin quatre i la raó donada s'establís entre els rectangles de dues d'aquestes amb el rectangle de les altres dues, el lloc també seria una de les tres seccions còniques.[8]

Val la pena indicar que aquest problema és el que va portar Descartes a plantejar un camí alternatiu per a la geometria i a elaborar la *Géométrie* (1637), segons les seves pròpies paraules.[9]

Tanmateix, aquesta qüestió era massa complexa perquè Aristeu i Euclides la poguessin resoldre, com fa notar Apol·loni en la introducció de *Còniques* (*Κωνικά*).[10]

7. Heath (1921), volum II, p. 119.
8. Vegeu el text D.2.1$d_1$ (pàgines 286-287).
9. Pla i Viader (1999), p. XLI-XLV i 23-36.
10. Vegeu el text D.2.1$d_1$ (pàgines 283-286).

Tant l'obra d'Aristeu sobre còniques —llocs sòlids— com la d'Euclides van ser desenvolupades de manera molt completa i acurada per Apol·loni de Perge, que va fer que les aportacions que l'havien precedit —i, d'alguna manera, inspirat— quedessin obsoletes.

Hipsicles li atribueix el llibre *La comparació dels sòlids canònics* (*Περὶ των κανονικών στερεών σωμάτων*),[11] en el qual compara els cinc sòlids platònics. Hi estableix que:

> [. . . ] El pentàgon del dodecaedre regular i el triangle de l'icosaedre inscrits en una mateixa esfera són circumscrits per un mateix cercle.[12]

▶ **Exercici 1**. Demostreu aquesta afirmació. [*Indicació.* Vegeu la demostració d'Hipsicles (A.1.3*a*, pàgines 158-161).] ◀

## 1.1.2 Les aportacions d'Aristeu el Vell

Vegem, ara, dues aportacions que s'atribueixen a aquest ínclit desconegut.

### 1.1.2*a* Les còniques

*a*) Determinació de les còniques. En el tractat *Elements dels llocs sòlids* proporciona la manera d'aconseguir cadascuna de les seccions còniques, segons Pappos[13] i Eutoci.[14]

Tot consisteix a tallar un con amb un pla perpendicular a l'aresta o generatriu. Ara bé, segons la naturalesa de l'angle del vèrtex del con, s'obté una cònica o bé una altra. En concret, si l'angle del vèrtex del con és:

---

11. Vegeu la nota 6 (pàgina 3).
12. HEATH (1921), volum I, p. 420.
13. Vegeu el text D.2.1$d_1$ (pàgines 283-284) o PAPPOS (1932), llibre VII, edició francesa, p. 503-504.
14. APOL·LONI DE PERGE (1923), edició francesa, introducció, § II, p. XIII. I també els textos A.1.1$a_1$ i $a_2$ (pàgines 155-156). Pel que fa a Arquimedes, vegeu la p. 31 i el text A.3.2*a*, p. 303-304, de *Grècia IIIb*, pendent de publicació.

—recte (*ὀρθογωνίου κώνον τομή*), s'obté una «paràbola» (*παραβολή*);
—obtús (*ἀμβλυγωνιόυ κώνον τομή*), una «hipèrbola» (*υπερβολή*);
—agut (*ὀυξυγωνιόυ κώνον τομή*), una «el·lipse» (*ἔλλειψη*).

Aquesta manera de determinar les còniques, tot distingintles, es manté en les obres d'Euclides i d'Arquimedes. Cal esperar les *Còniques* d'Apol·loni per a disposar d'una manera diferent de fer-ho. L'autor de Perge usa un sol con, amb independència de l'angle, i només distingeix la manera com el talla el pla. Pot fer-ho amb:

1) un pla paral·lel a la generatriu del con,
2) un pla paral·lel a l'eix del con,
3) un pla ni paral·lel a la generatriu ni paral·lel a l'eix.

*b*) El principi directriu focus de determinació d'una cònica. No sabem ben bé si ja es trobava en l'obra d'Aristeu o bé va caldre esperar la d'Euclides. Aquesta propietat no apareix en Apol·loni i, per tant, el fet que es conegués abans és molt rellevant perquè palesa, encara que sigui lleument, la qualitat de les obres d'aquests dos autors. La retrobem en *Llocs en superfícies* (*Τόποι πρὸς ἐπιφανεία Βιβλία Β*) d'Euclides i, per això, en parlarem en el paràgraf següent.

### 1.1.2*b* La comparació dels sòlids platònics

Llevat del títol, no disposem de cap referència que ens digui de què tractava exactament aquest text, però el seu nom posa de manifest que el geòmetra de Crotona es va plantejar la comparació dels sòlids platònics abans que ho fes Euclides.

Bretschneider afirma que:

> El contingut del llibre XIII d'Euclides no és altra cosa que la recopilació, si més no parcial, de l'obra d'Aristeu.[15]

15. Bretschneider (1870), p. 171.

Teorema d'Aristeu: *Considerem un dodecaedre i un icosaedre regulars inscrits en una mateixa esfera. Podem demostrar que un mateix cercle circumscriu els pentàgons regulars* [*que són cares del primer*] *i els triangles equilàters* [*que ho són del segon*].[16]

I Allman sosté que aquesta afirmació queda justificada quan ens adonem que els elements del llibre XIII són necessaris per a establir el «teorema d'Aristeu», tal com ho fa Hipsicles.[17]

Si examinem la proposició EXIV 3 —que, de fet, és d'Hipsicles—, veiem que depèn dels ítems següents:[18]

1. Considerem un pentàgon regular inscrit en un cercle. El quadrat del costat del pentàgon més el quadrat de la seva diagonal —que subtendeix dos angles— equivalen al quadrat de costat cinc radis del cercle.
2. Si dividim la diagonal del pentàgon en mitjana i extrema raó, la part més gran és el costat del pentàgon [EXIII 8].
3. El costat del decàgon inscrit en un cercle és la part més gran resultant de la divisió del radi en mitjana i extrema raó.
4. El quadrat del costat d'un pentàgon regular inscrit en un cercle equival a la suma dels quadrats de costat l'hexàgon i el decàgon inscrits en el mateix cercle [EXIII 10].
5. El quadrat del costat del triangle equilàter inscrit en el cercle equival a tres vegades el del radi [EXIII 12].
6. El quadrat del diàmetre d'una esfera equival a tres vegades el quadrat de l'aresta del cub inscrit en l'esfera [EXIII 15].
7. El segment que subtendeix dos costats d'un pentàgon regular, que és la cara d'un dodecaedre regular inscrit en l'esfera, és igual al costat del cub que també hi està inscrit.[19]

---

16. EUCLIDES (1676), p. 506-509.
17. ALLMAN (1899), p. 201.
18. Vegeu el text A.1.3*a* (pàgines 158-161) de l'obra d'Hipsicles.
19. És un diorisma immediat d'EXIII 17: «Si dividim el costat del cub

8. El quadrat del diàmetre d'una esfera equival a cinc vegades el quadrat del radi del cercle en el qual podem inscriure l'icosaedre. És a dir, el cercle que circumscriu el pentàgon és la base de cinc triangles equilàters de l'icosaedre inscrit en el cercle que tenen el vèrtex comú [Exiii 16 i diorisma].[20]

▶ **Exercici 2**. Demostreu els vuit ítems anteriors.
Sabríeu deduir-ne el teorema d'Aristeu? ◀

En el llibre v, Pappos compara els sòlids amb la mateixa superfície entre si i amb l'esfera.[21] Estableix que l'icosaedre n'és el més gran, seguit del dodecaedre, l'octaedre, el cub i, finalment, el tetraedre.[22] Té una introducció digna de ser llegida (text A.1.2$a_1$, pàgines 156-158). També és en aquest capítol on descriu els semipoliedres.[23]

▶ **Exercici 3**. Demostreu aquest teorema relatiu a la grandària dels sòlids platònics que tenen la mateixa superfície. ◀

En les proposicions 48 i 49 —que corresponen als lemes 12 i 13— proporciona dues demostracions del teorema d'Aristeu[24] que Allman sintetitza així:

▶ **Exercici 4**. Si inscrivim un dodecaedre regular en una esfera, els pols de les seves cares són els vèrtexs de l'icosaedre regular. I, recíprocament, els vèrtexs del dodecaedre regular són els pols de les cares de l'icosaedre.

*a*) Sigui $R$ el pol del cercle que circumscriu el pentàgon regular $\pentagon ABCDE$ del dodecaedre regular, i $S$ i $T$ els dels cercles que circumscriuen els altres dos pentàgons que comparteixen el vèrtex $A$. Alesho-

inscrit en una esfera en mitjana i extrema raó, el segment gran és el costat del dodecaedre.»

20. Allman (1899), p. 201-202.

21. Abans havia fet el mateix amb les figures planes de perímetre igual i el cercle.

22. Pappos (1932), llibre v, proposicions 52 a 56, edició francesa, volum i, p. 350-362.

23. Vegeu el text A.15.1*a* de *Grècia III b*, p. 489, pendent de publicació.

24. Pappos (1932), llibre v, proposicions 55 i 56, edició francesa, volum i, p. 336-343.

res, $A$ és el pol del cercle que circumscriu el triangle $\triangle RST$ de l'icosaedre regular.
*b*) Ara unim els punts $R$ i $A$ amb el centre $O$ de l'esfera. Els segments $OR$ i $OA$ són perpendiculars als plans $\varparallelogram ABCDE$ i $\varparallelogram RST$, respectivament. Siguin $P$ i $Q$ els punts en els quals les perpendiculars toquen els plans $\varparallelogram ABCDE$ i $\varparallelogram RST$.
*c*) Aleshores, els triangles rectangles $\triangle\, ORQ$ i $\triangle\, OAP$, que tenen hipotenuses $OR$ i $OA$ iguals i comparteixen l'angle $\widehat{ROA}$, són iguals. Per tant, $OP = OQ$ i $AP = BQ$.
*d*) Però $AP$ i $BQ$ són radis dels cercles que circumscriuen el pentàgon del dodecaedre i el triangle de l'icosaedre, i $OP$ i $OQ$ són les perpendiculars des del centre de l'esfera a aquests dos plans. ◀

### 1.1.3 La propietat fonamental de les còniques

No sabem si la propietat directriu focal de les còniques la va establir Aristeu o Euclides, però el que sí que podem confirmar és que apareix a *Llocs en superfícies* del segon.[25]

Heath ho sintetitza així:[26]

> Sigui $F$ un punt fix i per aquest tirem un segment $FU$ igual a un segment donat. Sigui $P$ un punt del lloc i $PN$ un segment perpendicular a $FU$, de manera que la raó entre $FP$ i $NU$ sigui igual a una raó donada $\epsilon$.
> Per tant,
>
> $$\epsilon^2 = \frac{PN^2 + FN^2}{NU^2}. \qquad \text{[raó doble i E I 47]}$$
>
> Agafem $K$ sobre $FU$, de manera que
>
> $$\epsilon^2 = \frac{FN^2}{NK^2}. \qquad \text{[E VI 13 i E VI 21]}$$
>
> Sigui $K'$ un punt de $FN$ o de la seva prolongació, de manera que $NK = NK'$. [P 2 i E I 2 o E I 3]

25. Vegeu el text D.2.1*d* (pàgines 283-288).
26. Heath (1921), volum II, p. 150-151.

Aleshores, sigui

$$\epsilon^2 = \frac{PN^2 + FN^2}{NU^2} = \frac{FN^2}{NK^2} \qquad \text{[Ev 11]}$$

$$= \frac{PN^2}{NU^2 - NK^2} \qquad \text{[Ev 16 i Ev 17]}$$

$$= \frac{PN^2}{UK \times UK'}. \qquad \text{[EII 5 o EII 6]}$$

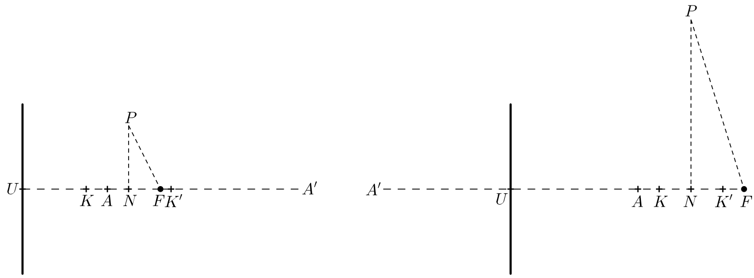



FIGURA 1.1. La propietat fonamental de les còniques, segons Heath

Ara bé, els punts $N, K$ i $K'$ canvien quan el punt $P$ del lloc ho fa.

Si $A$ i $A'$ són els punts en els quals cau $N$, quan els punts $K$ i $K'$ coincideixen amb el punt $U$, tenim, respectivament, que

$$\frac{FA}{AU} = \frac{FN}{NK} = \frac{\epsilon}{1} = \frac{FN}{NK'} = \frac{FA'}{A'U}. \qquad \text{[Ev 11]}$$

Per tant,

$$\frac{FU}{FA} = \frac{FK}{FN} = \frac{1+\epsilon}{\epsilon}. \qquad \text{[Ev 9 i Ev 24]}$$

I, aleshores,

$$\frac{1+\epsilon}{\epsilon} = \frac{FU - FK}{FA - FN} \qquad \text{[Ev 16 i Ev 17]}$$

$$= \frac{UK}{AN}.$$

Igualment, podem veure que

$$\frac{1-\epsilon}{\epsilon} = \frac{UK'}{NA'}. \qquad \text{[Ev 16 i Ev 17]}$$

I, *ex æquali*, que

$$\frac{1-\epsilon^2}{\epsilon^2} = \frac{UK \times UK'}{NA \times NA'}. \qquad \text{[EVI 22 i Ev 10 o Nc 1]}$$

I, *ex æquali*, que

$$\frac{1-\epsilon^2}{1} = \frac{PN^2}{NA \times NA'}, \qquad \text{[Ev 22]}$$

que és la propietat central de la cònica.

Si $\epsilon < 1$, $A$ i $A'$ es troben a la mateixa banda del punt $U$, $N$ es troba al segment $AA'$
i la cònica és una el·lipse.

Si $\epsilon > 1$, $A$ i $A'$ es troben en costats oposats del punt $U$, $N$ es troba a la prolongació del segment $AA'$
i la cònica és una hipèrbola.

Si $\epsilon = 1$, és fàcil veure que la cònica és una paràbola i no cal entretenir-se a demostrar-ho. ♠

▶ **Exercici 5**. Vegeu la correcció de la demostració anterior i establiu el cas de la paràbola. ◀

## 1.2 Eudem de Rodes, el peripatètic

### 1.2.1 Apunts biogràfics

Eudem ($E\breve{\acute{\upsilon}}\delta\epsilon\mu o\varsigma$) va néixer a l'illa de Rodes (∼350 aC) però va viure molt temps a Atenes. Va retornar a Rodes, on va morir el ∼290 aC. Va estudiar filosofia al Liceu d'Aristòtil, de qui va ser molt més que un deixeble. De fet, només Teofrast —el primer doxògraf— i Eudem —el primer historiador de la ciència—[27] eren anomenats *companys* (ἑταῖροι) d'Aristòtil. Per això, Procle l'anomena, en dues ocasions, el «peripatètic» (περιπατητικός).[28]

27. Taton (1957), edició castellana de 1988, volum II, p. 291.
28. Procle (1873), 125, línia 6, i 379, línia 2, edició anglesa, p. 126 i 298.

La col·laboració d'Eudem —com la de Teofrast— amb Aristòtil va ser llarga, i el mestre el considerava un dels seus deixebles més brillants. Va participar en l'elaboració del *Corpus Aristotelicum*. I, tanmateix, quan Aristòtil va decidir traslladar-se a Calcis, va haver de decidir quin d'aquests dos col·laboradors deixava com a successor al capdavant del Liceu. Malgrat que, segons Simplici, Eudem era qualificat com *γνησιώτατος* —«l'autèntic»—,[29] Aristòtil va triar Teofrast per una qüestió de caràcter, com descriu Aule Gel·li usant un símil sobre l'esperit del vi.[30] Ho explica Sarton:

FIGURA 1.2. Eudem a *Escola d'Atenes* de Rafael (1509-1510)

> Aristòtil va triar Teofrast no pas perquè Eudem fos un deixeble menys fidel a les idees del Liceu, sinó per la suavitat de les seves bones maneres [...]. Aristòtil tenia clar que el director de l'escola havia de tenir moltes qualitats i que, potser, les intel·lectuals no eren les més importants. Fins a quin punt el mestre va apreciar que els «sentiments» s'oposaven a la intel·ligència i que les raons del cor ho feien a les del cervell? No ho podem saber.[31]

Sabem molt poca cosa més de la seva vida, tot i que Simplici diu que un desconegut Damas en va escriure una biografia.[32]

29. SIMPLICI (1806), edició electrònica, p. 411, 16.
30. Vegeu el text A.2.1, pàgina 163.
31. SARTON (1952*a*), edició castellana, volum II, p. 703.
Ara bé, com també ens recorda, «parlant d'una manera estricta, aquestes darreres expressions no eren pròpies del filòsof que havia situat la raó al cor i no al cervell.»
32. Nosaltres disposem d'alguns estudis sobre aquest filòsof. Més antics, WEHRLI (1969) i BULMER-THOMAS (1970). I més recent, BODNÁR i FORTENBAUGH (ed.) (2002). En concret, p. 40.

Durant un cert temps, es va creure que l'*Ètica eudèmia* era obra seva, però avui en dia es considera un original d'Aristòtil, que probablement va editar Eudem anys més tard.

Per les citacions conegudes, el seu treball és rellevant en dos vessants: el d'historiador de la ciència i el d'editor de les obres de l'estagirita.

Podem, doncs, afirmar que és amb Eudem, Teofrast, Menó i Aristoxen que s'inicia la història de la ciència impulsada pel mateix Aristòtil.[33] Tanmateix, hi ha un desacord sobre el significat que cal donar al mot *ιστορία*, 'història', i en particular, a la història de la ciència.[34]

Nosaltres, però, sense entrar al fons d'aquesta discussió, acceptem el significat que ja vam exposar en el volum *Grècia I* d'aquesta història de la matemàtica grega.[35] Ara, per tal de deixar-ne clar el significat, ens afegim al que fa servir Jàmblic en la *Vida de Pitàgores*. Diu: «Ἐκαλεῖτο δὲ ἡ γεωμετρία πρὸς Πυθαγόρου 'ἱστορία».[36] D'altra banda, Procle posa en paral·lel la història i la medicina —*ούτϵ τὸ ἱστορικὸν τὸ ιατρικὸν*. Per tant, considera la història una ciència o, en el pitjor dels casos, una tècnica. No esdevé un simple relat, sinó una anàlisi.

### 1.2.2 Les obres atribuïdes a Eudem

Dissortadament, no es conserva cap de les obres d'aquest filòsof, però, per citacions d'altres autors antics, es pot establir que va escriure, entre d'altres, els llibres següents:

*Analítics* (*Aναλιτικά* o *Kατηϵγοριαι*), que potser fa referència a dos llibres diferents.

33. Aquestes històries són la de la naturalesa de Teofrast, la de la matemàtica i l'astronomia d'Eudem, la de la medicina de Menó i la de la música d'Aristoxen. Copleston (1946), edició castellana, volum I, p. 281 i 369.
34. Eggers Lan (1995), p. 44-48.
35. Pla (2016*b*), § 3.4.4, p. 197-200.
36. Pitàgores anomena *recerca* o *ciència* la geometria. Hernández (2011), p. 284.

*Del discurs* (*Περὶ λἑξἑως*).
*Física* (*Φυσικά*).
*Història de la teologia* (*Θεολογίας ἱστορία*).
*Dels angles* (*Περὶ γωνίας*).
*Història de l'aritmètica* (*Ἀριθμητικὴ ἱστορία*).
*Història de la geometria* (*Γεωμετρικά ἱστορία*).
*Història de l'astronomia* (*Ἀστρολογικὴ ἱστορία*).

### 1.2.3 Comentaris a les aportacions matemàtiques

Ara analitzarem, i justificarem, les possibles aportacions matemàtiques i històriques incloses en aquestes obres d'Eudem.[37]

#### 1.2.3*a* Dos conceptes matemàtics

*Angle.* Eudem va ser conscient de la complexitat del concepte d'angle i, com hem vist, li va dedicar una monografia. L'única cosa que en sabem, però, és el que recollim en el text de Procle citat *in extenso* a C.2.2$n_1$ (pàgines 232-238 i, en concret, a la pàgina 235): «L'angle és una qualitat.»[38]

*Figura.* Una novetat de la geometria grega és que fa de la «figura» (*σχῆμα*) un objecte de la geometria.[39] Com diu Vitrac:

> Aquest objecte gràfic ben identificat i anomenat és el lloc d'observació entre relacions internes de les parts constituents. Cal esmentar-ne la igualtat de longituds i d'angles, i la semblança, una relació distintiva del discurs matemàtic [...].

37. Afortunadament, disposem de la recopilació de tot allò que s'ha pogut atribuir a Eudem. Vegeu Eudem (1866) i Müller (1845), volum III, p. 222-293.

38. L'angle com a qualitat d'Eudem és un reflex clar del d'Aristòtil. Aristòtil (1988*a*), 10 a, línia 11, p. 59. «Un quart gènere de qualitats són la figura i la manera que envolta la cosa, i la dretura o la curvatura, i qualsevol altre aspecte del mateix tipus.»

39. En Pla (2018), p. 96-98, hem exposat la nostra tesi sobre el fet que les figures de la geometria són «ideals».

> Si, com creu Eudem, els jònics són els pares de la geometria, ho són perquè han inaugurat la manera grega d'entendre i tractar la «figura».[40]

En fer aquesta afirmació, Eudem accepta aquesta novetat de la geometria grega, l'ús de la figura com a eina indispensable.

### 1.2.3*b* El *Sumari* de Procle

La qüestió relativa al convenciment que el *Sumari* de Procle,[41] amb anterioritat a Euclides,[42] és una síntesi del que es trobava en la *Història de la geometria* d'Eudem ha suscitat molta controvèrsia. De fet, si ens atenem a l'únic fragment que ens n'ha arribat, a través de Simplici,[43] observem que hi ha una diferència molt gran entre el contingut d'aquesta història i el del *Sumari* de Procle. Aquell és un text de geometria en el sentit més ple de la paraula, mentre que aquest és, com el nom indica, un sumari cronològic d'autors amb una notícia breu del que han aportat. I, si bé és cert que podem acceptar que aquest s'ha extret d'aquella història, cal afegir-hi quelcom més.[44]

Creiem que el text que s'ha conservat justifica les paraules de Wehrli:

> El material [de la *Història de la geometria*] no estava ordenat per autors, sinó segons l'aparició i el desenvolupament dels pensaments rectors. Així, cada problema particular quedava lligat a autors diversos i el tractament de cada autor, repartit en diferents àmbits temàtics.[45]

40. Vitrac (1990), p. 98. I voldríem afegir, com ja vam indicar en Pla (2018), p. 87, que s'hi introdueix un cert «simbolisme».
41. Pla (2016*b*), text A.4*a*, p. 373-375.
42. Per cronologia, Eudem no podia conèixer l'obra d'Euclides, és a dir, l'ítem [13] de l'esmentat *Sumari*.
43. Pla (2016*b*), text B.7.5$e_2$, p. 490-496, que és el suport textual del que s'explica al § 4, p. 244-249.
44. Eggers Lan (1995).
45. Wehrli (1969), p. 113.

Aquesta concepció, a més, lliga molt bé amb el que cal entendre per *història de la ciència* a la Grècia clàssica, en general, i al Liceu, en particular, segons hem dit abans.

Però, a més, ens podem fixar en una altra qüestió que considerem que és important. Procle és platònic i fa un sumari basat, fonamentalment, en els membres de l'Acadèmia. En canvi, Eudem el peripatètic és aristotèlic i potser en la seva història va incloure personatges com Zenó d'Elea, Demòcrit —que l'estagirita havia analitzat—[46] i qui sap si Aristeu, tots ells erudits que s'havien preocupat per la matemàtica i que no apareixen en el *Sumari*. Però això és simplement una especulació.

### 1.2.3*c* Les aportacions històriques d'Eudem, per llibres i cronològicament

Pel que fa a la història de l'aritmètica i de l'astronomia, no en sabem gairebé res.

En el cas de l'aritmètica, tenim la referència de Porfiri en el *Comentari a l''Harmònica' de Ptolemeu* (*Εις τα Ἁρμονικα Πτολεμαιου ηψπομνμ*), en el qual afirma que Eudem exposa la correlació que els pitagòrics van establir entre els nombres i els intervals musicals.[47]

I també, implícitament,[48] la de Procle relativa a la determinació de les «ternes numèriques pitagòriques».[49]

Pel que fa a l'astronomia, hem de recórrer a un text de Simplici en el qual explica que Plató va plantejar als seus deixebles la qüestió d'esbrinar «quins eren els moviments uniformes i ordenats [que calia considerar] partint de la hipòtesi que era possible conèixer [en el sentit de poder-lo calcular] el moviment apa-

46. Pla (2016*b*), p. 210-213 i 228-234.

47. Düring (ed.) (1932), 114.23-115.9, citat en l'entrada *Porphyri* de Gillispie (ed.) (1970).

48. Vegeu la nota 54.

49. Procle (1873), § 428 i 429, edició anglesa, p. 340. I Pla (2016*b*), p. 136-138.

rent dels planetes, si es pretenia que els còmputs s'hi ajustessin». Es basa en Sosígenes, que s'inspira en Eudem.[50] Tanmateix, el problema el va resoldre Èudox i, potser, fins i tot, va ser qui el va plantejar.[51] Concretament, Diògenes Laerci en diu: «L'opinió d'alguns és que va ser el primer a estudiar els cossos celestes i a predir els eclipsis de Sol i els solsticis, com explica Eudem en la *Història de l'astronomia*.»[52]

Molt més extensos són els textos que, de manera explícita o implícita, estan vinculats a la *Història de la geometria*. Els apleguem ara, cronològicament, d'acord amb el matemàtic al qual fan referència i en dues agrupacions: la primera amb reconeixement explícit[53] i la segona, implícit.[54]

Tales de Milet

Amb reconeixement explícit:

EI 15. Els angles que s'oposen pel vèrtex són iguals.[55]

EI 26. El criteri ACA d'igualtat de triangles.[56]

---

50. Simplici (1894), volum II, 12 (292 b10), p. 488.

51. Sarton (1952*a*), edició castellana, volum II, p. 557, nota 65, o bé Waerden (1954), edició de 1963, p. 180-184.

52. Diògenes Laerci (1988), llibre 1 [23], edició catalana, volum I, p. 55-56.

53. És a dir, la font doxogràfica li atribueix l'autoria perquè Eudem ho fa.

54. El fet que l'afirmació doxogràfica sigui tan categòrica fa pensar que ho sap perquè n'ha tingut coneixement a través d'alguna font. I aquesta font, molt probablement, és Eudem.

55. Procle (1873), § 299-301, edició anglesa, p. 233-235, en particular, p. 233. Solament li atribueix l'enunciat perquè, segons ell, la demostració és pròpia de l'autor dels *Elements*. Curiosament, oblida esmentar que depèn del postulat P 4. I Pla (2016*b*), p. 71, ítem 3, i (2018), p. 108.

Segons Procle, d'aquesta proposició se'n segueix la possibilitat d'enrajolar el terra. Però aquest porisma l'atribueix a Pitàgores.

56. Procle (1873), § 347-353, edició anglesa, p. 271-275, en particular, p. 275. I, segons ell, Eudem afirmava que «el mètode que emprava [Tales] per a determinar la distància d'un vaixell necessitava aquest resultat. I també Pla (2016*b*), p. 71, ítem 4, i els textos A.5.2.4*a* i A.5.2.4*c*, p. 380-381, i (2018), p. 121-123.

Amb reconeixement implícit:

DI 17*b*. El diàmetre dimidia el cercle.[57]

EI 5. Els angles de la base d'un triangle isòsceles són iguals.[58]

EIII 31*a*. L'angle inscrit en una semicircumferència és recte.[59]

PITÀGORES DE SAMOS

Amb reconeixement explícit:

EI 32. L'angle extern d'un triangle equival als dos interns no adjunts. I, de retruc, els tres angles del triangle junts equivalen a dos angles rectes.[60]

EI 44. És possible portar un angle donat amb costat en un segment donat i vèrtex en un punt donat d'aquest segment.[61]

Amb reconeixement implícit:

DI 10, 11 i 12. Distinció i classificació d'angles —recte, agut i obtús.[62]

---

57. Procle diu que Tales «va ser el primer que ho va demostrar». Vegeu el mètode de superposició de Tales, a PLA (2016*b*), p. 73. I, tanmateix, Euclides situa aquest enunciat a la segona part de la definició —de fet, el postula. PROCLE (1873), § 156-158, edició anglesa, p. 124-125. I també PLA (2016*b*), p. 71, ítem 1, i (2018), p. 79.

58. PROCLE (1873), § 244-251, edició anglesa, p. 190-196, en particular, p. 195. I també PLA (2016*b*), p. 71, ítem 2, i (2018), p. 94-95. És una proposició realment notable per l'elegància i claredat de la seva demostració i perquè obre la porta a EI 6, que és la primera proposició que es demostra per reducció a l'absurd i que, per tant, conté una «figura ideal». (2018), p. 27, nota 103, i p. 94-97 amb les notes corresponents.

59. L'hi atribueix Pàmfila. Aquest enunciat fa possible l'estudi dels llocs geomètrics. Tanmateix, alguns autors diuen que el va establir Pitàgores. PLA (2016*b*), text A.5.2.4*b*, p. 381. I també (2016*b*), p. 71, ítem 5 (hi ha un error, diu EIII 12 en lloc de EIII 31), i (2018), p. 40, nota 146. Aquest resultat depèn d'EI 5 i EI 32. (2018), p. 224-225.

60. PROCLE (1873), § 377-384, p. 297-302 i, en particular, p. 298. I també PLA (2016*b*), p. 143, el text A.6.13.2$b_4$, p. 432, i (2018), p. 130-131.

61. Això, segons Eudem, fa possible l'«aplicació d'àrees», un fet que Euclides estableix a EII 5, 6 i 14 amb tangram —àlgebra geometritzada—, i a EVI 28 i EVI 29 amb teoria de la proporció. Vegeu PROCLE (1873), § 419-421, p. 332-333. I també PLA (2016*a*), p. 149, el text A.6.13.2$b_5$, p. 432-433, i (2018), p. 143-145, 162-166 i 341-344.

62. PROCLE (1873), § 131-136, p. 105-109. I també PLA (2018), p. 78.

EI 15, porisma. Solament el triangle equilàter, el quadrat i l'hexàgon regular són aptes per a enrajolar el terra.[63]

EI 35, 36, 37 i 38. Els paral·lelograms i els triangles entre segments paral·lels i amb bases congruents són equivalents.[64]

EI 47. El teorema de Pitàgores.[65]

ENÒPIDES DE QUIOS

Amb reconeixement explícit:

EI 11 i EI 12. Donats un segment i un punt del segment o exterior a aquest, podem tirar-hi la perpendicular.[66]

EI 23. És possible construir un angle igual a un angle donat amb un costat i un vèrtex donats.[67]

ANTIFONT DE RHAMNOUS

Amb reconeixement explícit:

EXII 2. L'exhaustió d'Èudox aplicada al cercle.[68]

---

63. Vegeu el text A.6.13.2$b_3$ de PLA (2016*b*), p. 431. Altres autors creuen que és un porisma d'EIII 20. (2016*b*), p. 142.

64. Per veure el lligam de la proposició EI 35 amb els «llocs», segons Procle, vegeu el text A.2.2$b_4$ (pàgines 166-167). El text íntegre el trobareu a PROCLE (1873), § 394-409, edició anglesa, p. 310-323. Procle lliga aquestes proposicions amb els *llocs* —entesos com a invariància. Nosaltres considerem que constitueixen la base de la metodologia tangram grega i pensem que lliguen amb l'aplicació d'àrees.

65. PROCLE (1873), § 426-429, p. 337-341 i, en particular, p. 337. I també PLA (2016*b*), p. 144-147; el text A.6.13.2$b_7$, i (2018), p. 149-151. Vegeu l'elegància de la demostració pel mètode tangram —àlgebra geometritzada— en els *Elements*.

66. PROCLE (1873), § 283-229, p. 220-227 i, en particular, p. 220. I també PLA (2016*b*), p. 226-228, el text B.7.3$b_1$, p. 475, i (2018), p. 102-105.

67. PROCLE (1873), § 333-336, p. 260-263 i, en particular, p. 260. I també PLA (2016*b*), p. 226-228, el text B.7.3$b_2$, p. 475, i (2018), p. 117-118.

68. SIMPLICI (1806), 185*a* 14-17, edició electrònica, p. 54-55. En la línia 6 de la pàgina 55, usa el terme grec *δαπανωμένου* —'esgotar'. I invoca l'autoritat d'Eudem (p. 55, línia 24). Podeu consultar també ANTIFONT (2002), p. 117-199. I PLA (2016*b*), p. 234-235; el text B.7.5$c_3$, p. 480-481, i (2020), p. 484-490.

Voldríem recordar l'escrit magnífic d'Aristòtil en el qual diferencia la

Hipòcrates de Quios

Amb reconeixement explícit:

La quadratura de les lúnules d'acord amb Ei 47 i Exii 2.[69]

Teetet[70]

Amb reconeixement explícit:

Ex. Els irracionals com a mitjanes aritmètica, geomètrica i harmònica.[71]

Exiii. Els cinc poliedres regulars.[72]

Arquites de Tàrent

Amb reconeixement explícit:

La determinació de dues mitjanes proporcionals.[73]

---

manera de procedir d'Antifont [i Brisó] i la d'Hipòcrates de Quios. Pla (2016*b*), text B 7.5$c_1$, p. 459.

També val la pena esmentar la hipòtesi que proposa Knorr (1982), p. 130-133, segons la qual Antifont va prestar la seva exhaustió geomètrica a la demostració d'Exii 2 d'Hipòcrates de Quios.

69. Simplici (1806), 185*a* 14-17, p. 60-67 i, en particular, les línies 37 i 38 de la p. 60 —que es troba en la *Història de la geometria* d'Eudem—, i les línies 37 i 38 de la p. 63. I també Pla (2016*b*), p. 244-249, i el text B. 7.7$e_2$, p. 489-495.

70. Sabem que l'estudi dels segments incommensurables s'atribueix a Teodor, Teetet i Èudox. Pla (2016*b*), p. xiv, 20, 208, 220 i 249-250.

71. Pappos assigna aquesta informació a Eudem. Vegeu el text A.2.2$f_1$ (pàgina 168). I també Pla (2020), p. 26.

Per a una anàlisi històrica de les mitjanes, Vitrac (1994), p. 497-506.

72. Pappos atribueix aquesta informació a Eudem. Pappos (1970), § 1 i 2, p. 63. I també Pla (2016*b*), p. 306, i Pla (en premsa *a*), text A.15*a*.

73. És diferent de la de Menecme. Aquest introduïa un lloc del pla —una corba plana, una cònica— i aconseguia resoldre el problema tallant-ne dues coplanàries adequades. Arquites, en canvi, introduïa un lloc de l'espai —una corba—, que obtenia tallant un tor, un cilindre i un con, segons recull Eutoci en *Comentari a 'De l'esfera i el cilindre' d'Arquimedes*. Mugler (1972), p. 62-64, o bé la traducció castellana, a Ortiz-García (2005*a*), p. 376-378. I també Pla (2016*b*), p. 256-258, i el text B.7.11$f_1$, p. 505-508.

## 1.3 Cloenda

Veiem, doncs, que aquests dos prohoms grecs —l'un matemàtic i l'altre filòsof— lliguen el passat amb el segle III aC; el filòsof, fent un repàs d'allò que s'ha establert temàticament abans. I, en parlar d'Arquites, veiem de quina manera lliga el problema de la cerca de dues mitjanes proporcionals a l'espai, però ho fa d'una manera molt diferent de la realitzada per Menecme amb la creació de les còniques.[74] El matemàtic aprofundeix la potència d'aquesta mena de corbes i obre la porta al futur, ja que les faran seves els tres grans geòmetres de l'època: Euclides,[75] Arquimedes i Apol·loni.[76] I també Conó.[77] Mentrestant, Eratòstenes, entre altres aportacions, proporciona un mètode per a determinar dues mitjanes proporcionals que no passa per les còniques. I alhora explica la història del problema delià —una magnífica faula.[78]

74. Pla (2016*b*), p. 323-328, i els textos aplegats a C.8*c*, p. 564-566.
75. Vegeu el capítol 4.
76. *Grècia IIIb* i *Grècia IIIc*.
77. *Grècia IIId*.
78. *Grècia IIId*.

# Capítol 2

# La situació política i cultural grega (segle III aC)

> *[1] Ὁ μὲν οὖν Ἀντίοχος ἀκούσας, καὶ δόξας αὐτοπαθῶς ἅμα δ᾽ ἀληθινῶς εἰρῆσθαι, πάσης τῆς Ἀμίλκου καὶ τῆς ὅλης προθέσεως ὁμολογούμενον θετέον εἶναι τοῦτο μαρτύριον, ὡς καὶ δι᾽ αὐτῶν φανερὸν ἐγένετο τῶν πραγμάτων. [2] Τοιούτους γὰρ ἐχθροὺς παρεσκεύασε Ῥωμαίους Ἀσδρούβαν τε τὸν τῆς θυγατρὸς ἄνδρα καὶ τὸν αὑτοῦ κατὰ φύσιν υἱὸν Ἀννίβαν ὥστε μὴ καταλιπεῖν ὑπερβολὴν δυσμενείας. Ἀυσδρούβας μὲν οὖν προαποθανὼν οὐ π ασαν ἔκδηλον ἐποίησε τὴν αὑτοῦ πρόθεσιν. Ἀννίβᾳ δὲ παρέδωκαν οἱ καιροὶ καὶ λίαν ἐναποδείξασθαι τὴν πατρῴαν ἔχθραν εἰς Ῥωμαίους.*
>
> Polibi[79]

79. «Aquestes paraules, que li semblaven sinceres i sorgides del cor, van dissipar tots els recels que Antíoc havia concebut fins aquell moment

## 2.1 La consolidació política de l'Imperi macedoni

Quèril de Samos, que havia mort a Macedònia al segle V aC, escriu:

> Hem quedat endarrerits, com s'esdevé en una cursa, i, tot i que busquem amb compte pertot arreu, no hi ha manera de trobar un carro que tingui junyits cavalls nous.[80]

I sembla talment que s'anticipi a allò que s'acomplirà a la Grècia més autèntica (la minoica i la micènica), aquella que durant més de cinc segles havia regit el seu propi destí, primer el dels habitants de Macedònia (regió de la Grècia clàssica continental), i després el dels de Roma (a la Magna Grècia). D'alguna manera, tot va començar al segle III aC.

### 2.1.1 Els orígens del regne de Macedònia

L'Imperi macedoni es forja en un estat antic situat al nord de la Grècia continental (*Μακεδονία*). La seva presència en l'escena històrica i política s'estén entre el segle VII i l'any 168 aC.

A partir del segle V aC es va anar consolidant i, amb Filip II, va assolir un gran predomini a tot Grècia. El seu fill, Alexandre el Gran, va iniciar l'expansió de l'hel·lenisme cap a Àsia a finals del segle IV i començaments del III aC.

respecte de la fidelitat d'Anníbal. Estareu d'acord que aquest testimoni de l'odi d'Amílcar i de tots els projectes que havia pensat contra els romans és precís i no admet rèplica. Però aquest odi encara sembla més profund, si tenim en compte que el va traspassar a dues persones més, Asdrúbal, el gendre, i Anníbal, el fill. El primer va morir abans de poder executar el seu desig, però Anníbal va trobar, de seguida, l'ocasió de demostrar, excessivament, l'enemistat amb els romans que li havia transmès el pare.» Polibi (1925), llibre III, 12, [1]-[2], edició catalana, volum II, p. 83-84.

80. Citat a Gómez i Miralles (1997), volum I, p. 70.

A la *Ilíada*, Homer anomena «Emàtia (Εμαθίας)», l'amable,[81] el territori que aplega els pobles que es troben entre el mont Olimp (Ὄλυμπος) i el mar Egeu, i que és circumscrit pel golf Termaic (Θερμαϊκός Κόλπος).[82]

En l'època de les Guerres Mèdiques, les elits macedòniques es van constituir en reialmes força importants. Per exemple, Peònia (Παιονία) va aconseguir resistir la invasió persa, cosa que no havien assolit ni Bottiea (Βοτταία), ni Edònia (Εδονία), ni tampoc Pieria (Πιερίας).


FIGURA 2.1. Mapa del regne de Filip II de Macedònia en el moment de la seva mort (336 aC)

Però no va ser fins a la Guerra del Peloponès (segle V aC) —quan Atenes va estendre el domini territorial i va arribar al golf de Pel·la (Πέλλα Κόλπος)— que Grècia va prendre consciència clara de l'existència del regne de Macedònia.

Segons la llegenda, aquest regne l'havia fundat, pels volts del 795 aC, «abans de la primera Olimpíada (776 aC)»,[83] Caranos de Macedònia —un descendent d'Hèracles—, provinent de

81. HOMER (1978), cant XIV, 215-220, edició catalana, p. 310. De fet, Macedònia era una prefectura, un *nomos* (*νόμος*, en plural, *νομοί*); provè del verb *adjudicar* (*νέμω*, 'justícia'), és a dir, adquireix el sentit de *referit a la llei*. Els grecs antics l'usaven per a designar l'organització territorial bàsica. Quan, entre el 1833 i el 1836, i novament el 1845, Grècia va assolir la independència, es va organitzar territorialment en *nomos*. Per a una relació dels *nomos* de la Grècia clàssica, vegeu <http://ca.wikipedia.org/wiki/Prefectures de Grècia>.

82. Antigament existia també el golf de Pel·la, però va ser dessecat omplint-lo de terra fèrtil.

83. EUSEBI DE CESÀREA (1818), [86].

Corint. Caranos va ocupar la ciutat d'Edessa, a la qual va batejar amb el nom d'Eges (Αιγαί), primera capital del regne molt abans que la ciutat de Pel·la (Πέλλα). I hi va regnar durant trenta anys.[84]

Tanmateix, ni Heròdot ni Tucídides no el consideren un rei històric del regne de Macedònia perquè, en llur opinió, el regne macedoni es va iniciar amb Perdicàs I (700-678 aC) (B.1*a* i *b*, pàgina 172), fet sobre el qual discrepa Demòstenes a la tercera filípica (B.1*d*, pàgina 173). Sigui com sigui, tot el període anterior a l'any 359 aC, en el qual mor Perdicàs III i deixa com a hereu Filip II, un infant d'edat molt tendra, és mític i considerat *bàrbar* pels grecs del Peloponès i les illes àtiques (B.1*c*, pàgines 172-173).

### 2.1.2 Filip II de Macedònia

Al segle IV aC, el regne de Macedònia es consolida sota la regència i tutela de Filip II (382-336 aC), pare d'Alexandre el Gran. Malgrat la seva jovenesa —tenia vint-i-quatre anys quan va accedir al poder—, va reorganitzar la milícia macedònica. D'una banda, va imposar que l'exèrcit no s'abastís de mercenaris sinó de ciutadans —súbdits. El rei els dotava de casc, cuirassa, escut petit i rodó, espasa curta i «sarissa».[85] D'una altra, va concebre una innovació estratègica: la falange macedònia, un cos compacte format per setze fi-

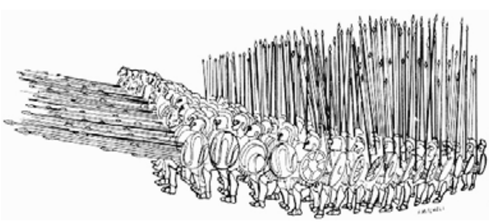


FIGURA 2.2. Dibuix de la falange macedònia

84. EUSEBI DE CESÀREA (1818), [87].

85. La *sarissa* ($\sigma\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\alpha$) era una llança molt llarga, d'entre quatre i set metres, usada per les falanges macedòniques. Era molt pesant (al voltant de cinc quilograms) i constava d'un relló de ferro acerat i d'un aristol punxegut de bronze que permetia travar-la a terra per a poder parar les escomeses de l'enemic.

les de soldats, les sis primeres de les quals baixaven la *sarissa* en entrar en combat (figura 2.2), mentre que les altres restaven segures a la rereguarda per a poder substituir les de davant a mesura que queien amb l'embat de l'enemic. La cavalleria, mentrestant, protegia els flancs.

FIGURA 2.3. Filip II de Macedònia. Medalló de victòria en forma de moneda (segle III aC)

Amb aquests nous conceptes d'exèrcit i estratègia, Filip II va aconseguir dominar els veïns que amenaçaven la puixança macedònica i va estendre les fronteres molt més enllà del nucli inicial (B.2*a*, pàgina 173). Així es va convertir en una amenaça autèntica per a tot Grècia, cosa que ja havia vaticinat Demòstenes en les *Filípiques* (B.2*b*, pàgina 174). En efecte, el rei macedoni es va enfrontar a la lliga grega, formada per Atenes i Tebes, entre d'altres, que s'havia constituït precisament per a aturar l'ambició expansionista del macedoni. Però Filip II la va derrotar en la batalla de Queronea (338 aC).

Aleshores va establir una nova lliga, aquesta vegada contra els perses. Però, abans que pogués dur a terme el projecte expansionista cap a orient, va morir assassinat pel general Pausànies d'Orèstia que, segons Diodor Sícul,[86] n'havia estat amant. Probablement ho va fer instigat per la muller repudiada de Filip, Olimpíada de l'Epir. Era l'estiu de l'any 336 aC i el rei celebrava les victòries aconseguides, un nou casament i la preparació de la invasió del regne aquemènida «en represàlia i en restauració de l'honor grec». Una altra versió, però, planteja que l'assassinat va ser motivat per l'enorme corrupció que patia el seu regnat (B.2*c*, pàgina 176). I una altra, que va ser provocat

86. Vegeu <http://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/Diodorus_Siculus/home.html>.

pel temor que Alexandre tenia que no el nomenés successor seu (B.3$a$, pàgina 176).[87]

### 2.1.3 L'Imperi d'Alexandre

Quan a la mort del seu pare Alexandre el Gran (356-323 aC) agafa les regnes de Macedònia, només té vint anys. I, malgrat la jovenesa, decideix dur a terme la gesta que havia projectat el seu progenitor, l'anomenada «guerra de les represàlies».

En la persona d'Alexandre podem situar l'inici del segle III aC i el lligam amb el segle precedent. Va ser educat per Aristòtil.[88] Però, malgrat haver-ne estat un deixeble fidel que l'admirava (B.3$b$, pàgina 177), se'n va allunyar políticament i ideològicament amb el pas dels anys (B.3$c$, pàgina 177).[89] fpto

Un cop es va esdevenir el traspàs d'Alexandre, l'any 323 aC, es va iniciar, amb els qui el van succeir i, en particular, amb els ptolemaics, el camí cap a la creació del museu d'Alexandria, un centre d'estudi i recerca sense l'existència del qual seria difícil justificar el segle d'or de la matemàtica grega. Alexandre va ser, d'alguna manera i *malgré lui*, un catalitzador.

FIGURA 2.4. Gravat de Charles Laplante en el qual veiem Aristòtil instruint Alexandre

Ningú no posa en dubte l'enorme capacitat bèl·lica, estratègica, política i sociològica del jove monarca, però tampoc ningú

87. Recordem que el juny de l'any 2015 es van fer públiques les recerques arqueològiques de la tomba d'aquest il·lustre rei macedoni. Vegeu <https://ca.wikipedia.org/wiki/Gran_T%C3%BAmul_de_Vergina>.

88. BANKSTON (2014), capítol 4.

89. Vegeu el text A.11.1$c_1$, a PLA (2016$b$), p. 575.

no qüestiona les zones ombrívoles de les seves gestes, que van durar una dotzena d'anys.[90]

Com ja hem dit, Alexandre, amb vint anys, reprèn el projecte del seu pare. Gràcies a la potència de les falanges macedònies i a les seves capacitats de lideratge —estratègica i tàctica—, convertí Macedònia en el centre no només dels actuals Balcans (en grec, Αἷμος; en llatí, Hæmus)[91] i de Grècia, sinó també de l'immens Imperi aquemènida. De fet, va arribar a la riba de l'Indo. I ho va fer aglutinant els pobles veïns dels voltants del golf de Pel·la sota el ceptre reial que ostentava.

FIGURA 2.5. Mapa de l'Imperi d'Alexandre (336-323 aC)

FIGURA 2.6. Mosaic d'Alexandre pertanyent a la casa del Faune de Pompeia. Museu Nacional de Nàpols

A més, durant la dotzena d'anys de conquestes i expansió, va crear una setantena de ciutats noves, la majoria de les quals van ser batejades amb el nom d'*Alexandria*.

90. L'obra escrita sobre Alexandre és important. Vegeu, per exemple, les «orientacions bibliogràfiques» de BRIANT (1974), p. 137-142. I, sobretot, de LANE FOX (1973).

91. Aquesta paraula utilitzada a Tràcia significa *nevat*. Designa la serralada que travessa Bulgària d'est a oest («Grand Balkan») i que, en búlgar, serbocroat, antic eslau, txec, eslovè, lituà i estonià s'anomena *Stara Planina* ('muntanya vella'). La muntanya Musala —en búlgar, Mусала, que ve del turc i vol dir 'a prop d'Al·là'— és la més alta de la serralada. Es troba prop de Sofia i fa 2.925 metres. La segueix l'Olimp, al nord de Grècia, de 2.919 metres.

La seva gesta fabulosa —amb el dilatat imperi que va bastir i la fama, a voltes romàntica, que va assolir— ha estat narrada moltíssimes vegades i ha fet que, en honor seu, es fessin monedes, mosaics, escultures i bustos, els més notables dels quals són, potser, l'estàtua de Tessalònica, el mosaic de la seva lluita contra Darios III en la batalla d'Issos i la discutida Gran Tomba d'Amfípolis, de la qual ofereix una descripció molt acurada Mary Renault (B.3*d*, pàgines 178-179).

Però, malgrat la importància de la gesta, solament disposem de cinc textos clàssics que parlin d'Alexandre el Gran i n'analitzin la seva complexa vida. En grec: Diodor de Sicília, Plutarc i Arrià. En llatí: Quint Curci i Justí.[92] En podem trobar una síntesi intel·ligent en el llibret de Pierre Briant.[93]

Un resum dels dilemes que intenta resoldre Briant el trobem en aquest text:

> Aquest aspecte [la conquesta mateixa i el desenvolupament econòmic subsegüent] de les conquestes d'Alexandre ens submergeix, necessàriament, en una certa perplexitat, deguda a la complexitat que suposa copsar-ne el pensament i les reflexions (les que realment va tenir o les que va poder tenir). En el fons, la resposta a la pregunta es troba vinculada, si més no en part, a la imatge que de la seva conquesta predomini: Alexandre va ser un *constructor* o un *depredador*? La creació d'un imperi sobre les cendres encara calentes de l'herència aquemènida l'hem de considerar una simple espoliació o una construcció perdurable? [...] [Hem de considerar Alexandre] un simple aventurer i reduir la seva acció al present immediat, o l'hem de reconèixer com un autèntic fundador d'imperis que somiava el destí de tot allò que creava, utilitzant i, alhora, superant l'herència aquemènida?[94]

92. Arrià (1884) i (1893); Diodor de Sicília (1976); Plutarc (1926-1946), volum IX (1942), p. 3-80; Quint Curci (1794), i Justí (2003).
93. Briant (1974).
94. Briant (1974), edició castellana, p. 84-85.

Ras i curt, seguia simplement l'objectiu del seu pare, Filip II, amb la guerra de les represàlies, o tenia un objectiu molt més ambiciós, la guerra de l'alliberament grec?, segons la dualitat que suggereix Pierre Briant.

Sigui quina sigui la conclusió que adoptem, que lluny es troba Alexandre dels herois de la Guerra de Troia! (B.3*e* i *f*, pàgines 179-179), com ha evolucionat la manera d'entendre el fet de «ser grec»! El macedoni es mou entre l'afany de conquesta —tan propi dels herois clàssics— i l'afany de construir quelcom nou, un nou esdevenidor. Per això, a més de les victòries estrictes obtingudes al camp de batalla, amb un caràcter simultani, indissociable i imprescindible, li calen, d'una manera completament nova, tota mena de gestos simbòlics (B.3$g_{1.1}$, $g_{1.2}$ i $g_2$, pàgina 180).

És precisament en aquest context que comença el segle III aC i l'empremta científica i matemàtica grega.

## 2.2 L'herència política d'Alexandre: els diàdocs

La gesta d'Alexandre va ser intensa, grandiosa i, alhora, breu. I, per discutible que sigui, pretenia fondre la cultura oriental i la grega. Tanmateix, després de la seva mort, esdevinguda el 10 de juny del 323 aC, a l'edat de gairebé trenta-tres anys,[95] l'imperi que havia reunit —la seva herència— es va repartir entre els seus generals (els diàdocs, *διάδοχοι*), que van formar els diversos reialmes i les dinasties d'allò que es coneix com el *període hellenístic*.[96]

Els *diàdocs* eren els generals d'Alexandre el Gran que, després de la seva mort, es van repartir l'imperi, el poder i l'hege-

95. Recordem que havia nascut el 20 de juliol del 356 aC.

96. Vegeu Pla (2016*b*), taula 1.9, p. 44-45. I, més detallats, Cloché (1959) i Hérault (2010).

monia. Els conflictes entre ells es van prolongar fins a la generació següent —els fills dels diàdocs serien anomenats *epígons* (ἐπίγονοι). Aquest període successori, anomenat *dels diàdocs*, va durar trenta anys i va comportar nombroses guerres (*Πόλεμος των Διαδόχων*).

No pretenem pas fer una exposició detallada de les lluites que van tenir lloc entre els successors del gran general macedoni. Solament resumirem, en una síntesi molt escarida, els esdeveniments d'aquest període macedònic (taula 2.1).[97]

FIGURA 2.7. Ptolemeu I Soter (Πτολεμαῖος Σωτήρ) (367-282 aC)

A la mort d'Alexandre el Gran, Perdicàs († 320 aC) queda com a regent (321-320 aC) i nomena governadors —o sàtrapes (*σατράπης*)—[98] de l'Imperi alexandrí els generals que li han estat fidels. Així, el general Antípater esdevé el sàtrapa de Macedònia i Grècia; Antígon, de Frígia i de les veïnes Lícia i Pamfília (a l'Àsia Menor); Ptolemeu I, d'Egipte, i Lisímac, de Tràcia; entre d'altres.

Després de sis guerres i moltes disputes, el repartiment va quedar definitivament fixat de la manera següent: Àsia per a Antígon el Borni, Tràcia i Àsia Menor per a Lisímac, Grècia i Macedònia per a Cassandre, Egipte per a Ptolemeu I Soter, i Babilònia i Síria per a Seleuc.[99]

97. Vegeu les notes de la sinopsi de PLA (2016*b*), p. 44-45.

98. És una paraula que deriva del terme del persa antic *xšaϑrapā*, que significa 'protector de la terra, del país'.

99. Per a més informació: clàssic, ARRIÀ (1884), capítols 34 a 38, i, modern, CHAMOUX (1981). En línia a <https://ca.wikipedia.org/wiki/Diàdocs> i <https://www.livius.org/articles/concept/diadochi/>.

TAULA 2.1. *Filip II de Macedònia, Alexandre el Gran i els diàdocs*

| *Període* | *Gesta* |
|---|---|
| 358-336 aC | S'instaura el regne de Filip II de Macedònia. |
| 338 aC | La batalla de Queronea permet a Filip II assegurar-se el control de la Grècia continental. |
| 336 aC | Comença l'Imperi d'Alexandre el Gran. |
| 334 aC | Alexandre envaeix l'Imperi persa, governat per la dinastia aquemènida, i el venç en la batalla de Grànic, indret proper als Dardanels. |
| 333 aC | Alexandre derrota Darios III en la batalla d'Issos. |
| 332 aC | Té lloc el setge de Tir. Alexandre conquereix Egipte. |
| 331 aC | Derrota definitiva i final de Darios III en la batalla de Gaugamela. L'any següent l'aquemènida es mor. |
| 330-324 aC | Alexandre s'endinsa en la província persa i envaeix l'Índia. |
| 326 aC | Guanya una batalla èpica, a la riba del riu Hidaspes, contra un reietó local, Poros, que controla la regió del Panjab (B.3*h*, pàgina 181). És una victòria tan costosa que l'exèrcit macedoni li demana no penetrar més a l'Índia i tornar a casa. |
| 323 aC | El 10 de juny Alexandre es mor inesperadament. |
| 323-275 aC | S'inicia la guerra dels diàdocs —de fet, les sis guerres: 322-320 aC, 319-315 aC, 314-311 aC, 308-301 aC, 298-285 aC i 285-281 aC. En el període que va del 280 al 275 aC la situació s'estabilitza. |

## 2.3 El renaixement cultural grec a Egipte

Per començar, volem posar en relleu que a Egipte i, en concret, a la ciutat mediterrània d'Alexandria —convertida en un centre comercial, amb un port cosmopolita i el far, una de les set meravelles del món antic, com a guia i símbol de puixança —, es va crear el que podem considerar l'*Acadèmia d'Alexandria*, amb el museu i la biblioteca.

### 2.3.1 El far d'Alexandria, una de les set meravelles del món antic

El rei Ptolemeu I Soter va decidir fer de la ciutat d'Alexandria —fundada per Alexandre el Gran entre els anys 332 i 331 aC— una ciutat de primer ordre, tant en l'àmbit comercial com en el científic. I, efectivament, a partir del segle III aC fins a la seva caiguda en mans de l'Imperi romà (segle I dC), va ser el primer port i un dels grans centres culturals de la conca mediterrània. El far (*φάρος*), el museu (*μουσείον*) i l'enorme biblioteca (*βιβλιοθήκη*) són senyals indiscutibles d'aquesta puixança política, comercial i cultural.

#### 2.3.1*a* Les set meravelles del món clàssic

Recordem, encara que només sigui de passada, que les set meravelles del món antic s'apleguen a l'entorn de la mar Mediterrània. Són:

1) La piràmide de Gizeh, a Mèmfis, Egipte (∼2560 aC, dinastia IV), l'única de les set meravelles que es conserva actualment i que es coneix amb el nom de *piràmide de Kheops*.

2) Els jardins penjants de Babilònia (600 aC), anomenats també els *jardins de Semíramis*, a Mesopotàmia (ara Iraq) durant el regnat de Nabucodonosor II.

3) El temple d'Àrtemis a Efes (ara Turquia), edificat durant la dinastia aquemènida de l'Imperi persa (∼550 aC).

4) L'estàtua de Zeus a Olímpia, construïda per Fídies durant el regnat de Pèricles (∼435 aC).

5) La tomba de Mausol o Mausoleu d'Halicarnàs,[100] edifici sepulcral construït a Halicarnàs (ara Bodrum, Turquia) per a Mausol, un sàtrapa de Cària, a l'Imperi persa (353-350 aC).

100. La paraula grega *μαυσωλείο* va donar nom als mausoleus (en grec, *μαυσωλείον*; en llatí, *mausoleum*) i va servir per a referir-se a les tombes grans. Inicialment, significava 'dedicat a Mausol' (*Μαυσολ μειον*).

6) El colós de Rodes, estàtua del déu Hèlios construïda per Cares de Lindos a l'illa de Rodes, al segle III aC.

7) El far d'Alexandria o torre de Faros.[101]


FIGURA 2.8. Les set meravelles del món antic

La llista de les set meravelles del món —que veiem representades de dalt a baix i d'esquerra a dreta, d'acord amb l'enumeració anterior, a la figura 2.8—[102] l'establí Antípater de Sidó amb les paraules recollides a B.4*a* (pàgina 182).

101. Per a una informació més detallada, CLAYTON i PRICE (1990).

102. És obra de l'artista holandès Marten Heemskerk (segle XVI).

### 2.3.1*b* El far d'Alexandria

El far d'Alexandria (*ὁ φάρος τῆς Ἀλεξανρείας*), una de les set meravelles del món antic, se'l coneix també com a *torre de Faros* perquè es va bastir a l'illa d'aquest nom.[103]

FIGURA 2.9. Reconstrucció gràfica del far segons un estudi realitzat el 2006

Va ser construït al segle III aC per iniciativa de Ptolemeu I Soter amb un objectiu doble: que es veiés de ben lluny[104] i que servís de guia als vaixells que anaven cap al port d'Alexandria, ja que desitjava convertir-lo en «el port» de la Mediterrània i en un símbol de la puixança de l'Egipte ptolemaic. El seu fill Ptolemeu II Filadelf va culminar el projecte. Les obres les va dirigir, probablement, Sòstrat de Cnidos, encara que hi ha qui no descarta que ho fes el mateix Euclides —o un deixeble seu sota la seva direcció—, ja que, en aquella època, l'insigne matemàtic vivia a Alexandria.[105] El moment de l'inici de la construcció és incert —entre els anys 299 i 289 aC—, però se sap que la realització va durar una quinzena d'anys.

Si descomptem la piràmide de Kheops, el far d'Alexandria és la meravella que va perdurar més, ja que va estar en funcionament fins al 1303, moment en el qual el van anorrear dos terratrèmols.[106]

103. El nom de l'illa ha servit per a referir-se als ginys lluminosos de la costa, els fars.

104. Sembla que es veia a més de cinquanta quilòmetres.

105. Vegeu l'afirmació d'Isabelle Hairy, a ARNAUD (2011), p. 58. I, per a més informació, HAIRY (2006).

106. Per a una informació més detallada i completa, EMPEREUR (2004).

Es creu que mesurava 134 metres d'altitud. En la seva època va ser una de les estructures més altes aixecades per l'home.[107]

## 2.3.2 La Biblioteca d'Alexandria

La construcció d'Alexandria —fundada per Alexandre el Gran— es va iniciar entre el 332 i el 321 aC. Ben aviat, la ciutat va atreure moltes persones, de manera que, al segle III aC, ja acollia cinc-cents mil habitants.

La cultura i l'art hi van ser promoguts pel ministre Demetri Falèron. I Estrató de Làmpsac hi va projectar un museu —*palau de les muses*— que incloïa centres d'estudi i de recerca, i una biblioteca (*ὀ βιβλιοθήκη τῆς Ἀλεξανδρείας*) dotada inicialment de quatre-cents mil volums, provinents, la majoria, del Liceu aristotèlic.[108] Segons Galè, l'objectiu del complex era aplegar tot el saber en un mateix indret (B.4*b*, pàgina 182). I va començar a funcionar durant el regnat de Ptolemeu II Filadelf, que va seguir els anhels del seu antecessor i va arribar a aplegar cinc-cents mil volums.[109]

Segons la *Geografia* d'Estrabó (*Γεογραφια*),[110] a diferència de les actuals, la Biblioteca d'Alexandria guardava els llibres en

107. Recordem que la piràmide de Kheops, amb 146,61 metres d'alçària, seria encara més alta.

108. Per a una exposició acurada però succinta, amb una descripció breu dels set primers bibliotecaris, SARTON (1952*b*), edició castellana, volum III, capítol X, p. 147-164. Per a un estudi minuciós, PARSON (1952).

109. COLLINS (2000), p. 110-114. En línia a <https://ca.wikipedia.org/wiki/Biblioteca_d%27Alexandria>. També sabem que, en temps de Juli Cèsar, s'hi havien aplegat set-cents mil volums, i nou-cents mil quan Marc Antoni en va regalar dos-cents mil a Cleòpatra provinents de la Biblioteca de Pèrgam. MACLEOD (2000).

110. També parla del museu, del qual diu que constava d'una «exedra» (*εξεδρα*) —absis amb seients a la part interior—, d'una sala àmplia en la qual menjaven els estudiosos i els empleats, i d'una biblioteca —d'una *gran* biblioteca—, que era considerada un element indispensable del museu. ESTRABÓ (1867), llibre XVII, capítol 1, § 8, p. 349-350.

nínxols oberts als murs gruixuts dels porxos —pòrtics coberts amb columnes. Cal tenir present, però, que els volums eren, en general, papirs enrotllats. Els lectors consultaven les obres sota la protecció dels porxos o en les zones ombrívoles dels jardins.[111]

TAULA 2.2. *Els vuit primers directors de la Biblioteca alexandrina*

| *Nom* | *Període* | *Aportacions rellevants* |
|---|---|---|
| Demetri de Falèron | 297-282 aC | Va projectar el museu i va ser el primer director de la Biblioteca.[112] |
| Zenòdot d'Efes | 282-260 aC | Va establir el sistema per a guardar les existències de la Biblioteca. Hom creu que es basava en un sistema de classificació en categories temàtiques que tenien assignada una habitació i un o diversos bucs de la paret. És possible que ja s'hi usés l'ordre alfabètic per autors. Tot això, però, no són més que conjectures.[113] |
| Cal·límac de Cirene | 260-240 aC | Va idear les taules «pinaques» ($\pi\acute{\iota}\nu\alpha\kappa\epsilon\varsigma$), un catàleg de «taules de persones eminents en cada una de les branques de l'aprenentatge, amb una llista dels seus escrits». S'estima que aquest índex constava de més de cent vint llibres.[114] |
| Apol·loni de Rodes | 240-230 aC | Era natural de Naucratis, a Egipte. La seva direcció al capdavant de la Biblioteca va durar poc perquè es va traslladar a Rodes. És molt conegut pel poema èpic *Els Argonautes*.[115] |

111. CANFORA (1986), edició francesa, p. 101.

112. Clàssic, PLUTARC (1926-1946), capítol V [75-85], edició catalana, volum I, p. 310-313. Actual, FORTENBAUGH i SCHÜTRUMPF (2000).

113. PFEIFFER (1968), p. 105-122.

114. CASSON (2001), p. 39-40.

115. SMITH (1844*b*). A voltes, se'l confon amb Andrònic de Rodes, filòsof peripatètic considerat un dels successors d'Aristòtil i cap de l'escola peripatètica de Roma (58 aC). Aquest filòsof peripatètic va aplegar textos dispersos d'Aristòtil sota el nom de «Metafísica» ($\mu\epsilon\tau\alpha\varphi\upsilon\sigma\iota\kappa\acute{\eta}$). La raó d'aquesta denominació és que, a la biblioteca, aquests escrits es trobaven col·locats més enllà ($\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}$) —o darrere— dels llibres de la *Física*

TAULA 2.2. *Els vuit primers directors de la Biblioteca alexandrina* (Continuació)

| *Nom* | *Període* | *Aportacions rellevants* |
|---|---|---|
| Eratòstenes de Cirene | 230-195 aC | Es va preocupar de fer un registre significatiu de les obres matemàtiques per a l'ús dels matemàtics del museu. Va organitzar les dades dels registres sobre la Mediterrània que havia aplegat el navegant Píteas i va fer el primer mapa del món conegut basant-se en tot allò que creia que s'havia constatat i contrastat. La seva actuació va fer augmentar significativament el nombre de volums.[116] |
| Aristòfanes de Bizanci | 195-180 aC | Va fer aportacions notables a l'edició crítica de textos, la filologia, la gramàtica i la lexicografia.[117] |
| Apol·loni d'Alexandria | 180-160 aC | Va ser un gran estudiós i coneixedor de l'obra d'Homer, i va escriure una quantitat notable de comentaris crítics. Se'l coneix com a Apol·loni Eidògraf (Ειδογράφος).[118] |
| Aristarc de Samotràcia | 160-131 aC | Va establir el principi bàsic del mètode *historicogramatical*, segons el qual la millor guia per a l'ús i la comprensió dels textos d'un autor és el «corpus» de tots els seus escrits, de manera que, sempre que sigui possible, les dificultats de comprensió que planteja la lectura d'un text concret s'han d'aclarir recorrent a altres textos i passatges del mateix autor.[119] |

És un fet consensuat que, abans d'Ambròs de Milà (segle IV dC), la lectura es feia en veu alta. Per això la lectura silenciosa del milanès va sorprendre Agustí d'Hipona, que en va deixar constància en les *Confessions* (B.4*c*, pàgina 183).

(*φυσικά*). Vegeu MORENO VILLA (2003), p. 456. Andrònic també va fer l'edició crítica de Teofrast.

116. PADILLA SEGURA (2000), p. 54-55.
117. PLATÓ (1995*a*), p. 461.
118. MARTÍNEZ PÉREZ (2009), p. 9.
119. FERRARIS (2002), p. 16.

La traducció en grec de totes les obres que aplegava la biblioteca constituïa un treball colossal que necessitava intel·lectuals i savis de cada un dels països estrangers que coneguessin la pròpia llengua i el grec. Aquesta tasca va ser fomentada i dirigida pels directors —els bibliotecaris— de la biblioteca (taula 2.2),[120] que van tenir cura de recopilar i editar les obres clàssiques de la literatura grega, amb una atenció especial als poemes homèrics. Les edicions havien de ser tan fidels a l'original com fos possible. Per això, els versos amb una autenticitat dubtosa es marcaven amb senyals semblants als símbols † i ‡.

FIGURA 2.10. Evocació de la Biblioteca d'Alexandria basada en evidències arqueològiques

Quan, per voluntat expressa de Ptolemeu II Filadelf (281 aC), es va decidir dur a terme la traducció del Pentateuc hebreu al grec, va tenir lloc un fet paradigmàtic: la concurrència dels «Setanta». La «llegenda dels Setanta» explica que, per

120. L'estructura de la taula l'hem manllevada de la pàgina web <https://es.wikipedia.org/wiki/Biblioteca_de_Alejandria>, que es basa en la informació continguda en un papir d'Oxirrinc, X, 1241. <https://archive.org/stream/oxyrhynchuspapyr10gren#page/102/mode/2up>. La troballa arqueològica dels papirs d'Oxirrinc, feta pels arqueòlegs britànics Bernard Pyne Grenfell i Arthur Surridge Hunt, l'any 1896, és realment important. Consta de milers de papirs, amb poemes de Píndar, Safo, Alceu i Alcman; fragments d'Íbic, Corinna de Tebes, Eurípides, Menandre d'Atenes i Sòfocles; una *Vida d'Eurípides* de Sàtir [EURÍPIDES (1966), volum I, p. 91-100]; fragments dels *Elements* d'Euclides; un epítom dels llibres perduts de Tit Livi; una obra històrica anònima titulada *Hellenica Oxy- rhynchia* i el papir P52; i fragments de l'Antic Testament, el manuscrit més antic del Nou Testament i l'Evangeli apòcrif de sant Tomàs. Fins ara, se n'han publicat setanta-quatre volums, que són essencials per a l'estudi d'Egipte entre els segles IV aC i VII dC.

realitzar aquesta traducció, es van aplegar a l'illa de Faros sis representants de cada tribu jueva, setanta-dos rabins, i que la van dur a bon port en setanta-dos dies.[121]

El darrer bibliotecari de la institució va ser Teó d'Alexandria, pare d'Hipàtia, la mort de la qual s'ha convertit en el símbol del final d'un dels valors del museu i la biblioteca alexandrins: la defensa del que anomenem, atesa l'evolució històrica, el *paganisme* —potser seria millor dir-ne el «classicisme grec»—, com sintetitza Gérard de Nerval en la primera carta (a Angèlica) de *Les filles du feu* (1854):

> La Biblioteca d'Alexandria i el serapèum (grec: *σεραπεῖον*; llatí: *serapeum*)[122] —la casa dels so- cors— que en formava part havien estat incendiats i destruïts al segle IV pels cristians que, a més, havien esquarterat la cèlebre Hipàtia, filòsofa pitagòrica, enmig del carrer.[123]

Amb aquest final tan traumàtic, tanmateix, s'inicia un nou període: el del pensament occidental basat en les cultures grega, cristiana i islàmica. Les fonts que ens permeten conèixer les causes de l'anorreament de la biblioteca són molt limitades i, de vegades, les hipòtesis que es plantegen són contradictòries. Alguns dels fets —potser simples suposicions— que van contribuir a la seva debilitació progressiva i a la seva destrucció final els podem sintetitzar en els ítems següents:[124]

— La guerra civil romana entre Juli Cèsar i Pompeu Magne (∼50 aC).

— Les massacres d'Alexandria el 215 dC, sota les ordres de l'emperador Caracal·la, com a represàlia perquè la pobla-

121. COLLINS (2000), p. 115-181, respon la pregunta: «Qui desitjava una traducció del Pentateuc al grec?»

122. En la segona entrada de la paraula *serapèum*: «Temple de Serapis, a Grècia». DIEC (2007). Recordem que el serapèum d'Alexandria era un santuari monumental dedicat al culte de Serapis, fundat l'any 300 aC per Ptolemeu I Soter. MCKENZIE (2007), p. 387.

123. NERVAL (1854), edició electrònica, p. 9.

124. CASANOVA (1923), PHILLIPS (2010) i TILLIER (2015).

ció havia satiritzat les explicacions sobre la mort del seu germà.

— Les lluites entre l'emperador Luci Domici Aurelià i Zenòbia, reina de Palmira (segle III dC).

— Els conflictes polítics i religiosos entre el paganisme i el cristianisme (segles IV i V dC) provocats per l'edicte de Teodosi (391 dC).

— Els estralls produïts per la conquesta àrab (642 dC).

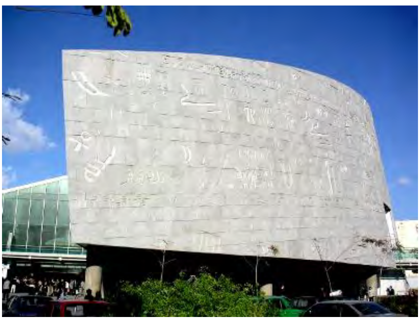


FIGURA 2.11. Visió de l'exterior de l'actual Biblioteca d'Alexandria

En tot cas, a mitjan segle VII de la nostra era, la Biblioteca d'Alexandria era només un record, una runa potser cobejada per alguns erudits i estudiosos. Moltíssims dels tresors documentals que havia guardat durant segles s'havien perdut per sempre. Actualment, els continguts de moltes d'aquestes obres són objecte de simples especulacions i els d'altres ens són totalment desconeguts.[125]

125. Dins el marc d'un projecte conjunt de la UNESCO i d'Egipte, la «nova» biblioteca del món mediterrani es va construir damunt les runes de l'antic edifici ptolemaic. Havia d'aplegar un cabal de prop de cinc milions de volums. El president Hosni Mubarak va posar la primera pedra de l'edifici el 26 de juny de 1988 i el setembre del mateix any es va convocar un concurs de projectes arquitectònics adreçat als estats del món. Hi varen participar quatre-cents arquitectes de setanta-set països. El jurat va haver de triar entre els més grans arquitectes i bibliotecaris d'Alemanya, Suïssa, Itàlia, França, el Regne Unit, Noruega, els Estats Units, Mèxic, el Japó, l'Índia i Egipte. El guanyador del primer premi, de 600.000 dòlars, va ser l'estudi d'arquitectura noruec Snøhetta. La firma Snøhetta/Hamza va signar el contracte de concepció i supervisió de l'execució del projecte l'octubre de 1993. Finalment, el 16 d'octubre de 2002, el president de la República àrab d'Egipte va inaugurar la «nova» Biblioteca d'Alexandria.

### 2.3.3 El museu d'Alexandria

La biblioteca formava part del museu d'Alexandria (*ὁ μουσεῖον τῆς Ἀλεξανδρείας*), probablement la institució d'estudis més ambiciosa projectada fins aleshores. Constava d'habitacions per a l'anàlisi de l'astronomia i estava dotada d'un observatori. Disposava de sales de dissecció per a la pràctica de l'anatomia, i tenia jardins botànics i un zoo amb animals exòtics per a l'aproximació als éssers vius. Tampoc no hi mancava l'aprenentatge de la gramàtica, la retòrica, la lògica —les matèries del trivi—, i la filosofia. Acollia erudits i estudiosos d'arreu i hi van pertànyer els pares de la geometria, l'aritmètica, l'astronomia, la música —les del quadrivi— la física, l'enginyeria, la geografia, la psicologia i la medicina.

Un dels temes d'estudi de la institució era el Cosmos (*Κόσμος*) en el sentit grec, que ja vam analitzar àmpliament: l'ordre de l'univers, en oposició al Caos (*Χάος*), és un principi sense forma existent des de sempre i que va originar els primers déus i totes les coses.[126] El Caos, element comú dels diferents mites grecs, en canvi, era concebut com una barreja desordenada de tots els elements de l'univers, que, segons els grecs antics, eren la terra (*γῆ*), l'aire (*ἀήρ*), l'aigua (*ὕδωρ*) i el foc (*πῦρ*).[127]

Entre els moltíssims erudits que hi van treballar trobem, a més dels bibliotecaris ja esmentats, Dionís Trax (o de Tràcia) (gramàtic notable), Heròfil de Calcedònia (metge), Erasístrat (metge i anatomista), Edèsia (filòsofa), Apol·loni de Rodes (poeta), Timocaris (astrònom i filòsof), Arístil·los d'Alexandria (astrònom) i Galè (metge i anatomista).

El museu és important per a l'objectiu d'aquesta part de la història de la matemàtica grega: l'anàlisi de les aportacions dels matemàtics del segle III aC —geòmetres, aritmètics i astrò-

126. PLA (2016*b*).

127. Recordem que Plató —vegeu l'ítem *g* dels resultats matemàtics que se li atribueixen [PLA (2016*b*), p. 302]— hi afegeix l'èter (*αἰθήρ*), quinta essència, continent dels altres quatre.

noms—, és a dir, Eudem de Rodes, Euclides, Aristarc, Arquimedes, Conó, Nicomedes, Eratòstenes, Apol·loni de Perge, Dionísodor, Diocles i Dositeu, perquè, com veurem, molts d'ells —Euclides, Aristarc, Arquimedes, Conó, Eratòstenes, Apol·loni i Dositeu— van estar-hi vinculats. Per raons metodològiques,[128] hi afegim Aristeu el Vell. En segles posteriors encara n'hi va haver d'altres, com ara Hiparc de Nicea, Hipsicles, Heró, Menelau, Claudi Ptolemeu, Diofant, Pappos, Teó d'Alexandria, Hipàtia i Procle.[129]

## 2.4 El naixement de l'Imperi romà

Mentre Grècia es desintegra després d'haver assolit una expansió increïble, es consolida allò que, en un futur força proper, esdevindrà l'Imperi romà. No es tracta de fer una exposició detallada d'aquesta consolidació,[130] però tampoc no seria raonable que no introduíssim el moment històric en el qual, entre altres fets, mor Arquimedes.

### 2.4.1 Els inicis de Roma

Segons Marc Terenci Varró, Roma va ser fundada el dia 21 d'abril de l'any 753 aC.[131] I és a partir d'aquesta data fictícia que els romans van comptar els anys. Aquesta convenció requeria una justificació llegendària per a afirmar-ne el caràcter mí-

128. L'evolució de les obres relatives a les còniques té Aristeu entre els seus impulsors.

129. Parson (1952) i Davis (1957).

130. Per a més informació, molt resumida, Pericot i Ballester (1963), i, més extensa, Kovaliov (1948).

131. Potter (2009), p 10. Hi ha, però, autors que fixen altres dates possibles, com podem veure en línia a <https://ca.wikipedia.org/wiki/Hist%C3%B2ria_de_Roma>. Excavacions recents (2014) palesen l'existència de restes arqueològiques —murs, gerres, etc.— del segle IX o principis del VIII aC. També hi ha evidències que els habitants del mont Palatí hi van arribar al segle X aC, segons Hooper (2014). Com a curiositat, podeu consultar l'horòscop de Roma a Grafton i Swerdlow (1986).

tic i sagrat, i, efectivament, coneixem dues narracions de la literatura grecollatina que relaten aquesta fundació: la de Tit Livi, *Des de la fundació de Roma* (*Ab urbe condita*),[132] que descriu la història de Roma del 753 aC al 9 dC, i la de Dionís d'Halicarnàs, *Roma des de l'Antiguitat* (*Ῥωμαϊκὴ Ἀρχαιολογία*).[133]

De fet, Roma s'origina a partir d'assentaments de pastors al mont Palatí, a uns dotze quilòmetres de la mar Tirrena,[134] a la vora sud del Tíber. En un altre dels set turons de Roma, el Quirinal,[135] hi vivia la tribu itàlica dels sabins. En aquella zona, el Tíber fa un gual i això convertia l'indret del centre d'Itàlia en un nus natural de comunicacions.

FIGURA 2.12. La lloba alletant els bessons Ròmul i Rem

No coneixem els orígens dels pobles itàlics, però les seves llengües —sabèl·lic, osc i umbre—, pertanyents al tronc indoeuropeu, es van difondre des de l'est de la península durant la segona meitat del segle XX aC.

A l'obra de Tit Livi s'explica el llinatge mític dels fundadors de la ciutat,[136] els germans bessons Ròmul i Rem,[137] i la manera com van aconseguir sobreviure gràcies a la llet d'una lloba —la

132. LIVI (2002).

133. DIONÍS D'HALICARNÀS (1937).

134. El nom d'aquest mar prové del nom que els grecs donaven als etruscos.

135. El nom de Quirinal prové, molt probablement, de la ciutat sabina de Cures, situada al nord de Roma. Al cim hi havia un temple dedicat al déu Quirí, el déu de la llança —divinitat guerrera semblant a Mart que va ser assimilada a la divinització de Ròmul després de la seva mort. LIVI (2002), I, XVI, edició catalana, volum I, p. 151. La paraula *quirites* significava 'ciutadans guerrers'.

136. Vegeu també el text poètic d'Ovidi (B.5$a_1$, pàgines 183-184).

137. LIVI (2002), volum I, IV [2], edició catalana, p. 133. Plutarc explica l'origen dels noms dels germans (B.5$a_5$, pàgina 188).

bèstia o una prostituta (B.5$a_1$, pàgines 183-184).[138] En arribar a adults, van fundar una ciutat: Roma (B.5$a_2$, $a_3$ i $a_4$, pàgines 184-188), situada al mont Palatí, un dels set famosos turons (figura 2.14, pàgina 47) que es troben a l'est del riu Tíber envoltats per la muralla serviana (figura 2.15, pàgina 49).

FIGURA 2.13. *El rapte de les sabines*, Giambologna (1583)

El destí va fer que Ròmul fos designat el fundador de Roma i que matés Rem, acollint-se a la dita *Insociabile regnum* ('El poder no es reparteix'), quan aquest va gosar endinsar-se a la ciutat travessant les muralles —*pomœrium*— simbòliques que Ròmul dibuixava a terra per indicar que ningú no les podia traspassar sense el seu consentiment (B.5$b_1$ i $b_2$, pàgines 188-191). Aquest fet ha estat interpretat com el símbol de la intransigència altiva de Roma davant qualsevol incursió malèvola.

Aquesta altivesa de Roma, representada en la figura mítica de Ròmul, es palesa també en diversos esdeveniments, com ara el rapte fundacional de Roma, el rapte de les sabines (B.5$c_1$, $c_2$ i $c_3$, pàgines 191 i 196), i la guerra posterior que s'hi va esdevenir. Ròmul es va aliar amb el cap etrusc Celes o Celi Vibenna, que s'havia instal·lat al mont Celi, el qual, segons Varró en *De Lingua latina*,[139] li dona el nom, i es va enfrontar al rei sabí Tit Taci, que volia venjar l'ofensa infringida pels romans en raptar les dones. Davant, però, de les demandes d'elles perquè cedís, ho va fer (B.5$c_4$, pàgina 196). Finalment, doncs, Ròmul va pactar amb els sabins i va compartir el poder amb Tit Taci.

138. Podria haver estat una prostituta que els pastors i vilatans anomenaven *la lloba*, segons Dionís d'Halicarnàs (B.5$a_4$, pàgina 187).

139. VARRÓ (1938), V 41, text anglès, p. 41.

TAULA 2.3. *Els set turons de Roma de nord a sud*[140]

| *Nom català* | *Nom llatí* | *Altura* | *Pics* |
|---|---|---|---|
| Quirinal | Collis Quirinalis | 61 m | Latiaris<br>Sanqualis<br>Salutaris |
| Viminal | Collis Viminalis | 60 m | — |
| Capitoli | Mons Capitolinus | 50 m | Arx<br>Capitolium |
| Esquilí | Mons Esquilinus | 64 m | Cispius<br>Fagutalis<br>Oppius |
| Palatí | Mons Palatinus | 51 m | Germalus<br>Palatium<br>Velia |
| Celi | Mons Cælius | 50 m | Cæliolus |
| Aventí | Mons Aventinus | 47 m | — |

Roma és, doncs, un petit assentament de la comarca del Laci que esdevé, amb el temps, el centre d'un imperi que comprèn tota la Mediterrània. Però, a partir del segle IV dC, sobretot després de la transformació de Bizanci en Constantinoble feta per l'emperador Constantí, perd la capitalitat de l'Imperi.

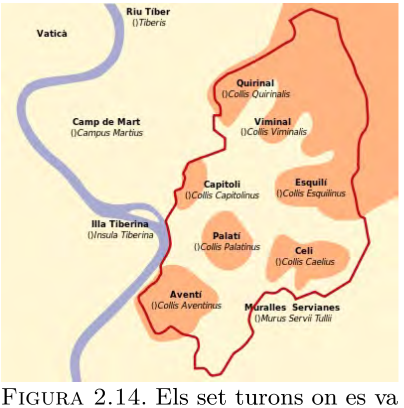



FIGURA 2.14. Els set turons on es va construir Roma i la muralla serviana

Tenim constàncies arqueològiques d'assentaments al Laci a partir del segle VIII aC: els llatins eren a l'oest; els sabins, a la vall superior del Tíber; els

140. En l'antiguitat, els set turons primitius eren: Germalus, Palatium, Velia (pics del mont Palatí), Cispius, Fagutalis, Oppius (pics del mont Esquilí) i Sucusa. Els turons de l'altra banda del Tíber —el Trastevere (*trans Tiberis*), 'més enllà del Tíber'—, com ara el Vaticà (Mons Vaticanus), de 75 metres d'altitud, i el Janícul (Mons Ianiculum), de 82 metres, no es compten entre els set pujols tradicionals I, a més, hi ha el Pincio (Mons Pincius), situat al nord, de 54 metres, entre d'altres.

umbres, al nord-est; els samnites, al sud; els oscs, que tenien com a veïns els etruscos, al nord, i els grecs, que havien establert colònies a Cumes, Nàpols, Tàrent i Sicília, al sud. Per la importància d'aquests enclavaments grecs, els romans van anomenar la regió *Magna Grècia*.

Pels volts del 642 aC, el rei Anc Marci va fer construir el pont Sublici (Pons Sublicius), un viaducte de fusta sobre el Tíber de 105,45 metres de llargada i 20 d'altura, que va unir el Janícul amb l'antiga ciutat de Roma.[141]

### 2.4.2 El domini etrusc

Els etruscos —dits *etrusci* o *tusci* en llatí— havien emigrat de Lídia a Etrúria, al centre d'Itàlia (ara la Toscana), comandats pel príncep Tirrè (B.5$d_1$ i $d_2$, pàgines 196-198). Van influir profundament en la cultura romana, tal com indica l'origen etrusc d'alguns reis mítics de Roma o el fet que, als monuments funeraris etruscos, s'hi poden trobar els prototips de les armes dels gladiadors romans.

A partir de mitjan segle VII aC, els etruscos van iniciar una expansió que els va fer entrar en contacte amb els grecs del sud d'Itàlia —els de la Magna Grècia. Alguns historiadors creuen que, arran d'aquesta expansió, van aconseguir el domini de Roma i tot el Laci. D'entre els set reis mítics de Roma (taula 2.4), val la pena mencionar els tres d'origen etrusc: Tarquini Prisc, Servi Tul·li i Luci Tarquini el Superb.[142]

Tarquini Prisc va fer construir la Cloaca Màxima —una claveguera que drenava el fòrum romà i desembocava al Tíber, una mica més avall del pont Sublici. Feia 600 metres de llargada i 4 de llum, i estava ensorrada uns 6.

141. LIVI (2002), volum I, 33, p. 177, i volum II, X, 1-13. I PLUTARC (1926-1946), volum XIII, IX [7], p. 50, de l'edició catalana.

142. Hom creu que el seu nom fa referència al poble etrusc de Tarquínia.

El seu fill Servi Tul·li va ampliar la ciutat, tancant el Quirinal, el Viminal i l'Esquilí amb una muralla que en duu el nom.

Luci Tarquini el Superb, fill de Tarquini Prisc, va conspirar, amb la filla d'aquest, Túl·lia Minor, per assassinar Servi Tul·li.[143] Un cop rei, el seu govern es va caracteritzar per ser una monarquia autocràtica.[144] Va perseguir els senadors, va oprimir el poble i va afermar l'hegemonia de Roma sobre els altres habitants del Laci.


FIGURA 2.15. La muralla de Servi Tul·li

Tots aquests esdeveniments històrics i arquitectònics testimonien vivament la transformació dels etruscos, una comunitat dedicada a la pastura, en una comunitat urbana.

TAULA 2.4. *Els set reis de Roma*

| *Nom* | *Anys* | *Nom* | *Anys* |
|---|---|---|---|
| *sabins* | | *etruscos* | |
| Ròmul | 753-716 aC | Tarquini Prisc | 616-579 aC |
| ? | 716-715 aC | Servi Tul·li | 578-535 aC |
| Numa Pompili | 715-673 aC | Luci Tarquini, el Superb | 534-509 aC |
| Tul·lus Hostili | 673-642 aC | | |
| Anc Marci | 642-617 aC | | |

La cultura etrusca també va influir notablement en la religió romana: els déus de la tríada capitolina[145] —Júpiter, Juno i Minerva— tenen el seu origen en les seves divinitats —Tínia, Uni i Menrva. I rebé dels grecs el seu alfabet, que va occidentalitzar.

Tanmateix, la puixança etrusca va durar ben poc. A finals del segle VI aC, van entrar en crisi i Roma i altres pobles ho van

143. LIVI (2002), I, XLVI i XLVII, edició catalana, volum I, p. 195-198.

144. LIVI (2002), I, XLIX a L, edició catalana, p. 200-204.

145. El Capitoli, a més de ser el nom d'un dels turons de Roma, era un temple dedicat a la tríada de divinitats romanes.

aprofitar per alliberar-se'n. En la història de Roma, la fi del domini etrusc va associada a l'abolició de la monarquia i la instauració de la República Romana (*Liber Res Publica Romana*). En aquest moment s'inicia, doncs, un període de gran importància per a la ciutat que acomboia el bressol de l'Imperi romà.

### 2.4.3 La República Romana

Seguint la petja dels historiadors, podem establir diversos períodes dins d'aquesta etapa de la història:

— República Romana primerenca (510-275 aC).

— República Romana mitjana (270-150 aC).

  – Primera Guerra Púnica (262-241 aC).
  – Segona Guerra Púnica (218-202 aC).
  – Tercera Guerra Púnica (149-146 aC).

— República Romana tardana (147-27 aC).

#### 2.4.3*a* La República Romana primerenca

Abans que l'Imperi romà es consolidi —cosa que va tenir lloc a finals del segle I aC—, Roma assoleix l'estatus de república. A principis del segle V aC, s'uneix a les ciutats llatines per defensar-se dels atacs dels sabins. I, després de la victòria aconseguida a la batalla del llac Règil (496 aC),[146] recupera l'hegemonia sobre tots els pobles de la zona que havia perdut amb el declivi de la monarquia. Aquesta supremacia, aconseguida amb vessament de sang, es reforça a principis del segle IV aC, quan el poder etrusc queda reduït a Etrúria i Roma domina el Laci.

L'any 387 aC, Roma és saquejada i incendiada pels sènons ($\sigma\acute{\eta}\nu\omega\epsilon\varsigma$) —un poble cèltic gal—, dirigits pel cabdill Brenne (Brennus), que també havia envaït i conquerit Etrúria després de la derrota dels romans a la batalla de l'Àl·lia (Clades Allien-

146. Livi (2002), llibre II, XX [1]-[13], edició catalana, volum II, p. 44-46.

sis). Només se'n salva el Capitoli. Però el domini gal dura ben poc, ja que el cònsol[147] Marc Furi Camil derrota Brenne a Túsculum. Això comporta la conquesta romana d'Etrúria i altres territoris gals del nord.[148]

Tit Livi explica que, per tal de venjar l'ofensa, la cúria romana va decidir oferir la dictadura a Camil, que tenia prestigi com a militar expert. Ell vivia exiliat a Ardea i, per tal d'acceptar l'oferiment, va exigir que se'l nomenés mitjançant una «llei curiada» (*lex curiata*).[149] Volia que fos el poble qui ratifiqués davant la cúria el càrrec que li oferien. I així va ser.

Camil va aplegar les tropes romanes disperses i va marxar cap a Roma. Segons la tradició, va sorprendre els gals desprevinguts,[150] els va derrotar estrepitosament i va entrar a la ciutat triomfant. Els ciutadans l'aclamaven com a «nou Ròmul» (*alter*

147. El cònsol era el magistrat suprem de la República Romana. El seu càrrec era anual i col·legiat, dos cada any. Els estava encomanada la direcció de l'Estat i, especialment, de l'exèrcit en campanya. Eren magistrats amb poder executiu (*imperium*) i epònims —*ἐπώνυμος*—, que donaven nom a l'any.

148. Livi (2002), llibre V, § 34-49. Plutarc (1926-1946), edició catalana, volum I, p. 109-152.

149. La *llei curiada* era el nom general donat a les lleis romanes votades pels comicis —assembleàries— a les cúries. Recordem que, a l'antiga Roma, la cúria era l'edifici del Fòrum on tenien lloc les assemblees civils, especialment les del Senat i les de caràcter religiós. Ara bé, atès que el Senat es reunia sempre en una cúria, fora de Roma no s'hi referien com a *Senat de Roma*, sinó com a *Cúria de Roma*.

150. Tit Livi explica l'anècdota apòcrifa següent, probablement amb la intenció de retornar el prestigi a Roma: Brenne havia trucat les peses amb les quals mesurava el rescat que s'havia fixat per a la ciutat i, enmig de la discussió, va llançar l'espasa contra les balances i va exclamar: «Ai dels vençuts» (*Væ victis!*). Per la seva banda, Camil va al·legar que, atès que era dictador, cap acord no era vàlid sense la seva aquiescència i que, per tant, no havia de pagar cap mena de rescat. I va respondre a Brenne amb una altra frase cèlebre: «És amb el ferro i no pas amb l'or que s'allibera la pàtria» (*Non auro sed ferro liberanda est patria*). Livi (2002), llibre V, § 48(8)-49(4).

*Romulus*), «pare de la pàtria» (*pater patriæ*) i «segon fundador de la ciutat» (*conditor alter urbis*).[151]

FIGURA 2.16. L'extensió de la República Romana abans de l'Imperi

Aleshores, pels volts del 345 aC, Roma va dirigir el seu expansionisme cap al sud, contra els pobles llatins. L'enemic principal de la zona eren els samnites, que van vèncer els romans a la batalla de les Forques Caudines (Furculæ Caudinæ) (321 aC). Malgrat algunes derrotes com aquesta, a principis del segle III aC, els romans van acabar sotmetent les ciutats gregues del sud i van sotmetre més de la meitat de la península Itàlica. Tanmateix, no va aconseguir estendre el seu domini fora d'Itàlia fins després de les guerres púniques.

Al segle II aC, la població de Roma va créixer notablement, ja que s'hi van establir molts pagesos d'altres contrades d'Itàlia arruïnats per la competència dels latifundis romans, en els quals els grans terratinents, arrelats a Roma, feien treballar estols d'esclaus. L'any 146 aC, els romans van saquejar Corint i van destruir Cartago, gestes que els van permetre sotmetre Grècia i el nord d'Àfrica. Roma va esdevenir, en aquell moment, la ciu-

151. Livi (2002), llibre V, § 49(7).

tat més important de la Mediterrània occidental. A partir d'aleshores, molts ciutadans romans van voler afirmar el seu prestigi erigint monuments i obres públiques a la ciutat. Així, al segle I aC, Gneu Pompeu Magne va promoure el Teatre de Pompeu al Camp de Mart, un terreny situat al marge esquerre del riu Tíber, originàriament reservat a les maniobres militars i a les reunions dels centurions. Va ser el primer teatre permanent construït a la ciutat. Després, Juli Cèsar va dissenyar un projecte de construccions ambiciós, entre les quals destaquen la Basílica Júlia (Basilica Iulia), començada el 54 aC, i un nou edifici per al Senat (Senatus Romanus). Però tot això no pertany al segle III aC, que és el segle en el qual es van desenvolupar les grans obres matemàtiques que són l'objecte d'estudi dels volums de *Grècia III* d'aquesta sèrie de publicacions.

En definitiva, doncs, la República de Roma va néixer amb l'expulsió de l'últim monarca el 510 aC i va acabar amb la subversió civil i militar, mitjançant guerres civils, i la instauració de l'Imperi romà. La data precisa de la fi de la República és interpretable. Algunes propostes són la designació de Juli Cèsar com a dictador vitalici (44 aC), la batalla d'Àctium (bellum Actium, el 2 de setembre del 31 aC) i l'atorgament del títol d'August a Octavi per part del Senat Romà (16 de gener del 27 aC).

### 2.4.3*b* Una notícia breu sobre les guerres púniques

Les guerres púniques[152] s'inicien justament quan l'Imperi d'Alexandre s'ha dividit en trossos —Egipte, Macedònia, Síria, Tràcia. . . —, un cop acabades les disputes entre els diàdocs. Inicialment, aquestes batalles no van afectar l'herència alexandrina, situada a la part oriental de la Mediterrània.

Però, a partir de mitjan segle III aC, un cop consolidat el domini de Roma en tota la península d'Itàlia, comença una sèrie

152. El nom llatí és *Punici bella*. Són les guerres contra els cartaginesos —un poble d'origen fenici—, que els romans anomenaven *pūnicus* o *pœnicus*.

de guerres amb l'objectiu d'estendre'l al món mediterrani, allà on el comerç i la navegació estaven en mans dels cartaginesos. Les guerres púniques marquen la primera etapa d'aquesta expansió.

Roma es va trobar amb un fet ben consolidat: la ciutat de Cartago, situada a la costa nord d'Àfrica, havia forjat un imperi marítim que dominava tota la Mediterrània occidental i d'altres zones d'influència, amb colònies a Hispània, Balears i Sicília, d'on havien expulsat els grecs.

*a*) Primera Guerra Púnica (262-241 aC). El 264 aC Roma decideix ocupar les colònies cartagineses de Sicília. Amb aquest objectiu, construeix una flota de guerra i, després d'anys de batalles de diferent intensitat, el 241 aC Cartago ha de capitular. Amb Sicília en el seu poder, aprofita el debilitament de l'enemic per ocupar Còrsega i Sardenya, i penetrar a la Gàl·lia Cisalpina.[153]

Concretant una mica més, però sense aprofundir-hi excessivament, aquesta guerra comença amb l'ocupació romana de Sicília, gràcies a una aliança amb els mamertins,[154] que lluiten contra els cartaginesos a Messina.

La lluita té lloc al mar, originàriament dominat pels cartaginesos, fins que l'èxit de la nova flota comandada pel cònsol Gai Duili —que manté una aliança amb el rei Hieró II de Siracusa— permet a Roma fer una expedició marítima d'ocupació militar

153. Hom distingia la Gàl·lia Cisalpina, entre els Alps i els Apenins, presa als etruscos pels gals i sotmesa al domini romà des del segle III aC, de la Gàl·lia Transalpina, que ocupava el territori que s'estén entre l'Atlàntic, el Rin, els Alps, la mediterrània i els Pirineus, i que era habitada per diverses branques de pobles cèltics, amb barreja de lígurs —poble antic de la conca mediterrània— i d'ibers —població preromana que s'estenia del Llenguadoc meridional a Andalusia.

154. Aquest era el nom dels habitants de Messina, a Sicília, a partir del segle III aC. De fet, eren mercenaris de la Campània —una regió de la Magna Grècia— que van convertir la ciutat siciliana en base de les ràtzies. L'origen del nom és «fills de Mart».

a la costa cartaginesa de Tunísia (256 aC). Fracassat, però, aquest assaig, la guerra se centra novament en Sicília, on els romans aconsegueixen consolidar-se. La pau de l'any 241 aC posa fi als dominis púnics sicilians i l'illa esdevé la primera província romana. Poc temps després (238 aC), Roma aprofita la revolta dels mercenaris que té lloc a Cartago per tal de conquerir també Sardenya i Còrsega.

FIGURA 2.17. Annníbal (Hanni-baal) (218-202 aC)

*b*) Segona Guerra Púnica (218-202 aC). De fet, és la guerra d'Anníbal (en fenici, *Hanni-baal*, 'el qui té el favor de Baal') Barca, el Llampec (B.6$a_1$, $a_2$, $a_3$ i $a_4$, pàgines 198-200).[155] Es desenvolupa a Hispània, Itàlia i Àfrica. La victòria final de Roma va suposar l'ocupació d'Hispània, que tenia jaciments argentífers. L'Imperi cartaginès és derrotat del tot. Primer anorreant-ne el poder polític i comercial (201 aC), i, més tard, el militar (146 aC), amb la presa i destrossa de Cartago per Publi Corneli Escipió Emilià, net d'Escipió Africà. La població va ser exterminada o esclavitzada i el territori cartaginès va esdevenir una província romana d'Àfrica.

155. Per a la figura d'aquest insigne cartaginès, autors clàssics: LIVI (2002), llibres XXI-XXIV; POLIBI (1925), llibre III, edició catalana, volum III, i NEPOS (1923), capítol XXIII. També Plutarc li va dedicar una «vida» que, desgraciadament, s'ha perdut. PLUTARC (1926-1946), edició catalana, volum I. I autors moderns: CHESTERTON (1925), part 1, capítol 7; CÒNSUL (2009), i RENDER (2006).

*Barca* —potser l'equivalent de l'hebreu *Barak*— va ser el nom familiar de personatges importants de Cartago, entre ells Amílcar, Anníbal i Asdrúbal. Sembla que, inicialment, va ser un sobrenom d'Amílcar i que, més tard, el van portar els membres de la seva família (els Barcins).

En síntesi, podem dir que la guerra s'origina a les bases que els cartaginesos havien establert al sud de la península Ibèrica, especialment a Cartago Nova (Cartagena), per compensar les pèrdues sofertes a Sicília. Anníbal —que havia dit: «juro que, quan tingui l'edat suficient per a fer-ho, [...] usaré el ferro i el foc per rompre el destí de Roma»—[156] projecta un atac directe sobre la ciutat amb una expedició per terra.[157]

El primer episodi d'aquesta segona guerra és la presa de Sagunt,[158] aliada dels romans, que es defensa aferrissadament fins que és anorreada del tot.

---

156. Dodge (1995), volum I, p. 247.

157. «Hic autem velut hereditate relictum odium paternum erga Romanos sic conservavit, ut prius animam quam id deposuerit; qui quidem, cum patria pulsus esset et alienarum opum indigeret, numquam destiterit animo bellare cum Romanis. Nam ut omittam Philippum, quem absens hostem reddidit Romanis, omnium his temporibus potentissimus rex Antiochus fuit. Hunc tanta cupiditate incendit bellandi, ut usque a rubro mari arma conatus sit inferre Italiæ. Ad quem cum legati uenissent Romani, qui de eius uoluntate explorarent darentque operam, consiliis clandestinis ut Hannibalem in suspicionem regi adducerent, tamquam ab ipsis corruptus alia atque antea sentiret, neque id frustra fecissent idque Hannibal comperisset seque ab interioribus consiliis segregari uidisset, tempore dato adiit ad regem, eique cum multa de fide sua et odio in Romanos commemorasset, hoc adiunxit: "Pater meus", inquit, "Hamilcar puerulo me, utpote non amplius annos nato, in Hispaniam imperator proficiscens Carthagine, Ioui optimo maximo hostias immolauit. Quæ diuina res dum conficiebatur, quaesiuit a me, uellemne secum in castra proficisci? Id cum libenter accepissem atque ab eo petere coepissem, ne dubitaret ducere"; tum ille "Faciam", inquit, "si mihi fidem, quam postulo, dederis". Simul me ad aram adduxit, apud quam sacrificare instituerat, eamque ceteris remotis tenentem iurare iussit numquam me in amicitia cum Romanis fore. Id ego ius iurandum patri datum usque ad hanc aetatem ita conseruaui, ut nemini dubium esse debeat, quin reliquo tempore eadem mente sim futurus. Quare, si quid amice de Romanis cogitabis, non imprudenter feceris, si me celaris; cum quidem bellum parabis, te ipsum frustraberis, si non me in eo principem posueris.» Nepos (1923), edició anglesa, p. 209-211. Vegeu B.6$a_1$ (pàgines 198-199).

158. El nucli primigeni de població de l'ètnia ibera edetana, del qual sorgirà la ciutat romana de Sagunt (grec: Σάγουντον; llatí: Saguntum), era Arse (Ἀρση).

Un cop sotmesa Sagunt, Anníbal, amb un gran exèrcit, travessa els Pirineus[159] i els Alps[160] seguint una ruta incerta de la qual alguns historiadors discuteixen encara els detalls. De fet, els romans l'esperen a les planures del Po, a les portes d'Itàlia. Això obliga Anníbal a combatre els taurins (*taurinis*), que no van acceptar l'aliança que els oferia, amb un exèrcit molt reduït i cansat. Malgrat tot, els va vèncer en la batalla del riu Ticino (novembre del 218 aC), en la qual s'enfronten la cavalleria cartaginesa i la romana, comandada per Publi Corneli Escipió. Anníbal hi demostra unes grans habilitats militars. Tot seguit, s'endinsa a Itàlia, on aconsegueix grans victòries (Trèbia, 18 de desembre del 218 aC, i Trasimè, 29 de juny del 217 aC), però no gosa assetjar Roma perquè, malgrat la seva política d'aliances, no aconsegueix que li facin costat els pobles itàlics dominats pels romans. Aleshores, es dirigeix al sud de la

FIGURA 2.18. Publi Corneli Escipió Africà (Publius Cornelius Scipio Africanus) (Roma, 235 - Liternum, 183 aC)

FIGURA 2.19. Anníbal animant les tropes

159. Segons Sili Itàlic, el nom de *Pirineus* prové d'un personatge mític, Pirene. SILI ITÀLIC (1979), edició francesa, p. 86-88.

160. Aquest nom apareix, per primera vegada, al segle I aC. Probablement, prové del nom cèltic *alp* —que esdevindria *albus* per al poble sabí, amb el sentit de 'món lluminós' o 'blanc'.

península, on obté una gran victòria a Cannes,[161] al sud d'Itàlia (2 d'agost del 216 aC), i s'estableix a Càpua.

Mentrestant, els romans contraataquen, sota el comandament de Gneu Corneli Escipió i Publi Corneli Escipió. Desembarquen a Empúries (218 aC), des d'on dominen la costa catalana. Després, arriben al sud de l'Ebre, on Gneu venç Asdrúbal Barca, i a Andalusia (Hispania Ulterior). Així tallen el camí terrestre entre Cartago i Anníbal. Un cop liquidat el domini cartaginès a Hispània (206 aC), Publi Corneli Escipió Africà[162] dirigeix la guerra cap a Cartago (204 aC). Anníbal s'hi desplaça amb la intenció de defensar la ciutat, però és vençut per Escipió[163] en la batalla de Zama, un emplaçament de Numídia,[164] el 19 d'octubre del 202 aC. D'aquesta manera, Roma passa a dominar la Mediterrània occidental i Cartago ja no serà mai més una potència militar. La Segona Guerra Púnica s'acaba, doncs, amb la victòria de l'exèrcit romà sobre el cartaginès.

Els dos grans comandants de l'exèrcit cartaginès, Anníbal i Asdrúbal, van tenir finals força diferents. Asdrúbal, vençut en la batalla de Metaure (207 aC) per Gai Claudi Neró, va morir en combat. Neró es va traslladar a Pulla per comunicar-ne la mort a Anníbal llançant-li el cap decapitat del militar cartaginès. Anníbal,[165] en canvi, va intentar bastir un exèrcit. No ho va aconseguir i es va retirar a l'Àsia Menor, on novament va preparar una revolta contra Roma. Però els seus plans són descoberts i,

161. Del llatí *canæ*, que vol dir 'canyes'.

162. Scullard (1970).

163. Per a la dualitat Anníbal-Escipió, Scullard (1970), Bohec (1995) i Brizzi (2007).

164. D'aquest enclavament prové la paraula *nòmada* (*νομάδος*, en plural *νομάδες*): «els qui canvien d'indret» (*νομάς*).

165. Hi ha una llegenda curiosa sobre el naixement d'Anníbal. Sembla que, per un error de transcripció o d'interpretació d'un text original de Plini el Vell, Parva Hannibalis (que significa «l'illa petita d'Anníbal», possiblement l'illa dels Conills actual, la segona de l'arxipèlag de Cabrera, amb una àrea d'1,37 quilòmetres quadrats) es va convertir en *Patria Hannibalis*, cosa que va fer que Anníbal fos nomenat fill il·lustre de Palma.

convençut que seria lliurat als romans pel rei de Bitínia, Prúsies I, es va suïcidar amb verí l'any 183 aC. Moria així un eminent cabdill del bàndol cartaginès, «el pare de l'estratègia».[166]

Durant aquesta guerra, Jerònim, fill de Geló II i net de Hieró II, tirans de Siracusa, abandona l'aliança que el seu pare havia establert amb Roma, i l'any 214 aC s'alia amb els cartaginesos. Per a protegir la rereguarda i conservar el domini de la Mediterrània, Publi Corneli Escipió Africà necessita prendre la ciutat de Siracusa i, d'allà estant, la resta de l'illa. Per enfrontar-se al setge romà de la ciutat, que comandava el general Marcel,[167] Arquimedes hi intervé amb ginys d'atac i defensa. El geòmetra, que n'era nadiu, hi havia viscut tota la vida,[168] i durant la invasió romana hi va trobar la mort († 212 aC) travessat per l'espasa d'un soldat anònim (B.6$b_1$, $b_2$ i $b_3$, pàgines 200-201).

*c*) Tercera Guerra Púnica (149-146 aC). Els romans van declarar la guerra un altre cop, temien que el poder de Cartago ressuscités. Aprofitant la malvolença del rei númida Masinissa I contra els cartaginesos, Roma va iniciar una guerra d'extermini que va acabar amb la presa de Cartago després d'una resistència desesperada davant Escipió Emilià. L'urbs va ser arrasada i no ressorgiria fins a un segle i mig més tard, en temps de Juli Cèsar, però com a ciutat romana.

### 2.4.3*c* Els tirans de Siracusa: d'Hicetes II a Hipòcrates i Epícides[169]

HICETES II de Siracusa (Ἱκέτας) (segle III aC) va ser un governant grec nascut a Siracusa, tirà d'aquesta ciutat entre els go-

166. DODGE (1995), volum I, p. 247.

167. PLUTARC (1926-1946), volum VIII, edició catalana, p. 107-144.

168. Havia nascut l'any 287 aC, abans que comencessin les guerres púniques.

169. SMITH (ed.) (1844*a*) i, en línia, <https://ca.wikipedia.org/wiki/Categoria:Tirans sicilians>.

verns d'Agàtocles[170] i Pirros de l'Epir (288-279 aC). A la mort d'Agàtocles el 289 aC, el seu assassí, Menó,[171] va matar el net del tirà, Arcàgat, i va assolir el comandament de l'exèrcit amb el qual aquest assetjava Etna. Es va dirigir a Siracusa, l'assemblea de la qual havia comandat Hicetes, perquè se li enfrontés amb una quantitat considerable d'homes. Durant un temps, no hi va haver cap resultat decisiu. Finalment, però, Menó va demanar ajut als cartaginesos i va aconseguir imposar-se. Siracusa va haver de signar una pau desfavorable. I, una mica després, una revolta va expulsar els mercenaris campanis,[172] coneguts com a *mamertins*. Segurament va ser llavors que Hicetes, cap de l'exèrcit, va assolir el poder, ja que Diodor de Sicília afirma que va governar nou anys. Del seu període de govern, només en coneixem una guerra contra Fínties,[173] tirà d'Agrigent, en la qual Hicetes va obtenir una victòria notable, i una altra contra els cartaginesos, que el van derrotar a la vora del riu Terias. Després de l'arribada de Pirros va ser expulsat del poder per Tinió.[174]

Sosístrat II de Siracusa (Σωσὄστρατος β)[175] i Tinió (Θινιὸν)[176] (morts el 276 aC). Tots dos van ser tirans de Siracusa i van governar Sicília abans de l'arribada de Pirros, rei de l'Epir. Eren comandants militars i mercenaris. Probablement, Sosístrat es va enfrontar amb el seu rival Tinió i el va derrotar. Però els cartaginesos van atacar Siracusa per terra i mar, i això els va forçar a demanar ajut a Pirros de l'Epir. Quan va acceptar, li van lliurar el comandament de les tropes i el van ajudar a conquerir Agrigent, que havia caigut en mans dels cartaginesos. Però ben aviat va esdevenir impopular i els sicilians li van mos-

170. Smith (ed.) (1844*a*), volum i, p. 63-64.
171. Smith (ed.) (1844*a*), volum ii, p. 897.
172. Procedien de la Campània, regió de la Itàlia meridional.
173. Smith (ed.) (1844*a*), volum iii, p. 336.
174. Smith (ed.) (1844*a*), volum ii, p. 449-450.
175. També se l'anomena Sostrat II.
176. També conegut amb el nom de Tenó.

trar la seva hostilitat. Ell va reaccionar contra els dirigents sicilians i va fer matar Tinió. Sembla que Sosístrat se'n va escapar per ben poc i que se'n va perdre el rastre.[177]

PIRROS (Πύρρος της Ηπείρου), rei de l'Epir, va ser un militar molt actiu, cap destacat de la guerra de Làmia entre Macedònia i Grècia, després de la mort d'Alexandre el Gran. Va assolir moltíssimes victòries. Tanmateix, la seva relació amb Sicília va ser accidentada i breu.[178] L'estiu del 281 aC va ser cridat per Tàrent, a qui els romans havien declarat la guerra. Va acceptar i, malgrat les vicissituds del viatge, va aconseguir vèncer els romans, però el seu exèrcit va quedar molt delmat. Tenia trenta-vuit anys. En veure que Roma no responia a la proposta de pau i li posava tota mena de dificultats per negociar, va decidir reprendre la guerra. I, l'any 279 aC, va assolir una nova victòria a Asculum. Era, però, conscient de la dificultat que suposava poder mantenir la resistència.

FIGURA 2.20. Bust de Pirros de l'Epir [Museo Archeologico Nazionale, Nàpols]

Aleshores va acceptar ajudar els sicilians que lluitaven amb els cartaginesos. Això el va obligar a pactar amb els romans. Va

177. SMITH (ed.) (1844*a*), volum III, p. 234, i, més recent, BRACCESI i MILLINO (2006).

178. La seva vida va ser molt activa, gairebé mítica, però escapa al nostre interès. Plutarc li dedica un llibre, en paral·lel amb Gai Mari. PLUTARC (1926-1946), volum XI. També Montesquieu li dedica el capítol IV de MONTESQUIEU (1734), p. 137-149. Vegeu també SMITH (ed.) (1844*a*), volum II, p. 610-615; ABBOTT (1854), i, més recent, GAROUPHALIAS (1974).

romandre a Sicília, on va esdevenir tirà des de la meitat del 278 fins al final del 276 aC. Va continuar batallant contra els romans però el van derrotar. Es va girar vers Macedònia, on el van nomenar rei (274-272 aC), i es va enfrontar als espartans, als quals no va poder sotmetre. Aleshores va dirigir l'exèrcit contra Argos i va morir durant la batalla als quaranta-sis anys.[179]

Els antics el consideraven un gran general. Les seves victòries, però, les aconseguia sempre a costa d'una pèrdua enorme d'homes i de material. Sembla que ell mateix va dir, en contemplar el resultat de la batalla:[180] «Amb victòries com aquesta estem ben perduts»,[181] o «Amb una victòria com aquesta tornaré a casa tot sol».[182] Per això, aquesta mena de triomfs s'anomenen *victòries pírriques* (*πύρρεις νίκη*). Es creu que va escriure un llibre sobre l'art de la guerra[183] que, segons Plutarc, va tenir una gran influència en Anníbal[184] i va rebre els elogis de Ciceró.[185]

Hieró II (Ἱέρων) (Siracusa [Sicília], abans del 306 aC - 216 aC) va ser un tirà, fill d'un siracusà notable de nom Hièrocles, que assegurava que era descendent de Geló I i d'una serventa. Es va distingir durant el regnat de Pirros, que el va nomenar cap de totes les forces. L'exèrcit el tenia en gran estima, i va convèncer l'assemblea perquè ho ratifiqués.[186]

---

179. Hom explica que, quan un dels seus fills li va preguntar a quin d'ells deixaria el seu llegat, va declarar: «A aquell que tingui l'espasa més afilada.» (*Σε εκείνον θα έχει το πιο κοφτερό σπαθί*). Plutarc (1926-1946), volum xi (1930), llibre viii, [5], p. 11.

180. Hauria pogut ser perfectament davant la victòria d'Asculum.

181. En grec: «Ἂν ἔτι μίαν μάχην νικήσωμεν, ἀπολώλαμεν.» Plutarc (1987), «Pirros», 3. Vegeu B.7$a_1$ (pàgina 201).

182. «Ne ego, si iterum eodem modo uicero, sine ullo milite Epirum reuertar.» Orosi (1857), llibre iv, 1.15, edició electrònica, p. 113.

183. Müller (1845), volum ii, p 461.

184. Plutarc (1926-1946), volum xi (1930), llibre viii, [5], p. 11.

185. Tinsley (2006), p. 211.

186. Vegeu <https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Family/Hiero.html>.

Es va casar amb la filla de Leptines, el ciutadà més influent de Siracusa, i així aconseguí el suport del consell de la República Romana.

Quan Pirros va abandonar Sicília, els mamertins van atacar Siracusa. Hieró va prendre l'alternativa i va sacrificar les tropes mercenàries —de les quals desconfiava—, mentre ell, amb l'exèrcit siracusà, aconseguia derrotar els mamertins que van quedar acorralats en un racó de l'illa. Finalment, en una batalla a la planura de Mylae, a la vora del riu Longanus, van ser totalment derrotats. En retornar a Siracusa, Hieró II va ser aclamat pels ciutadans i va rebre el títol de rei (270 aC).

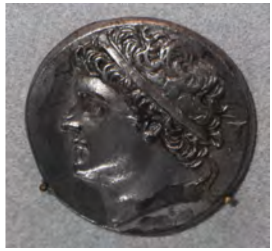


FIGURA 2.21. Medalló amb l'efígia de Hieró II [Altes Museum, Berlín]

El 264 aC, els mamertins es van aliar amb els romans. Hieró, que fins aleshores s'havia mantingut imparcial, va establir una aliança amb Cartago i, així, va aconseguir un exèrcit poderós. Però va ser vençut per l'exèrcit romà comandat pel cònsol Appi Claudi i es va retirar a Siracusa. Tanmateix, l'exèrcit romà, delmat per una epidèmia de pesta, va haver d'abandonar el setge.

L'any següent, les hostilitats es van renovar i, davant el poder de Roma i la manca d'ajut dels cartaginesos, Hieró va signar la pau amb els romans amb unes condicions força favorables: conservava tot el sud-est i est de l'illa i, a canvi d'això, havia d'alliberar els presoners i pagar una indemnització de guerra.

Des de llavors, va ser un aliat fidel de Roma i Siracusa va gaudir d'un llarg període de pau, tranquil·litat i prosperitat. Els serveis que va prestar als romans durant la Primera Guerra Púnica van ser molts i destacats: proveïment de subministraments, ajut amb armament i aportació de vaixells.

Després de la batalla naval de les Àgates, el 241 aC, en la qual Gai Lutaci Catul va derrotar els cartaginesos comandats per Hannó el Gran, Roma va establir definitivament la seva superioritat naval a la Mediterrània occidental. Cartago va signar la pau, i Roma va reconèixer Hieró II com a rei d'una part de Sicília i li va oferir protecció, mentre que la resta de l'illa es convertia en la província romana de Sicília.

FIGURA 2.22. La tomba de Hieró II

Quan va esclatar la Segona Guerra Púnica (218 aC), Hieró II es va mantenir fidel a Roma, va enviar una flota de cooperació i va aprovisionar les forces romanes de Sicília. Va morir a finals del 216 o a començaments del 215 aC, als noranta-dos anys.[187]

GELÓ II (Γέλων), fill únic de Hieró II (Siracusa, 266-216 aC), tirà de Siracusa, va ser incorporat al govern pel seu pare (240-216 aC) i va rebre el títol de rei. Va morir unes setmanes abans que el seu progenitor. Era un governant prudent. Segons Tit Livi, després de la batalla de Cannes, el 216 aC, Geló, que llavors tenia cinquanta anys, estava disposat a abandonar l'aliança romana, però la mort l'hi ho va impedir.[188] Arquimedes li va dedicar l'*Arenari*,[189] en el qual se li dirigeix amb el títol de rei.[190]

JERÒNIM DE SIRACUSA (Ἱερώνιμος) va ser un tirà, rei de Siracusa del 215 al 214 aC. Era fill de Geló II i net de Hieró II, als quals va succeir als quinze anys.[191] La batalla de Cannes havia

187. SMITH (ed.) (1844*a*), volum II, p. 454-456.
188. LIVI (2002), llibre XXIII, § 30 (11), edició en segment de F. Navarro, volum IV, p. 50.
189. Vegeu el text A.9 de PLA (2020), p. 380.
190. SMITH (ed.) (1844*a*), volum II, p. 237-238.
191. LIVI (2002), llibre XXIV, capítol 1, § 4 (6), edició francesa en línia, p. 4.

servit per a qüestionar el poder de Roma i part de la població de Sicília es decantava per una aliança amb Cartago. Van establir un consell de regència format per quinze prohoms, entre els quals hi havia dos oncles de Jerònim. Amb argúcies, els oncles van aconseguir que els regents dimitissin i Jerònim assolís tot el poder. Així, va esdevenir un titella en mans dels dos oncles, que eren favorables a l'aliança cartaginesa. L'únic antic conseller que va conservar certa influència va ser Trasó, partidari dels romans, però el van eliminar acusat de conspiració. Jerònim va enviar ambaixadors a Cartago per establir una aliança que determinés que el riu Himera era el límit entre els cartaginesos i els siracusans. Amb un exèrcit de quinze mil homes, va intentar reconquerir les posicions que Roma tenia a l'illa. I, a començaments del 214 aC, mentre era a Leontins, va ser assassinat per un grup de conspiradors encapçalat per Dinòmenes. Només feia tretze mesos que era al poder i no va deixar successor.[192]

ANDRANÒDOROS (Ἀνδρανόδωρος) o ANDRANÒDOR era gendre de Hieró II de Siracusa. Quan Jerònim va ser assassinat, es va apoderar de la ciutadella i de les principals fortaleses per tal d'arribar el poder. Però, davant de les dificultats que tenia per a governar, va abdicar (213 aC) i un dels seus generals va prendre el comandament. El poble, insatisfet, va assassinar el tirà Andranòdoros (212 aC).[193]

HIPÒCRATES (Ἱπποκρατής) (Cartago, ? - ?, ~210 aC) i EPÍCIDES (Ἐπικύδης) (Cartago, ? - ?, ~210 aC) van ser tirans del 214 al 212 aC. Eren militars cartaginesos de pare grec. Van servir l'exèrcit d'Anníbal a Hispània i a Itàlia. Després de la batalla de Cannes, Jerònim de Siracusa va demanar parlamentar amb els cartaginesos i els dos germans van ser designats ambaixadors, i van ser enviats a la capital siciliana (215 aC). Epícides va convèncer la ciutat de Siracusa perquè abandonés l'aliança

192. POLIBI (1925), llibre VII, 2; SMITH (ed.) (1844*a*), volum II, p. 458-459.

193. SMITH (ed.) (1844*a*), volum I, p. 170; ARNOLD (1843), p. 268-276.

romana, però l'assassinat de Jerònim poc després (214 aC) i la revolució que hi va seguir li van esguerrar els plans. Això no obstant, van ser elegits generals. Mentre, els partidaris de Roma, que tenien el suport d'Andranòdoros, van aconseguir imposar el seu criteri. Epícides es va reunir amb el seu germà a Leontins. Però la ciutat va ser ocupada pels romans i tractada amb una violència extrema. Això va revoltar els siracusans i els mercenaris estrangers al seu servei. Hipòcrates i Epícides es van aprofitar de la nova situació, van retornar a la ciutat, es van erigir en els seus caps, se'n van apoderar sense gaire resistència (213 aC) i van ser nomenats generals. Andranòdoros no va trigar gaire a ser assassinat. Quan Marcel va assetjar Siracusa, els dos germans la van defensar amb energia i van obligar els romans a retirar-se. Epícides va quedar-ne com a cap, mentre que Hipòcrates va combatre en altres indrets de Sicília, com ara Agrigent.

Epícides, derrotat pels romans, va abandonar Siracusa i la ciutat va caure (212 aC). Amb aquesta conquesta, es va acabar l'època dels tirans siracusans.

Epícides, però, va fugir a Agrigent, on va cooperar, juntament amb el seu germà, amb els amotinats númides fins que aquesta urbs va caure també en mans dels romans (210 aC). Aleshores va fugir a Cartago. Es desconeix quin final va tenir. Hipòcrates, en canvi, va morir de pesta quan es trobava a la zona pantanosa del riu Anapus preparant un contraatac.[194]

### 2.4.3*d* La República Romana tardana

Un cop vençut l'enemic africà que dominava la Mediterrània occidental, Roma decideix sotmetre també la Mediterrània oriental i, per aconseguir-ho, s'enfronta successivament als monarques dels estats hel·lens sorgits de l'Imperi d'Alexandre el Gran:

194. Smith (ed.) (1844*a*), volum I, p. 35 i 36, 480 i 481.

els reis macedonis Filip V (197 aC) i Perseu (168 aC), en allò que es coneix com les guerres macedòniques (Primera, 214-205 aC; Segona, 200-196 aC, i Tercera, 172-168 aC), i Antíoc III de Síria, en la guerra amb els romans (192-188 aC). Així, successivament, Macedònia, Acaia i l'Epir es converteixen en províncies romanes (146 aC). El rei de Pèrgam, Àtal III, llega el seu regne a Roma l'any 133 aC, una part del qual esdevé la província romana d'Àsia. Podem dir, com ja hem indicat abans, que aquesta expansió per la Mediterrània s'acaba quan, amb la victòria romana d'Àctium (2 de setembre de l'any 31 aC), Egipte cau sota l'autoritat de la República.

D'altra banda, Roma consolida el seu domini a la conca occidental d'aquest mar amb l'establiment de nombroses colònies a la Gàl·lia Cisalpina, la conquesta definitiva d'Hispània amb el setge de Numància (Hispània Citerior, 134 aC)[195] i l'ocupació de la Gàl·lia del sud que, convertida en la província Narbonesa,[196] permet la unió terrestre entre Hispània i la capital de l'Imperi per la Via Domícia.[197]

Totes aquestes conquestes comporten una veritable revolució econòmica. El botí del vencedor, les indemnitzacions de guerra i els tributs pagats per les províncies enriqueixen l'Estat i alguns prohoms en concret, també els membres de la classe senatorial acaparen les terres que l'Estat s'ha reservat durant l'è-

195. La ciutat va ser destruïda per Publi Corneli Escipió Emilià el 133 aC, i els habitants van morir de gana o es van suïcidar abans de rendir-se. Els que es van rendir van ser venuts com a esclaus i cinquanta van ser portats a Roma per a participar en el triomf de l'Emilià (132 aC). La ciutat va quedar despoblada durant dos-cents anys. Avui en dia encara en queden unes restes a prop de la ciutat de Sòria.

196. La Gàl·lia Narbonesa va ser una província romana creada el 121 aC; era coneguda, al començament, com a província de la Gàl·lia Transalpina.

197. La Via Domícia va ser construïda, el 120 aC, pel procònsol Gneu Domici Aenobarb, dos anys abans de la fundació de Narbo Martius (Narbona). Segons el DIEC (2007), un procònsul era el qui detenia un comandament militar o una administració provincial pel fet d'haver estat cònsol l'any anterior.

l'època de les conquestes, l'*ager publicus*, els cavallers administren l'explotació dels béns públics (d'on els ve el nom de *publicans*, *publicani*) i tots plegats es lliuren a l'especulació.

Alhora, les conquestes també malmeten el fràgil equilibri social de la República: els esclaus, cada vegada més nombrosos, es revolten en la Tercera Guerra Servil,[198] encapçalats per Espàrtac, el gladiador traci en règim d'esclavatge, (73-71 aC).[199] Molts membres de la petita pagesia italiana, arruïnats, s'afegeixen a augmentar la plebs urbana de Roma, cada vegada més sensible a la manipulació demagògica. Els habitants dels territoris ocupats estan descontents de l'explotació a la qual són sotmesos pels governants, i els italians desitgen la igualtat amb els romans. Tots junts constitueixen un terreny adobat per a la revolta.

FIGURA 2.23. *El jurament d'Espàrtac.* Marbre de Louis-Ernest Barrias (1871)

198. Recordem que hi va haver tres guerres servils (*Servilis bella*): a Sicília, entre el 135 i el 132 aC, la liderada per Eunus i, entre el 104 i el 103 aC, la dirigida per Atenió i Trifó; i, a Itàlia, entre el 73 i el 71 aC, la d'Espàrtac, la més temuda.

199. Recordem la meravellosa pel·lícula de Stanley Kubrik, *Spartacus*, amb la interpretació sòbria de Kirk Douglas, Jean Simmons, Anthony Curtis, Sir Lawrence Olivier, Charles Laughton, Peter Ustinov i John Gavin.

Les institucions creades per a administrar una ciutat com Roma no servien per al nou gran Imperi. El gust pel luxe s'introduïa en els costums malgrat les lleis sumptuàries, i l'art i la literatura s'anaven transformant influïts pels aires orientals, sobretot hel·lenístics.

## 2.5 Cloenda

Mentre Roma es consolida com a República i inicia el camí cap al domini de la conca mediterrània —al començament de la República Romana mitjana—, Egipte està sota el poder ptolemaic i esdevé un eix neuràlgic de pas entre la Mediterrània i orient, amb un port comercial de primera magnitud, i amb un estatus cultural i científic d'una importància històrica excepcional.

Aleshores i allà —a les zones d'influència grega durant el segle III aC— es troba l'essència de la matemàtica grega, la seva consolidació definitiva i l'assoliment del seu cim. N'és un símbol paradigmàtic Arquimedes, que uneix els dos indrets geogràfics i els fets polítics: la puixança d'Alexandria a Egipte i la consolidació de Roma a la Mediterrània, amb el declivi cartaginès.

Però també és aleshores, com s'esdevé sempre al llarg de la història, quan se n'inicia el declivi i, a poc a poc —molt a poc a poc—, l'embranzida de la matemàtica grega s'esllangueix, però, malgrat aquest esllanguiment, encara aportarà obres molt rellevants de geometria, astronomia i aritmètica, com veurem en el volum *Grècia IV* d'aquesta *Història de la matemàtica: Grècia.*

# Capítol 3

# Les aportacions conceptuals d'Euclides

> Tum Crassus «non in hac» inquit «una, Catule, re, sed in aliis etiam compluribus distributione partium ac separatione magnitudines sunt artium deminutæ. An tu existimas, cum esset Hippocrates ille Cous, fuisse tum alios medicos, qui morbis, alios, qui vulneribus, alios, qui oculis mederentur? Num geometriam Euclide aut Archimede, num musicam Damone aut Aristoxeno, num ipsas litteras Aristophane aut Callimacho tractante tam discerptas fuisse, ut nemo genus universum complecteretur atque ut alius aliam sibi partem in qua elaboraret seponeret?»
>
> CICERÓ[200]

200. CICERÓ (1988-2003), III, 132, edició catalana, volum III, p. 42: «Aleshores Cras diu: "No només en això, Catul!, sinó també en molts altres aspectes, ha minvat l'extensió relativa de les ciències, per la classificació i dispersió de les parts que se n'ha fet. Potser opines que, quan vivia el gran Hipòcrates de Cos, uns metges tractaven les malalties, uns altres les nafres i uns altres els ulls? Per ventura, quan Euclides i Arquimedes es dedicaven a la geometria, Damó i Aristoxen a la música, i Aristòfanes (de Bizanci) i Cal·límac a les lletres, no estaven talment trossejades que ningú no n'abraçava la totalitat sinó que cadascun d'ells en separava una per treballar-hi?"»

En el primer volum de la *Història de la matemàtica grega*[201] hem vist, a bastament, els antecedents de bona part de la matemàtica — fonamentalment, geometria— hel·lènica que Euclides sintetitza en els *Elements* i tracta, des de diversos punts de vista, en les altres obres. En aquest volum i els següents, veurem la influència que va tenir l'obra del genial autor en els geòmetres i aritmètics posteriors.

I, tot i la seva vàlua, sabem ben poca cosa de la vida d'aquest insigne geòmetra, un dels «gegants» del pensament humà.

## 3.1 Unes gotes de biografia

D'entrada, recorrerem al famós *Sumari* de Procle (C.1$a_1$, pàgina 206, i Pla (2016*b*), p. 373-375) perquè permet conèixer els deutes matemàtics que l'obra d'Euclides té amb aquells que el van precedir —en particular, els platònics—, alhora que apunta part de la influència que exerceix en autors posteriors.[202] I també ens seran útils algunes anotacions de Pappos (C.1$b_1$ i $b_2$, pàgina 208), en les quals l'alexandrí li atribueix una certa bonhomia personal i un respecte per tots els que havien aportat i aportaven coneixements a la matemàtica. I, a més, ens valdrem d'un altre text, més recent però clàssic, d'arrel islàmica que hi fa referència (C.1$c_1$, pàgines 208-209).[203]

Tota aquesta informació, juntament amb l'anècdota que Joan Estobeu atribueix a Menecme, i Procle a Euclides, recordada al començament del capítol primer, relativa a l'alumne que volia «treure profit crematístic» del que Euclides li ensenyava, conforma aquesta pàgina escassa de síntesi biogràfica. I ho justifica el fet de dir, amb Edward M. Forster:

201. Pla (2016*b*).

202. Acerbi (2007), p. 177-212, dedica un capítol a situar Euclides cronològicament.

203. Heath (1921), volum I, p. 354-357; Vitrac (1990), p. 13-18; Dorce (2013), p. 105-106.

> No se sap res de la seva vida. Se'l considera una branca del coneixement més que no pas una persona.[204]

I, per acabar-ho de complicar, a aquesta manca de dades, s'hi afegeix el fet que se'l confonia sovint amb el filòsof Euclides de Mègara, contemporani de Plató.


FIGURA 3.1. Una estàtua d'Euclides a Oxford

D'acord amb el text de Procle, el podem situar en el regnat de Ptolemeu I Soter (367-282 aC) i, per tant, en el període 306-285 aC, que és el del regnat del fundador de la dinastia dels làgides ($\lambda\alpha\gamma\acute{\iota}\delta\alpha\iota$) o ptolemaics ($\pi\tau o\lambda\epsilon\mu\alpha\ddot{\iota}o\iota$). Va ser precisament aquest monarca qui el va convidar a participar en el projecte del museu d'Alexandria.

Procle també assegura que Arquimedes (287-212 aC), que va néixer quatre anys després de la mort de Ptolemeu I, l'esmenta (C.1$a_1$, pàgina 206). Explícitament, ho fa només en una ocasió, amb l'expressió l'«autor dels *Elements*» ($\acute{o}$ $\sigma\tau o\iota\chi\epsilon\iota\acute{\omega}$- $\tau\eta\varsigma$).[205] Tanmateix, l'obra d'Arquimedes està impregnada de l'estil dels *Elements*, tant pel que fa a la concepció i el desenvolupament com a l'ús dels resultats establerts.[206]

---

204. FORSTER (1922), edició castellana de 1984, p. 64.

205. En les proposicions EC 1 i EC 6 (ARQUIMEDES (2010), edició catalana, p. 71 i 77), trobem dues mencions a l'obra d'Euclides: EI 2, i EX 1 i EX 2. Vegeu *Grècia IIIb*, p. 239 i 245.

206. Pel que fa a aquesta qüestió, vegeu ARQUIMEDES (2010), edició catalana, p. 20-25 i 203-212; KAYAS (1978), volum I, nota 10, p. X i 249, i VITRAC (1990), nota 4, p. 14. També *Grècia IIIb*, § 1.1.5, p. 28-36.

Quan el siracusà necessita resultats relatius a les còniques, remet a un tractat de *Còniques* d'Euclides,[207] igual que Apol·loni.[208]

D'altra banda, alguns fragments de Pappos permeten afirmar, amb prudència, que Euclides «era modest i amable amb tothom i, en particular, amb aquells que demostraven una afició especial a la matemàtica».[209]

Tot això, en definitiva, suggereix que Euclides va viure i treballar després de Plató († 347 aC) i abans que Arquimedes produís els seus primers treballs (267-257 aC).

FIGURA 3.2. Una pintura que representa Euclides amb el nom d'*Euclides de Mègara*

Procle, Pappos i Apol·loni no precisen l'indret on va néixer, però les dates que hem indicat impedeixen confondre'l amb el filòsof de Mègara, que era contemporani de Plató i fundador de l'Escola megàrica.[210] Aquesta confusió en situaria erròniament el lloc de naixement a Gela, Sicília.

Les fonts àrabs indiquen que Euclides el geòmetra va néixer a la ciutat fenícia de Tir (actualment, al Líban)[211] i que es va traslladar a Damasc, on va viure uns anys. També en proporcio-

207. No és explícit i, per tant, podria referir-se al tractat d'Aristeu el Vell.

208. Apol·loni explicita el nom d'Euclides, Arquimedes no. Vegeu el text C.1$b_2$ (pàgina 208).

209. VERA (1970), volum I, p. 689.

210. S'ha dit que la confusió prové del fet d'haver atribuït a Euclides de Mègara la tasca matemàtica d'Èudox, deixeble de l'Acadèmia.

211. Tir va ser la ciutat fenícia més important. Els hebreus la van anomenar *Tsor* i els mateixos tirians *Sor* o *Sur* —'Roca'—, amb referència

nen el nom del pare (Nàucrates), la mare (Berenice) i l'avi (Zenarc).

Amb aquestes dades, doncs, podem escriure, en síntesi:

> EUCLIDES ($E\upsilon\kappa\lambda\epsilon\iota\delta\eta\varsigma$) (Tir? [Fenícia], ∼325 aC - Alexandria [Egipte], 265 aC),[212] fill de Nàucrates i Berenice, i net de Zenarc.[213]

L'etimologia del nom *Euclides* (Eukleidhs) —'gloriós'— es compon d'$\epsilon\upsilon$, 'bo', i $\kappa\lambda\epsilon o\varsigma$, 'glòria' i 'fama',[214] i descriu, de manera succinta però molt acurada, la transcendència de la persona i la seva obra.[215]

## 3.2 Les aportacions conceptuals de l'obra d'Euclides

Abans de repassar, breument, el corpus euclidià, cal que analitzem una mica les aportacions matemàtiques —epistemològiques, ontològiques i lògiques— que es troben en tota l'obra de l'ínclit matemàtic. En l'apartat següent, farem una descripció més detallada de les seves obres, una per una, llevat dels *Elements*, que ja han estat objecte dels volums *Grècia IIa* i *Grècia IIb*.

---

a la roca sobre la qual la van construir. Els grecs i els romans la denominaven *Tor*.

212. Vegeu, en línia, <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Euclid.html>.

213. Tanmateix, l'historiador SCHREIBER (1987), p. 159, diu: «Del cert, no coneixem cap fet de la vida d'Euclides.»

214. Vegeu <http://www.etymonline.com/index.php?term=Euclidean&allowed_in_frame=0>.

215. DORCE (2013), p. 106, però afirma que consta de les paraules gregues $\upsilon\kappa\lambda\iota$, 'clau', i $\delta\iota\varsigma$, 'mesura', i que, per tant, etimològicament significa: «la clau de la geometria».

Ja hem dit que, segons Procle,[216] l'obra cabdal del geòmetra, els *Elements*,[217] té com a objectiu la construcció dels cinc «elements» o sòlids platònics —els poliedres regulars—[218] i és fruit de la influència de l'Acadèmia de Plató, a la qual Euclides s'hauria adaptat com un deixeble atent i diligent. Però també podem pensar que, en elaborar l'obra magna, Euclides va seguir el model que li imposaven els altres «Elements» confegits en aquella institució, per exemple, els de Lleó (C.2.1$b_1$, pàgina 210).[219]

La pregunta clau és:

> L'organització interna dels *Elements* respon als ensenyaments de Plató o té en compte les crítiques aristotèliques?[220]

La resposta, naturalment, només la pot proporcionar una anàlisi acurada dels continguts de les seves obres i, d'una manera especial, dels *Elements*, una tasca que ultrapassa l'àmbit d'una simple història de la matemàtica[221] però que els ítems conceptuals i metodològics d'aquest apartat aclariran.[222]

Podem afirmar, en canvi, que és absolutament inqüestionable que, en l'obra d'Euclides i, en particular, en els *Elements*, hi trobem la síntesi de la geometria. Això lligaria amb l'anècdota

216. Vegeu els textos C.1$a_1$, pàgina 206, i Pla (2016*b*), p. 373-375.

217. Els hem dedicat Pla (2018) i Pla (2020).

218. Com comentarem més endavant, el mateix Procle, essencialment platònic, qüestiona aquesta lectura del terme *element*.

219. Recordem que, força temps abans de l'Acadèmia de Plató, Hipòcrates de Quios ja havia elaborat uns *Elements*. Pla (2016*b*), A.4*a* [4], p. 373.

220. Vitrac (1990), p. 17.

221. Això no obstant, en els § 4.2.3 i § 4.5.3 de Pla (2016*b*), p. 284 i següents, i p. 346 i següents, vam intentar apropar-nos a la naturalesa de la matemàtica segons els ensenyaments de Plató i d'Aristòtil, respectivament. Des d'una vessant filosòfica ho vam fer a Pla (2010*a*), i des d'una de divulgativa a Pla (2012), p. 35-43, 63-68, i 80-86.

222. Per a una anàlisi més acurada, el lector pot consultar Vitrac (1990) i, més detallada encara perquè analitza la totalitat de l'obra atribuïda a Euclides, Acerbi (2007), p. 213-774.

del deixeble que volia treure profit d'allò que aprenia, ja que l'obra euclidiana no pren en consideració les coses sensibles ni hi té cap interès (C.2.1$a_1$ i $a_2$, pàgines 209-210). El benefici que cerca és estrictament intel·lectual.

### 3.2.1 L'anàlisi i la síntesi

Una part important de l'obra d'Euclides —i, concretament, els *Elements*— és «sintètica» i, com ja hem comentat, aristotèlica, en oposició a la manera «analítica», intuïtiva, de presentar la geometria, més pròpia de l'Escola platònica.[223]

L'«anàlisi» procedeix per «reducció» (*ἀπαγωγή*) de la proposició que s'estudia. La certesa de l'enunciat s'estableix reduint, amb passos elementals però correctes, el que s'enuncia a una qüestió més senzilla, la validesa o la falsedat de la qual podem reconèixer, i de la qual deriva la validesa o la falsedat de l'enunciat inicial. En general, aquesta anàlisi està molt lligada a la «construcció» i, per tant, als problemes.

La «síntesi», per contra, procedeix pas a pas, tal com s'ha de fer segons els pitagòrics (C.2.2$a_1$, pàgines 210-211): parteix de supòsits bàsics i definicions preestablertes, fins a arribar, amb passos deductius acceptables, a la proposició de la qual es vol establir la veritat.

De fet, en la distinció platònica entre el coneixement matemàtic i el coneixement dialèctic, es troba la llavor epistemològica de la diferència entre el mètode sintètic i el mètode analític.[224]

223. Vegeu l'ítem 2 de l'apartat: «Alguns resultats geomètrics dels *Elements* a Aristòtil», Pla (2016*b*), p. 355.

224. Vegeu l'anàlisi del símil de la línia a Pla (2016*b*), p. 291-294.

### 3.2.2 Els axiomes, les hipòtesis i els postulats

Segons la visió metafísica de Plató, que situa el coneixement verdader al món de les Idees, els postulats són el topall amb el qual es troba el matemàtic quan realitza el seu quefer, perquè qualsevol intent d'anar «més enllà» o «més amunt» dels postulats no és propi d'aquesta ocupació, sinó que pertany al capteniment filòsofic.[225]

En canvi, en el pensament aristotèlic, que és sintètic, els postulats, que són part essencial del sistema —un sistema organitzat deductivament—, s'han de classificar. L'estructura metodològica de la matemàtica —precisament la que trobem en els *Elements*— es troba sintetitzada en la taula següent:[226]

TAULA 3.1. *Estructura metodològica aristotèlica de la matemàtica*

**Arbre metodològic**
↙ ↘
Tesi — Axioma (noció comuna) 1
↙ ↘
Hipòtesi (existència) — Definició (significat) 2
↙ ↘
Principi (amb consens) 4 — Postulat (sense consens) 3

El procés, tanmateix, necessita quatre ítems:[227]

1. Les nocions comunes.
2. Els postulats.
3. Les definicions acceptables i les definicions acceptades.
4. Les lleis de deducció admeses.

225. PLA (2016*b*), C.7$a_1$, p. 541. I C.2.1$b_1$, C.2.2$b_1$, C.2.2$b_2$ i C.2.2$d_1$, pàgines 210, 212, 213 i 215-217, respectivament, d'aquesta obra.

226. PLA (2016*b*), C.11.4*b*, p, 583-585. Aquest text s'elabora a partir dels de Procle esmentats ara mateix.

227. Per a més detalls, vegeu PLA (2010*a*), p. 36-37, i (2016*b*), p. 347.

Els pensaments platònic i aristotèlic tenen un punt de confluència en la manera d'entendre les «definicions», però el model euclidià, en aquest aspecte, és aristotèlic del tot.

### 3.2.3 Les definicions i l'existència

Una qüestió realment notable en la filosofia de la matemàtica, tant en Plató com en Aristòtil, és el paper que tenen les definicions en la ciència, en particular en la matemàtica, i, de retruc, el vincle que hi ha entre la definició d'un objecte i la seva existència.

La posició de tots dos prohoms és ben diferent. Per Plató, la qüestió de la definició és força delicada.[228] El nom no és important perquè l'objecte és ideal i, per exemple, el cercle —entès com a objecte— és perible i deixa d'existir, però la idea —«cercle» (κύκλος)— és l'essència que fa que els cercles peribles puguin existir.[229] Per això, com exposa en el *Teetet*, en el nom de l'objecte no hi ha res d'essencial i la definició de l'objecte solament està formada per parts de l'oració, noms i verbs (C.2.2$c_1$, pàgines 213-215). Aquest és un text important, si el lliguem amb el concepte ideal de l'ens en Plató i amb la carta VII,[230] perquè el coneixement d'algun aspecte de l'objecte solament permet recórrer a la figura de la Idea —que no és l'ens en si sinó només la seva ombra.

Per Aristòtil, en canvi, la definició és totalment inseparable del sistema sinteticodeductiu que cal elaborar. Li és del tot imprescindible establir l'existència dels ens que enuncia i que introdueix en les definicions —que, en el cas de la geometria són, de fet, figures geomètriques. És clar que, fent una analogia important amb el que succeeix en les proposicions que s'han de basar en unes proposicions primeres, les definicions necessiten

228. PLA (2016*b*), C.7$d_2$ i $d_8$, p. 546 i 548. I C.2.2$c_1$, pàgines 213-215.

229. Vegeu la carta VII 342 b4-343 a7, adreçada a l'amic Dió. PLATÓ (2009), edició catalana, p. 133-134.

230. PLA (2016*b*), C.7$b_1$, p. 543.

també uns ens primers —de fet, indefinibles— l'existència dels quals no admet discussió.[231]

Aquesta qüestió és important en la geometria grega, en general, i en la d'Euclides, en particular, perquè planteja la necessitat d'escatir quins són els mitjans acceptables per a establir l'existència dels objectes geomètrics. I, en el cas concret dels *Elements*, s'hi imposa l'ús exclusiu del regle i el compàs, una restricció d'arrel platònica.[232]

A més, el tema de l'existència rebla el clau pel que fa a la distinció entre «problema», allò que s'ha de construir —i que exigeix la definició que imposa la «construcció»—, i «teorema», allò que s'ha de provar —i que exigeix connectar propietats que deriven d'allò essencial i, per tant, establir-ne la «demostració».[233]

FIGURA 3.3. Un fragment de l'*Escola d'Atenes* de Rafael (∼1510 dC)

231. PLA (2016*b*), C.11.4$a_1$ i 4$b_1$, p. 582 i 583. I C.2.2$c_2$, pàgina 215 d'aquesta obra. Aristòtil tracta aquest problema àmpliament en els *Analítics primers i segons*, 43 b2, 50 a11, 72 a21, 75 b31, 90 a35-91 a11, 92 b4-93 b20, 93 b29-94 a19, 96 b22, 97 b13 i 99 a22. Vegeu ARISTÒTIL (1988*a*), volum II, p. 184, 213, 318, 333-334, 395-398, 404-411, 411-412, 423, 427 i 429.

232. HEATH (1921), edició de 1982, volum I, p. 288, que atribueix l'afirmació a Hankel. Tanmateix, l'acord és força unànime. BOYER (1949), nota 52, p. 27.

233. Fixem-nos en el fet següent: podem demostrar propietats d'objectes que no sabem construir perquè les proposicions són «generals» i les construccions «particulars». Així, per exemple, «la suma dels angles externs d'un polígon [convex] és igual a quatre angles rectes», amb independència del nombre de costats que tingui i del fet que sigui regular o no. Això és un porisma d'EI 32, que no es troba en els *Elements* (PLA (2018), p. 14). Així doncs, la suma dels angles externs d'un pentàgon i d'un heptàgon [convexos] val dos angles rectes. I, en particular, el resultat és el mateix quan aquests polígons —el pentàgon i l'heptàgon— són

▶ **Exercici 1**. *a*) Determineu, és a dir, establiu una fórmula que doni la suma dels angles interns d'un polígon de $n$ costats en funció de $n$. *b*) Demostreu que la suma dels angles externs d'un polígon val quatre angles rectes i que, per tant, no depèn del nombre de costats. ◀

### 3.2.4 Els diorismes

En l'apartat 4.1.3 de Pla (2016*b*), p. 71, indicàvem la importància que tenen les «condicions» que ha de complir un problema perquè tingui solució. Els geòmetres grecs anomenaven aquestes condicions *diorismes* (*διόρισμός*).[234] Procle atribueix el concepte a Lleó, més jove que Plató i, per tant, posterior a Sòcrates.[235]

En definitiva, els anomenats *diorismes* estableixen la «distinció» entre els casos possibles de resoldre i els impossibles. En l'apartat esmentat, en vam analitzar un cas. Procle, amb la seva gran capacitat analítica, vincula els problemes a l'anàlisi del problema EI 1. Diu, breument (C.2.2$d_1$, pàgina 215):

> [La geometria] mira aleshores si els segments existeixen tal com han estat definits.[236] I això ho fa, d'una manera particular, en els diorismes,[237] que destrien si els objectes que volem determinar són possibles o impossibles, i, quan són possibles, de quantes i de quines maneres ho són. En definitiva, la geometria cerca la qualitat[238] de l'objecte: quina mena de cosa és això?, perquè, quan examina les propietats intrínseques[239] del

---

regulars. Però el pentàgon regular el sabem construir i l'heptàgon regular no. Vegeu el text citat a la pàgina següent.

234. És un terme que deriva del verb *διορίζω*, que significa 'delimitar'.

235. Pla (2016*b*), A.4, [8], p. 374.

236. Respon la pregunta: «Un cop definit, l'objecte existeix?»

237. Diu: *διορισμός*, 'diorisma', entenent-lo com l'estudi de la distinció, de la determinació i de les condicions de possibilitat d'un problema que té solució geomètrica amb les eines pactades.

238. Diu: *τὸ ὁποῖόν*, que en l'àmbit de l'escolàstica s'entenia com «qualitat o naturalesa d'una cosa».

239. Diu: *τὰ καθ' αὑτὰ συμβεβηκότα*.

triangle, el cercle i els segments paral·lels, pretén determinar de quina mena de coses es tracten.[240]

I, en el llibre primer dels *Elements*, trobem, de manera «explícita», un diorisma a EI 22. El problema proposa: «Construïu un triangle de costats donats». Euclides concreta que, per tal que la qüestió tingui solució, cal que «cada parella de costats [junts] sigui més llarga que el tercer costat».[241]

▶ **Exercici 2**. Sabríeu justificar la necessitat d'aquest diorisma? ◀

### 3.2.5 Les divisions

Euclides empra tres accepcions del terme *divisió* (*διαίρεσις*): com a *anàlisi*, com a *disjunció de casos* i com a *divisió de figures*.

En el primer sentit, es tracta de dividir la dificultat que el coneixement de la qüestió comporta fins a assolir els elements més simples, en l'ordre conceptual, cap amunt (C.2.2$e_1$, pàgines 217-218), i els més complexos, en l'àmbit més aplicat, cap avall. La divisió lliga, doncs, amb l'anàlisi platònica (vegeu §3.2.1, pàgina 77).

En les demostracions, s'escau, de vegades, que cal «distingir» casos. En l'obra d'Euclides, hi ha indrets en els quals aquesta distinció comporta una multiplicitat de proposicions independents —com ara a EII 5 i EII 6—,[242] però n'hi ha d'altres, en els quals la distinció es fa en el si de la mateixa proposició —com ara a EIII 24 i EIII 25.[243] Aquest aspecte de les demostracions el recull Procle, per exemple, quan comenta EI 19.[244]

240. PROCLE (1873), 202, 2, edició anglesa, p. 158, i, francesa, p. 179.

241. PROCLE (1873), 300-332, edició anglesa, p. 258-260, i, francesa, p. 281-284. Aquí Procle analitza en quines condicions es tallen les circumferències de dos cercles no concèntrics, en quines són tangents i en quines són totalment externes. PLA (2018), nota 269, p. 88.

242. PLA (2018), p. 162-166.

243. PLA (2018), p. 217-220.

244. En PROCLE (1873), 318, edició anglesa, p. 248, i, francesa, p. 272, llegim: «El nostre geòmetra prova la impossibilitat per divisió.» De fet,

Aquesta metodologia demostrativa és veritablement important perquè, malgrat el caràcter binari de la lògica —basat en la dualitat afirmació/negació—, de vegades la negació comporta més d'un cas i tots s'han d'analitzar degudament.[245]

Una de les obres atribuïdes a Euclides es titula *De les Divisions* (*Περὶ διαιρέσεων βιβλίον*)[246] i Procle n'ofereix una descripció. Malgrat no disposar del text original, se'n conserva un manuscrit en àrab que va ser descobert al segle XIX i que conté 36 proposicions, quatre de les quals demostrades.[247] També ens n'ha arribat una edició mutilada en llatí (*De divisionibus*).

Com veurem després, aquesta obra planteja què cal fer per a dividir figures geomètriques en dues o més parts iguals, o en parts que mantinguin unes certes proporcions donades per endavant. Planteja, doncs, la resolució de problemes concrets perquè cerca la manera de construir el segment o els segments divisoris que es demanen (§ 4.1.2, pàgines 113-116).

▶ **Exercici 3**. És plausible que, donada una figura arbitrària plana tancada per una corba, la puguem dividir amb un segment que passi per un punt de la corba? Ho és que la raó entre les dues parts obtingudes es pugui donar per endavant?

I ho és, si imposem que el segment passi per un punt de l'interior de la figura?

**Exercici 4**. Resoleu el problema anterior, en els quatre casos —amb el punt a la perifèria, amb el punt a l'interior, amb igualtat i segons una certa proporció—, quan la figura que es vol dividir és: *a*) un triangle, *b*) un paral·lelogram, *c*) un quadrilàter arbitrari i *d*) un cercle. ◀

---

necessita distingir els casos «ser més gran», «ser igual» o «ser més petit». Vegeu Pla (2018), p. 112.

245. Pensem, per exemple, en el «no aniversari» d'*Alícia a través de l'espill* (1871), de Lewis Carroll. El «no aniversari» —ben asimètric respecte de l'«aniversari»— que, de fet, nega només un dia, comporta necessàriament l'anàlisi de tres-cents seixanta-quatre dies (o potser tres-cents seixanta-cinc).

246. Vegeu la taula 4.1 (pàgina 107).

247. Vegeu el text D.1.1*d*, pàgines 253-257, i Heath (1921), volum I, p. 425-430.

### 3.2.6 Els elements

Un concepte que no es pot deixar passar sense fer-ne un comentari és el d'«element». Ja hem indicat que, des d'un punt de vista platònic molt estricte, podríem afirmar que l'obra magna d'Euclides porta el nom *Στοιχεῖα* perquè està confegida amb un objectiu finalista: establir que és possible construir —i, per tant, que «existeixen»— els cinc sòlids platònics, i demostrar que no n'hi ha cap més.

Però, d'altra banda (C.1$a_2$, pàgines 206-207):

> Allò més admirable [en els *Elements*] és l'ordre i la selecció dels teoremes i els problemes considerats «elements», perquè [l'obra] no inclou tots els [teoremes] que podria haver recopilat, sinó solament aquells que són útils per a instruir en els «primers principis de la geometria». Són també dignes d'admiració les maneres diverses de raonar [que Euclides hi empra], tant quan parteix de les causes com quan ho fa dels signes,[248] sempre incontestables, exactes i adequats a la Ciència. I, finalment, són admirables els mètodes: el dialèctic, és a dir, el que distingeix els gèneres i les descobertes, el que defineix els conceptes essencials, el demostratiu, el del trànsit dels principis a allò que es busca, i l'analític, que retorna de les coses buscades als principis.[249]

Tanmateix, aquest objectiu dels elements és discutit per Procle d'una manera força detallada (C.2.2$f_1$, pàgines 218-221). En resum, creu que en l'aprenentatge de la geometria és bo exercitar-se en els «elements» perquè «els qui s'hi inicien són capaços de conèixer altres branques de la ciència. En canvi, sense aquest convenciment, és totalment impossible capir la veritat que [el seu coneixement] comporta i assolir el d'altres branques.» (C.2.2$f_1$, pàgines 218-221).

248. Procle (1873), 206.15, edició anglesa, p. 161-162, i, francesa, p. 183, en el sentit d'Aristòtil (1987), llibre I, capítol 10, 70C.1-3.

249. Procle (1873), 69, 3-15, edició anglesa, p. 57, i, francesa, p. 62. L'èmfasi és nostre.

A més, el terme *element* s'ha entès de diverses maneres. Per Hipòcrates de Quios, Lleó, Teudi de Magnèsia i Hermòtim de Colofó, els elements són proposicions que tenen una funció capital en l'obtenció i l'organització deductives de la rècula de resultats. Per Menecme, es poden subdividir en dues menes: la feble —lema previ (*λῆμμα*) immediat, com ara E I 1 per a E I 2—,[250] i la forta —principi (*ἀρχαι*) entès en sentit ampli—, és a dir, definicions, postulats i nocions comunes.[251] És precisament amb aquest sentit fort que el text d'Euclides adquireix tota la legitimitat per a ser anomenat *Στοιχεῖα*,[252] si bé respon també, d'una manera magistral, a l'accepció feble, gràcies a l'estructuració metodològica deductiva d'un alt nivell didàctic o, si es vol, disciplinari, que té, i gràcies a la dependència dels teoremes prèviament establerts —que esdevenen, també, elements, en poder ser reclamats en una demostració. Procle rebla el clau quan diu:

> Hem de ser absolutament clars i alhora concisos perquè no ferho ens pertorba l'enteniment i ens dificulta el coneixement. D'altra banda, hem de facilitar la comprensió dels teoremes en la seva forma general [...].[253]

Això justifica, com dèiem, que els *Elements* (*Στοιχεῖα*) no continguin la «totalitat» dels resultats geomètrics coneguts i assolits fins aleshores pels matemàtics grecs, sinó solament els que són bàsics per a desenvolupaments ulteriors. I això fa que les obres precedents anomenades així[254] quedin obsoletes i que la d'Euclides esdevingui la base dels desenvolupaments posteriors d'Arquimedes, Apol·loni, Eratòstenes, Ptolemeu i Pappos, per esmentar els més notables.

250. Pla (2018), p. 89.
251. § 3.2.2 (pàgines 78-79).
252. Pla (2018), p. 7-11 i 71-74.
253. *In extenso*, a C.2.2$f_1$ (pàgines 218-221).
254. Ítems [4], [8], [10] i [13] del text A.4*a*, Pla (2016*b*), p. 374-375.

### 3.2.7 Les figures

En relació amb el paper de les figures, val la pena fer alguns comentaris.

**3.2.7*a* La imatge lligada al nom**. En primer lloc, recordem que Plató introdueix la «imatge» lligant-la al «nom»,[255] que és, en definitiva, el que permet expressar la Idea (C.2.2$g_1$, pàgina 222). I, per tant, la imatge/figura esdevé simplement una representació de la Idea que es troba molt lluny de la Idea mateixa.[256]

Tanmateix, quan hom tracta ens geomètrics, té la necessitat de preguntar-se: la Idea no és, de fet, una figura —«ideal», si es vol, però una figura —i, de retruc, una imatge? La idea «Pentàgon» està deslligada de la figura «pentàgon»? La resposta, massa elemental per a poder aclarir res, és: «Aquesta figura concreta d'un pentàgon no pot ser «El Pentàgon» perquè, al seu costat, hi podem dibuixar una altra figura «pentàgon» més gran o més petita». Però la qüestió és: una figura concreta (ideal) de pentàgon no és «El Pentàgon»? La mida afegeix o treu res a la idea «Pentàgon»?[257]

I, a més, ens podem demanar si no és veritat que les figures dels *Elements* són ideals? Respondrem aquesta pregunta —que no és gens trivial— amb dos exemples concrets que, al nostre entendre, posen de manifest aquest caràcter «ideal» de les figu-

255. Pla (2016*b*), p. 294 i següents.

256. Un cas absolutament clar de la «relativitat» de les figures la trobem en el llibre V dels *Elements*, en el qual Euclides estableix les propietats que lliguen les magnituds, en general, amb les operacions d'addició, sostracció, multiplicació i quocient o raó, però en el qual no disposa de cap figura que serveixi per a representar una magnitud, ja que aquesta Idea no té definició. En veritat, recorre a simples segments, que no són la figura d'una magnitud, un concepte massa genèric.

I això ens obliga a preguntar-nos: quina és la imatge platònica i quina és la figura geomètrica de la Idea de magnitud?

257. Però se'ns planteja la qüestió següent: la imatge platònica vinculada a la Idea és, en essència, única, i això fa que no sigui el mateix que la figura geomètrica? No hi ha, però, una figura geomètrica ideal?

res, en aparença concretes i reals. D'entrada, hi ha les figures «impossibles», que el geòmetra alexandrí sap que són incorrectes, en les quals «dibuixa(?)», «exposa(?)» allò que la hipòtesi de l'absurd imposa, com ara el cas de la proposició EI 6,[258] primera ocasió en la qual l'usa en els *Elements*.

D'altra banda, la voluntat implícita que la figura sigui independent del cas concret fa que, dues vegades en el llibre primer, Euclides vegi la necessitat de considerar «rectes il·limitades en acte», i que contravingui, així, les restriccions aristotèliques i les pròpies.[259] Aquests casos són EI 12 i EI 22.[260]

Finalment, en altres ocasions, incapaç de basar la demostració en una sola figura, recorre «als casos», com ja hem indicat en l'apartat 3.2.5 (pàgines 82-83). Amb el recurs als casos passa de la dependència de la figura a la independència. Per exemple, estableix dues proposicions —diferenciant-les— a EII 5 i EII 6,[261] i també a EII 12 i EII 13.[262] Altres vegades, usa només una proposició, però en la demostració analitza els casos i introdueix les figures que necessita en cada ocasió, com ara, per exemple, a EIII 25.[263]

**3.2.7*b* La imatge geomètrica és limitada**. En segon lloc, volem posar de manifest que les figures sempre són «limitades» (C.2.2$g_2$, pàgina 222).[264] L'única excepció explícita a la limitació d'una figura la trobem quan necessita definir els segments paral-

258. Pla (2018), p. 96-97.
259. Pla (2016*b*), p. 351.
260. Pla (2018), p. 15-16, 77, nota 217, p. 103-104 i p. 116-117.
261. Pla (2018), p. 162-166.
262. Pla (2018), p. 177-179.
263. Pla (2018), p. 218-220.
264. Plató, en el *Menó*, C.2.2$g_3$ i $g_4$ (pàgines 223-224), parla de la rodonesa (*στρογγυλότης*), que considera una figura, i també de la recta i d'altres objectes. I es pregunta què tenen en comú.

En el cas del cercle, an-Naīrīzī († 922) distingeix «cercle» i «circumferència», i això fa que tingui el sentit precís que ha de tenir, perquè són les circumferències —i no pas els cercles— les que no es poden tallar en més de dos punts. EIII 10, Pla (2018), p. 190.

lels a DI 23.[265] En l'ús concret, però, sempre maneja segments i, per tant, les «rectes» són limitades. Fins i tot, el postulat P 5 estableix una condició suficient perquè «dos segments rectilinis, convenientment prolongats [a partir d'un segment finit], es tallin [en el finit, naturalment]».[266]

Fixem-nos en les definicions DI 3 i DI 6:[267] «Els extrems d'un segment són punts [d'una superfície, línies].» Creiem fermament que ser conscients d'aquesta característica és imprescindible si volem comprendre la manera com procedeixen els geòmetres grecs —en síntesi, Euclides— quan fan geometria. És per aquesta raó que nosaltres, en aquest volum, com en els anteriors i en els següents, quan parlem de «rectes» en el sentit grec, usem sempre l'expressió *segment*. Fins i tot en el cas de «[rectes] paral·leles». Aquesta restricció, limitació, és la que fa que el postulat P 2 tingui sentit.[268]

**3.2.7*c* Les demostracions figurals**. En tercer lloc, Euclides usa fets o situacions que queden justificats perquè així ho «mostra» la figura i no pas per les definicions, els postulats o les nocions comunes. El cas potser més sorprenent el trobem en la demostració d'EI 1, tot just a l'inici dels *Elements*.[269] Es tracta d'una proposició elemental però alhora d'un «element» indispensable de les proposicions que venen després. Són «llacunes» en la construcció hipotètica de la geometria. Creiem que la necessitat de recórrer a allò que la figura mostra de manera efectiva no forma part intencionadament del sistema aristotelicodeductiu que es vol bastir.[270]

265. Fixem-nos bé en la definició i veurem que es tracta de segments. Altrament, no els podríem prolongar. PLA (2018), p. 81.

266. PLA (2018), p. 83.

267. PLA (2018), p. 77.

268. PLA (2018), p. 82 i, en particular, nota 269.

269. PLA (2018), p. 86-89.

270. El fet que no s'assolís l'objectiu no ens ha d'estranyar, si tenim present que el primer que el va assolir va ser David Hilbert, l'any 1899, i

Hi ha autors que, atesa aquesta limitació o mancança de la geometria grega, hi atribueixen una dependència «figurativa». Fins i tot, van més enllà i defensen la naturalesa «figurativa» intrínseca dels *Elements*.[271]

Discrepem totalment d'aquesta apreciació perquè tenim en compte la distinció entre «teorema» i «problema» i, en particular, el valor «existencial» dels problemes, que ja hem comentat en l'apartat 3.2.3 (pàgines 79-81) i que retrobarem en l'apartat 3.2.11 (pàgines 95-96).

La necessitat d'establir aquesta existència, en el sentit expressat per Aristòtil,[272] és la que justifica els postulats 1 i 3, que —juntament amb el 2— proporcionen les eines constructives «ideals».[273] I, naturalment, a partir d'un cert moment, aquesta existència justifica també el postulat cinquè. Les eines que proporcionen aquests postulats són les úniques permeses en la construcció.[274] No n'hi ha d'altres. Solament podem acceptar com a figura allò que hem construït prèviament perquè, en tant que és construïble, esdevé ideal.

### 3.2.8 L'infinit

La importància de l'infinit en el pensament grec ha quedat palesa a la primera part d'aquesta *Història*, i d'una manera molt

que ho va fer recorrent a un «formalisme» incipient però força estructurat. Si no atenem a l'existència dels polígons regulars, el que necessita el geòmetra és el «transport de segments», que estableix a Ei 2 i que depèn d'Ei 1.

271. La defensa d'aquesta posició intel·lectual hauria d'explicar com s'eviten les fal·làcies, atès que la dependència figurativa estricta hi mena gairebé necessàriament. En aquest context, no ens ha d'estranyar que Euclides elaborés un tractat sobre fal·làcies, § 4.1.3 (pàgines 116-119).

272. Pla (2016*b*), § 4.5.3, p. 346 i següents.

273. Pla (2018), p. 81-82.

274. Caldrà esperar la genialitat de René Descartes per adonar-se, d'una manera clara i explícita, dels límits que els grecs s'havien imposat a si mateixos en la construcció geomètrica. Però l'època i el llenguatge ja seran uns altres. Pla (1987).

particular en parlar de Zenó, de l'atomisme i de la concepció aristotèlica.[275] Ras i curt, els pensadors grecs prenen opcions que, directament o indirectament, afecten la presentació dels *Elements*:

1. Les magnituds són potencialment divisibles, és a dir, no són atòmiques. Dit d'una altra manera, els àtoms no hi tenen cabuda.
2. L'infinit en acte no és acceptable, solament se n'admet la possibilitat, és a dir, la potència.

I, segons l'opinió i l'autoritat d'Aristòtil: «Això[276] *no pren res als geòmetres* perquè l'infinit en acte *no els cal per a res*, en tenen prou amb la possibilitat de poder prolongar un segment tant com sigui necessari.»[277]

Aquest pensament serà acceptat pels geòmetres grecs més notables, Euclides i Arquimedes, i, naturalment, per tots els qui en depenen en les seves recerques i en la manera de procedir. Exclouen, doncs, conceptualment el «pas al límit». I, de retruc, les proposicions que porten a fonamentar longituds, superfícies i volums s'estableixen sempre en termes de raons i es demostren per doble reducció a l'absurd.

Però la no acceptació de l'infinit en acte comporta algunes dificultats que Euclides posa de manifest, com podem veure en l'anàlisi del llibre I.[278] I no el pot evitar en la definició de segments paral·lels a DI 11 —«prolongats indefinidament».[279]

Tampoc no el pot evitar a EI 12 i EI 22.[280] Posar de manifest la raó per la qual, en aquestes dues proposicions, es necessita l'infinit en acte és molt interessant i rellevant, i no volem deixar passar l'ocasió sense fer-ne cap comentari. En aquest cas li

275. PLA (2016*b*), p. 208-209, 210-213, 228-234 i 348-351.
276. En clara referència a l'ítem 2.
277. PLA (2016*b*), C.11.6$h_1$, p. 595.
278. PLA (2018), § 1.3.1, p. 13-18.
279. PLA (2018), p. 78.
280. Vegeu la nota 260 (pàgina 87).

cal perquè vol que la demostració sigui general i no depengui de la figura concreta que acompanya la demostració. Això deixa clar, una vegada més, el caràcter ideal —en el sentit geomètric del terme— de les figures, del qual ja hem parlat en l'apartat 3.2.7 (pàgines 86-89). Per exemple, en el cas d'EI 22, Euclides necessita poder col·locar els tres segments donats —independentment de la llargada que tinguin— damunt d'un segment rectilini de forma general. Això l'obliga a considerar una semirecta [infinita], perquè un segment podria ser deficient i, aleshores, l'aplicació adequada del postulat P 2 dependria de la llargada que tinguessin els tres segments junts. A més, quan els ajuntés es trobaria amb el mateix problema.[281]

▶ **Exercici 5**. Proveu que és possible demostrar les proposicions EI 12 i EI 22 sense recórrer a rectes il·limitades. ◀

### 3.2.9 Els conceptes de lema, cas, porisma, objecció i reducció

Procle estableix aquests termes i els vincula a la dicotomia que hi ha entre «problema» i «teorema». Ho fa en aquest ordre i amb aquestes descripcions breus (C.2.2$h_1$, pàgines 225-226):

**3.2.9*a* Lema** (*λῆμμα*). Proposició que s'invoca per establir-ne una altra. De fet, és un element immediat d'una proposició.[282] Exemple concret: «Dos segments diferents no poden contenir una part comuna», element necessari per a la correcció d'EI 4.[283] Un altre exemple: EI 7 és un lema d'EI 8.[284] Amb un lema previ es podria haver establert EI 19 de manera directa.[285]

---

281. Vegeu el problema que planteja l'addició de segments a EI 2. PLA (2018), p. 89, nota 279, i també p. 82, nota 250.

282. PROCLE (1873), § 73, 3, edició anglesa, p. 60, i, francesa, p. 66.

283. PROCLE (1873), 216, 1, edició anglesa, p. 165, i, francesa, p. 190. PLA (2018), nota 263, p. 86 i 91-93.

284. PLA (2018), nota 315, p. 98.

285. PROCLE (1873), edició anglesa, p. 205-209 i 318-322, i, francesa, p. 224-228 i 272-275.

**3.2.9*b* Cas** (*πτῶσις*). Construcció que pot dependre de la posició dels punts, els segments, els plans o els sòlids.[286]

**3.2.9*c* Porisma** (*πόρισμα*). Proposició, normalment no demostrada, que deriva immediatament de la que s'acaba d'establir. Avui es coneix amb el nom de *corol·lari* (D.2.1*a*, pàgines 258-261).[287]

▶ **Exercici 6**. Com a porisma del fet que «els angles que s'oposen pel vèrtex són iguals», tenim que «quan dos segments es creuen els angles que formen valen quatre angles rectes»? ◀

**3.2.9*d* Objecció** (*ἔνστασις*), també anomenada *oposició*. Enunciat que no estableix necessàriament la veritat de la proposició, sinó que anorrea la proposició oposada i, de retruc, posa de manifest l'error de qui la manté. Quan l'objecció es pren com a hipòtesi de l'absurd, esdevé la base de la reducció a l'absurd.

**3.2.9*e* Reducció** (*ἀπαγωγή*). Enunciat que transporta la dificultat d'un problema a un altre que, en principi, és més simple. L'exemple més adient d'això és la reducció de la duplicació del cub a l'obtenció de dues mitjanes proporcionals.[288]

### 3.2.10 El moviment i la torsió

Una qüestió que no es pot evitar perquè es troba, de manera més o menys implícita, en les nocions comunes i en els postulats és la dualitat «moviment/torsió».

**3.2.10*a* El moviment**. No podem ometre que, en els *Elements*, Euclides recorre al moviment. Ho fa en dues ocasions i, al nostre entendre, de maneres essencialment diferents. En el lli-

286. Això demostra la importància de la disjunció de casos com a mètode demostratiu. El terme grec, *πτῶσις*, pot estar lligat a la paraula *πίπτω*, en el sentit de 'caure' un dau.

287. Procle (1873), § 212, 13, edició anglesa, p. 166, i, francesa, p. 188. El terme *porisma* deriva de la paraula grega *πορίσω*, 'que proveeix'. Pel que fa a l'obra *Porismes* d'Euclides, vegeu § 4.2.1 (pàgines 120-128).

288. Pla (2016*b*), § 3.4.7, p. 242 i següents.

bre XI, usa el moviment circular al voltant d'un segment precís d'algunes figures planes —d'un diàmetre en el cas del cercle, d'un catet en el del triangle rectangle i d'un dels costats en el d'un rectangle— per a definir, respectivament, l'esfera, el con i el cilindre.[289] Es tracta, doncs, de moviments rotatoris fets a l'espai per a aconseguir sòlids a partir de figures planes. Cal, doncs, que tinguem present aquesta mena de «moviment» de figures planes perquè l'usa en un dels tres puntals del sistema deductiu: les definicions. Un cop acceptades aquestes definicions, però, no afecten el procés demostratiu. És a dir, en les demostracions s'evita el moviment.[290]

En canvi, en el llibre I trobem el moviment de manera absolutament explícita en les demostracions d'EI 4 i EI 8.[291] De fet, usa l'expressió «apliquem» (*ἐφαρμόζω*, 'col·locar al damunt') per a designar un moviment. Hi presenta dos triangles amb unes certes característiques —CAC i CCC— i vol demostrar que són iguals. El procediment que utilitza és l'aplicació dels elements iguals damunt dels elements iguals i la comprovació que, aleshores, els dos triangles s'identifiquen, se superposen.

Però això ens porta a plantejar-nos una qüestió:[292] com fa l'aplicació? És possible que pensem que, tractant-se de geometria plana i no havent-hi introduït encara l'espai, la fa al mateix pla, és a dir, desplaça —en el sentit de fer-lo lliscar— un dels triangles damunt de l'altre fent coincidir els elements congruents. Ras i curt, es mou per desplaçament sobre el pla i, si cal, gira l'objecte geomètric.

289. Són, respectivament, DXI 14, 18 i 21. PLA (2020), p. 428-429. El fet d'unificar les tres definicions fa que, a l'hora de definir l'esfera, no generalitzi, a l'espai, la definició de cercle del llibre I. DI 15, PLA (2018), p. 79.

290. Aquesta mena de moviment no és estrany en alguns treballs d'Arquimedes. Vegeu PLA (2020).

291. PLA (2018), p. 91-93 i 99-100.

292. Aquesta idea ja va aparèixer quan vam analitzar el possible mètode de Tales. PLA (2016*b*), § 2.2.4, p. 73 i següents.

Aquí agafen força dos fenòmens:

1. De vegades, s'han de distingir els termes *congruent* i *igual*.[293] Això fa que l'expressió «Les coses que coincideixen són iguals» tingui entitat. Però, com cal entendre *coincideixen* si no és com «són iguals»? Tot això porta a establir la noció comuna Nc 4 en els termes següents: «Les coses que són congruents són iguals.»[294] És a dir, si es desplacen i, un cop desplaçades, coincideixen —se superposen—, vol dir que ja eren iguals abans. S'exclou així que, en desplaçar-se, es deformin.

2. El postulat P 4 diu: «Tots els angles rectes són iġuals.»[295] Recordem que, quan un segment cau damunt d'un altre, determina dos angles adjacents. Quan «aquests dos» angles són iguals, són «angles rectes». Res no garanteix, però, que dos angles rectes determinats per un parell de segments que es tallen i uns altres dos determinats per un altre parell de segments que es tallen siguin iguals entre si.

► **Exercici 7**. Considereu dues parelles d'angles adjacents iguals. Desplaceu una parella damunt de l'altra. Constateu que s'apliquen, s'ajusten, que són congruents i, per tant, iguals. ◄

Aquest exercici posa de manifest que Euclides, introduint el postulat P 4, mira d'evitar el moviment, igual que en la demostració del tercer criteri d'igualtat de triangles —ACA— a Eɪ 26.

**3.2.10*b* La torsió**. En la geometria, Euclides imposa, de manera indirecta, que els segments rectilinis no tenen torsió i que el pla no torç objectes en els desplaçaments.[296]

---

293. En aquest context, cal tenir en compte que Euclides usa l'expressió *igual* per referir-se a superfícies i cossos que tenen una mateixa àrea o un mateix volum però formes diferents, que no són superposables, és a dir, a objectes geomètrics «equivalents».

294. En grec: *Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ'λλήλα ἴσα λλήλοις ἐστιν.*

295. En grec: *Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας λλήλαις εἶναι.*

296. Penseu què passa en un objecte geomètric —per exemple, un triangle— dibuixat al fons d'una banyera quan el desplacem per les parets.

Aquesta no torsió la imposa, indirectament, per la manera com enuncia P 5: «Quan dos segments rectilinis són tallats per un segment de manera que els angles interns d'un mateix costat són [junts] inferiors a dos angles rectes, els dos segments "es tallen necessàriament"». Evita així que els pugui passar allò que s'esdevé amb una hipèrbola i la seva asímptota: quan les tallem amb un segment, els angles interns d'un mateix costat sumen menys de dos angles rectes i, malgrat tot, «no» es tallen. La torsió de la branca de la hipèrbola n'és la causa.

També trobem la no torsió, implícitament, en la demostració d'EI 16 —«En un triangle, dos angles sumen sempre menys de dos angles rectes»—, una proposició de geometria neutral.[297] La demostració es basa en el fet que un segment que té un extrem al vèrtex d'un angle i s'hi manté a l'interior, per més que el prolonguem no talla mai els seus costats ni surt fora de la part en què estava, és a dir, no es torç.[298]

### 3.2.11 Els problemes i els teoremes

La naturalesa d'aquests dos conceptes, central en la geometria grega, l'hem tractada ja en els apartats 3.2.3 i 3.2.7 (pàgines 79-81 i 86-89) i ens hi hem tornat a referir en els apartats 3.2.1 i 3.2.6 (pàgines 77 i 84-85).[299]

En síntesi, els problemes estan lligats a l'existència dels objectes geomètrics, i els teoremes a la veritat del que s'estableix entre objectes diversos o entre parts d'un mateix objecte. Els primers requereixen, doncs, una construcció. Per tant, tenen un

297. S'anomena *geometria neutral* la que solament depèn de P 1, P 2, P 3 i P 4, és a dir, la que no necessita el postulat dels segments paral·lels. El recíproc, en canvi, és el postulat P 5 i, acceptar-lo, suposa iniciar la geometria euclidiana.

298. Damunt la superfície d'una esfera, aquesta pressuposició d'Euclides no es compleix necessàriament. PLA (2010*b*), p. 60-61.

299. PLA (2016*b*), p. 327-328, i C.8*d*, p. 566-570.

lligam molt íntim amb les figures, amb l'existència de l'objecte geomètric i, subsidiàriament, amb la prova que s'ha construït el que es pretenia. Els segons, en canvi, són proposicions (vegeu § 3.2.12, pàgines 96-98) que requereixen una demostració clara, tan precisa com sigui possible, que s'ajusti a les definicions, els postulats, les nocions comunes i les proposicions prèviament establerts (C.2.2$a_1$ i C.2.2$d_1$, pàgines 210-211 i 215-217, i, en particular, PLA (2016*b*), C.8$d_1$, p. 566 i següents).

### 3.2.12 Les proposicions i les seves parts

Entre els elements de la geometria grega —de fet, de la metageometria grega— el més habitual és la «proposició» —un concepte genèric que engloba tant els teoremes com els problemes i que consta de sis parts, segons Procle: l'enunciació (*πρότασις*),[300] l'exposició (*ἔκθεσις*),[301] l'especificació (*διορισμός*),[302] la construcció (*κατασκευή*),[303] la demostració (*ἀπόδειξις*)[304] i la conclusió (*συμπέρασμα*)[305] (C.2.2$i_1$, pàgines 227-228). En la taula 3.2 (pàgina 97) s'usa el problema EI 1 per tal d'exemplificar-les.

Aquesta manera de presentar-les —que és diàfana en els *Elements* d'Euclides— la retrobem, amb lleugeres variacions, en tots els geòmetres posteriors.

300. És la presentació o l'enunciat de què cal fer, en el cas dels problemes, o de què cal demostrar, en el dels teoremes.

301. És l'exposició dels elements o de les dades que es necessiten per a la qüestió que s'hi tracta.

302. Aquí, el terme *diorisma* no té el significat d'abans —discussió de la possibilitat. Ateny un sentit d'explicació més precisa mitjançant una figura concreta de la propietat que es vol demostrar o del problema que es vol resoldre.

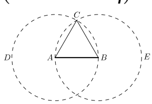
303. En el cas dels problemes, com ja hem comentat, cal construir l'objecte.

304. Tant en el cas dels problemes com en el dels teoremes, s'ha de provar l'adequació del que s'hi ha construït o la veritat del que s'hi afirma.

305. Hem assolit l'objectiu.

En parlar de les proposicions, tant si es tracta de problemes com de teoremes, se n'han d'esmentar dos tipus: les proposicions «directes» i les «indirectes». De fet, allò que és directe o indirecte és la seva part demostrativa. En l'enunciat no s'observa aquesta diferència conceptual.[306]

TAULA 3.2. *Les parts de les proposicions*

| | |
|---|---|
| Enunciació (*πρότασις*) | Volem construir un triangle equilàter sobre un segment rectilini. |
| Exposició (*ἔκθεσις*) | Sigui $AB$ el segment donat. |
| Especificació (*διορισμός*) | Volem construir un triangle equilàter de costat $AB$. |
| Construcció (*κατασκευή*)   | Amb centre al punt $A$ i radi $AB$, tirem la circumferència $\bigcirc\, BCD$.<br>I, amb centre al punt $B$ i radi $BA$, la [circumferència] $\bigcirc\, ACE$.<br>Unim el punt $C$ en el qual es tallen [les circumferències] amb els punts $A$ i $B$, i obtenim els segments $CA$ i $CB$. |
| Demostració (*ἀπόδειξις*) | Ara, com que el punt $A$ és el centre de la circumferència $\bigcirc\, BCD$, [el segment] $AC$ és igual a $AB$.<br>Novament, com que el punt $B$ és el centre de la circumferència $\bigcirc\, ACE$, [el segment] $BC$ és igual a $BA$.<br>Però, aleshores, queda establert també que [el segment] $AC$ és igual a $AB$.<br>Per tant, cada un dels segments $CA, CB$ és igual al $AB$.<br>I, com que coses iguals a una mateixa són iguals entre si, [el segment] $CA$ és igual a[l] $CB$.<br>Per tant, els tres segments $CA$, $AB$ i $BC$ són iguals. |
| Conclusió (*συμπέρασμα*) | D'això en resulta, doncs, que el $\triangle\, ABC$ és equilàter i que s'ha construït sobre el segment donat $AB$, tal com es demanava. |

Les proposicions «directes» són aquelles en les quals s'estableix el que han enunciat per deducció, pas a pas, a partir de les definicions, els postulats, les nocions comunes i les altres propo-

306. Per a una exposició més detallada, PLA (2010*b*), capítol 2, § 5, p. 49-59, i (2012), p. 53-60.

sicions establerts prèviament —és a dir, a partir d'elements anteriors, per exemple, EI 1, 2, 3 i 4. Però un cas paradigmàtic d'això, tot just a l'inici del llibre I, EI 5, afirma que: «En tot triangle isòsceles —amb dos costats iguals— els angles de la base també són iguals.» Aquesta demostració és senzilla i, alhora, molt instructiva i elegant.[307]

Les proposicions «indirectes»,[308] en canvi, són aquelles en les quals se suposa que el que es demana —que és, precisament, el que es pretén demostrar— és fals. En parlarem en l'apartat 3.2.14 (pàgines 101-102). Ara solament volem posar en relleu la figura que acompanya la demostració. Es parteix del convenciment que allò que es vol establir—que se sap que és cert— és fals. I, per fer-ho, s'usa una figura que mostra aquesta falsedat. Òbviament, aquesta figura «no és possible» i qui la fa ho sap. És, per tant, com ja hem indicat abans, una figura que «no és real», és un constructe ideal que ha de servir per a acompanyar el raonament totalment abstracte. El primer cop que Euclides usa aquesta metodologia és en la proposició EI 6,[309] en la qual assevera el recíproc d'EI 5: «Si els dos angles d'un triangle són iguals, els costats que els subtendeixen també ho són i el triangle és isòsceles».[310]

307. És un dels textos formatius que haurien d'acompanyar un bon ensenyament de la matemàtica.

308. Insistim: de fet, en aquestes proposicions, el que és «indirecte» és la demostració.

309. En aquests casos —i, en particular, en aquest cas concret—, copsar el camí que l'autor segueix en la demostració és molt més delicat i complex que no pas quan el teorema és directe. Tanmateix, amb l'ajut del mestre o la mestra, val la pena estudiar-lo pas a pas i analitzar-lo com un element formatiu per a entendre una de les maneres de procedir del raonament matemàtic: la reducció a l'absurd.

310. Notem que, quan dues qualitats són equivalents i se n'ha usat una per a definir l'objecte, es pot arribar a la conclusió que també es podria haver usat l'altra.

### 3.2.13 La raó i la raó composta

Una de les qüestions que es van plantejar a l'Acadèmia de Plató, derivada de l'existència de magnituds incommensurables, va ser la manera d'estendre el concepte de raó —que en els primers pitagòrics era numèrica i, per tant, relativament clara— a magnituds incommensurables.[311]

La raó és un dels conceptes clau de la geometria grega, com hem pogut observar en el volum Pla (2016*b*). Euclides el recull —amb decisió i fermesa— en el llibre v dels *Elements* i, a partir d'aleshores, l'aplica amb fonament i rigor en els llibres vi, x, xii i xiii. Un cop desapareguda la possibilitat de recórrer al nombre a causa de la incommensurabilitat, l'únic recurs que quedava als geòmetres grecs era el concepte eudoxià de «raó».

Però el concepte de raó comporta un problema, no gens elemental, que ja vam trobar en analitzar algunes qüestions suggerides per la duplicació del cub i el mètode per generalització d'Hipòcrates de Quios.[312] Ens referim a la «raó composta», de la qual ja vam parlar en l'ítem $b_2$ d'aquell apartat.

La raó composta és un concepte que no es pot evitar i amb el qual Euclides topa frontalment a Evi 23 en el fet següent: «La raó entre $K$ i $M$ és "la raó composta" de les raons $K$ i $L$, i $L$ i $M$.» També la retroba en el llibre xii en parlar de sòlids semblants.[313] I novament la necessita a Eviii 5, és a dir, en l'àmbit de l'aritmètica, que, en principi, és més fàcil d'entendre i manejar.

I, si bé és cert que Euclides a Dv 9 i Dv 10 estableix la definició de raó doble i triple en l'àmbit de les magnituds, ho fa

311. Com hem vist en Pla (2016*b*), § 4.2.5, p. 313 i següents, aquesta extensió l'aconseguí Èudox.

312. Vegeu § 3.4.7 de Pla (2016*b*), p. 241 i següents,.

313. Per a completar aquest concepte i l'ús que en fan Euclides i Arquimedes, Frajese (1974), nota 3, p. 485.

en el cas particular de les raons contínues, que són l'objecte d'estudi del llibre VIII.[314]

Per a poder disposar de la definició de *raó composta*, caldrà esperar l'obra del matemàtic escocès Robert Simson, que la dona només per a raons contínues (C.2.2$k_1$, pàgines 229-230).[315]

El cas general de raó composta queda, tanmateix, sense definició a causa de la complexitat que implica definir de manera rigorosa la raó composta de les raons entre les magnituds $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, i $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{D}$, quan les magnituds $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{C}$ són diferents.[316] En la mentalitat de la matemàtica grega, això només es pot fer considerant la raó entre els rectangles de costats $A$ i $C$, i $B$ i $D$,[317] una apreciació que podem estendre a la raó composta de tres raons —les que hi ha entre els segments $A$ i $B, C$ i $D$, i $E$ i $F$— usant els paral·lelepípedes que generen els tres antecedents i els tres conseqüents —$A, C$ i $E$, i $B, D$ i $F$.[318] Això darrer, malgrat

314. De fet, en la terminologia grega, les raons contínues corresponen a allò que avui anomenem *progressions geomètriques*.

315. La proposició EVI 23 li suggereix la definició de *raó composta*, que intercala entre les definicions DV 11 i DV 12. SIMSON (1756), edició anglesa, p. 94-95. Vegeu, tanmateix, HEATH (1925), edició de 2002, p. XXIX.

316. Usem la tipografia alemanya $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ per a indicar magnituds que no són segments, i reservem la normal $A, B, \ldots$ per a indicar punts i segments.

317. Tal com hem insinuat a PLA (2016*b*), p. 242.

318. De fet, es tracta de la situació següent (PLA (2016*b*), p. 241-242): tenim la «proporció contínua» $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D}$. La raó doble és la de $A$ i $C$ i la de $B$ i $D$ —que correspon al quadrat de la raó d'un d'ells. És a dir, amb un abús clar del llenguatge formalitzat, que caldria justificar d'alguna manera, $(\frac{A}{B})^2 = \frac{A}{B} \times \frac{A}{B} = \frac{A^2}{B^2}$. Doncs bé, aquesta raó és la dels rectangles de costats $A$ i $C$, i $B$ i $D$. És a dir, $\frac{A}{C} = \frac{B}{D} = \frac{A \times C}{B \times D}$, ja que $\frac{A}{C} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \times C}{B \times D}$, acceptant el principi de substitució d'iguals. Òbviament, acceptem que, si $\frac{AB^2}{CD^2} = \frac{MN^2}{OP^2}$, aleshores $\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{OP}$.

Això ho podem estendre al cas $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \frac{D}{E}$, que porta a la raó triple —que és la dels paral·lelepípedes de costats $A, C$ i $E$, i $B, D$ i $F$. Però, en l'àmbit de la geometria, no podem anar més enllà.

Una situació diferent és la que es presenta en l'aritmètica, com podem constatar en el llibre VIII.

les limitacions conceptuals que implica, només té sentit quan les magnituds són segments rectilinis, perquè la geometria grega no disposa d'objectes «compostos» per a poder-los comparar entre si.[319]

Cal esmentar, però, de passada, que la raó composta de dues raons —tant en el cas continu com en el general— no s'ha de confondre amb la «composta d'una raó» (DV 15) i la seva aplicació a les proporcions (EV 18): «Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ i $\mathfrak{D}$ són quatre magnituds arbitràries, $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ implica que $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}+\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}$.»[320]

### 3.2.14 La reducció a l'absurd

A la primera part d'aquesta història de la matemàtica grega també vam trobar un recurs deductiu irrenunciable, que Aristòtil consolidaria en diversos indrets i exemplificaria en la demostració, de caràcter aritmètic, de la incommensurabilitat de la diagonal d'un quadrat amb el seu costat (C.2.2$j_2$, pàgina 229).[321]

319. És clar que, en l'àmbit geomètric, podem suposar que $A$ i $B$ són rectangles i $C$ i $D$, segments rectilinis. Vegeu l'anàlisi que fa Descartes quan planteja l'extensió del problema de les tres o les quatre rectes. Pla i Viader (1999), nota 58, p. xxvi.

320. Fixem-nos que la composició de raons és difícil d'explicar —si bé no ho és justificar-ne la necessitat— quan s'empren segments i s'empra per a magnituds en general. És molt difícil de justificar, fins i tot com a concepte, com a idea. En canvi, la «composta d'una raó» no presenta cap dificultat. Si l'antecedent i el consegüent són de la mateixa mena, quan s'aplica a proporcions és fàcil de justificar i establir. De fet, és una eina «operativa» en el sentit que, juntament amb d'altres, permet que les proporcions siguin operatives, manejables i útils en les demostracions. En aquest cas, algebraicament, diu: «Si a dues raons iguals, s'hi afegeix la unitat, s'obtenen dues raons iguals». De fet, això és una conseqüència de Nc 2. Però considerar la composició de raons en el context de la teoria de la proporció grega no és tan senzill.

321. Sembla que, com a eina de normalitat, va ser introduïda en el raonament pels estoics, però en veiem la utilitat en demostracions de caràcter matemàtic en els *Analítics primers* d'Aristòtil. Per exemple, quan

És, però, Alexandre d'Afrodísia, en el seu comentari d'aquest passatge d'Aristòtil, qui n'aclareix el significat (C.2.2$j_3$, pàgina 229).

Ens referim a la «reducció a l'absurd» (*ἡ εἰς τὸ ἀδύνατον ἀπαγωγή*)[322], a les demostracions «per l'impossible» (*ἡ διὰ τοῦ ἀδύνατου δεῖξις*) o (*ἀπόδειξις*)[323] i a les «proves que menen a l'impossible» (*ἡ εἰς τὸ ἀδύνατον ἄγουσα ἀπόδειξις*).[324]

Aquesta és una tècnica totalment irrenunciable en la metodologia deductiva de la geometria grega, en general, i dels *Elements*, en particular.[325] Com ja hem indicat a la pàgina 97, la demostració d'aquestes proposicions no és directa, com fa palès el text d'Aristòtil C.2.2$j_1$ (pàgines 228-229).

Val la pena indicar, enllaçant amb l'apartat de les divisions (pàgines 82-83), que, malgrat el caràcter dual de la lògica emprada en el raonament geomètric, a vegades la negació comporta dues o més possibilitats. Així, si es nega que un angle sigui recte, s'obre la possibilitat que sigui agut o obtús. Algunes vegades, fins i tot s'ha de tractar cada cas per separat.

Sovint, en les demostracions directes, també es distingeixen casos, el de l'angle recte, l'agut o l'obtús. EIII 25 ofereix un exemple en el qual Euclides proporciona tres figures, cada una apropiada a cada un.

### 3.2.15 El mètode del tangram generalitzat

En els *Elements*, abans de disposar de la teoria de la proporció —és a dir, els quatre primers llibres, en els quals estableix la ge-

demostra que $\sqrt{2}$ no és racional [és irracional]. PLA (2016*b*), A6.13.2$d_3$ i A6.13.2$d_4$, p. 436.

322. ARISTÒTIL (2007), 29 b 5a, i 50 a 30, edició castellana, p. 125 i 214.

323. ARISTÒTIL (2007), 39 b 32 i 45 a 35, edició castellana, p. 169 i 193.

324. ARISTÒTIL (2007), 85 a 10, edició castellana, p. 373.

325. Per exemple, en el llibre EI, de les quaranta-set proposicions, deu —en concret, EI 6, 7, 14, 19, 25, 26, 27, 29, 39 i 40— es demostren per reducció a l'absurd. I, en el llibre III, ho fan la majoria.

ometria plana elemental—, Euclides recorre a la tècnica del tangram generalitzat, que depèn també —com la teoria general de la proporció— del postulat P 5. És, doncs, una tècnica estrictament euclidiana. N'assenta l'element bàsic en el llibre I quan estableix la igualtat de les àrees dels paral·lelograms que tenen les bases congruents —és a dir, superposables i, de retruc, iguals— en un mateix segment i el costat paral·lel a la base en un segment paral·lel al que conté les bases. Aquest teorema s'estén, de manera natural, als triangles que tenen les bases congruents en un segment i els vèrtexs en un segment paral·lel al que conté les bases (EI 35, 36, 37 i 38). De fet, amb aquests teoremes, aconsegueix disposar de peces —paral·lelograms i triangles— que, encara que no es poden superposar, tenen la mateixa àrea i[326] són, doncs, substituïbles, les unes per les altres, sense que canviï l'àrea de la figura.[327]

Amb aquesta eina, Euclides pot establir diverses coses: el teorema de Pitàgores (EI 47), l'aplicació d'àrees (EII 5 i 6), la invariància de la potència d'un punt a una circumferència i el fet que aquest concepte caracteritzi la tangència d'un segment que ix d'un punt i incideix en un cercle (EIII 35, 36 i 37). I, finalment, de retruc, la construcció del pentàgon inscrit en un cercle (EIV 11).

FIGURA 3.4. Una pàgina de l'edició dels *Elements* de Ratdolt (∼1482 dC)

326. Nota 293 (pàgina 94).
327. PLA (2010*a*), p. 139-150, i PLA (2009), p. 254-274.

# Capítol 4

# Les obres d'Euclides, llevat dels *Elements*

*Παρ΄ Εὐκλείδη τις ἀρξάμενος γεωμετρεῖν ὡς τὸ πρῶτον θεώρηεμα ἔμαθεν, ἤρετο τὸν Εὐκλείδην, «τί δέ μοι πλέον ἔσται ταῦτα μανθάνοντι»; καὶ ὁ Εὐκλείδης τὸν παῖδα καλέσας, «δός», ἔφη, «αὐτῷ τριώβολον, ἐπειδὴ δεῖ ἐξ ὧν μανθάνει κερδαίνειν».*

JOAN ESTOBEU[328]

Euclides, a més dels *Elements* —als quals hem dedicat els volums *Grècia IIa* i *Grècia IIb*—, va escriure obres més monogràfiques. Ara, doncs, un cop establertes la seva personalitat i les seves aportacions metodològiques, analitzarem els continguts de les seves obres més específiques i tècniques.

328. «Un cop hagué llegit la primera proposició, un jove que s'iniciava en l'estudi de la geometria amb Euclides preguntà al mestre: "Què en trec d'aprendre tot això?". Euclides cridà un esclau i li digué: "Dona-li tres òbols ja que no en té prou d'aprendre. Vol, a més, obtenir-ne un benefici econòmic."» ESTOBEU (1575), edició d'A. Meineke, volum IV, p. 205. En línia a <http://laudatortemporisacti.blogspot.ch/2011/04/anecdote-about-euclid.html>.

Procle (C.1$a_2$, pàgines 206-207) en ressenya, amb més o menys profunditat, les obres següents: *Òptica* (*Ὀπτικά*), *Catòptrica* (*Κατοπτρικός*), *Introducció a l'harmonia* (*Εἰσαγωγὴ ἁρμονική*) —també coneguda com a *Elements de música*—, *De les divisions* (*Περὶ διαιρέσεων βιβλίων*) i *Porismes* (*Πορισμάτων Βιβλία*). I Pappos, en la *Col·lecció matemàtica*: *Dades* (*Δεδομένα*), *Còniques* (*Κωνικῶν Βιβλία*) i *Porismes* (C.3.1$a_1$, pàgines 258-261). Però, a més, també hem d'esmentar *Pseudaria* o *Llibre de les fal·làcies* (*Περὶ Ψευδαρῶν*), *Llocs en superfícies* (*Τόποι πρὸς ἐπιφανεία*) i *Fenòmens* (*Φαινόμενα*).[329]

FIGURA 4.1. Euclides, segons un gravat del segle XVI

A banda dels *Elements*, disposem d'exemplars en grec de *Dades* i *Fenòmens*. I tenen una autenticitat discutible els de *Secció del cànon*, *Òptica* i *Catòptrica*. Per exemple, en particular, *Catòptrica* s'atribueix a Teó d'Alexandria. En àrab, en canvi, disposem de *Divisions de les figures*. Malauradament s'han perdut totalment: *Porismes*, *Llocs de superfícies*, *Raonaments falsos* o *Fal·làcies*, *Introducció a la música*, que segurament és de Cleònides,[330] i *Còniques*, que, quan va aparèixer l'obra d'Apol·loni del mateix nom,[331] més completa i ben estructurada, i matemàticament més interessant, va quedar relegada a l'oblit.

En la taula següent podem veure, en síntesi, les obres principals d'Euclides agrupades per temes i dificultat.

---

329. Alguns dels problemes i de les qüestions que es plantegen en aquestes obres, en particular, a *Dades*, *De les Divisions* i *Porismes*, els proposarem en forma d'exercicis. El lector interessat en una presentació succinta seva pot consultar l'article de M. Caveing, que serveix d'introducció al volum I de VITRAC (1990), en concret, p. 21-28.

330. Vegeu les notes 1, 2 i 3 d'EUCLIDES (2000*a*), edició francesa, p. IX.

331. De fet, aquest treball fa, en l'estructuració i l'estudi de les còniques, un paper tan rellevant com els *Elements* en l'estructuració general de la geometria.

TAULA 4.1. *Obres atribuïdes a Euclides*

| | | | |
|---|---|---|---|
| MATEMÀTICA | Geometria | | Els tretze llibres dels *Elements* (*de geometria*) i dos més apòcrifs (el primer, d'Hipsicles, i el segon, d'Isidor de Milet) |
| | | Elemental | *Dades* |
| | | | *De les divisions* [*de les figures*] |
| | | | *Pseudaria* o *Llibre de les fal·làcies* |
| | | Superior | *Llocs en superfícies* |
| | | | *Porismes* |
| | | | *Còniques* |
| | Astronomia | | *Fenòmens* |
| | Música | | [*Introducció a l'harmonia*] |
| | | | [*Secció del cànon*] |
| FÍSICA | Òptica | | [*Òptica*] |
| | | | [*Catòptrica*] |
| | Mecànica[332] | | *Del lleuger i el pesant* |
| | | | *De la palanca* |

## 4.1 Les obres elementals de geometria

### 4.1.1 *Dades* (*Δεδομένα*)

*Dades* és l'altra obra d'Euclides que, juntament amb els *Elements*, versa sobre qüestions de geometria del pla. Com ja hem dit, sortosament se n'ha conservat una versió en grec.[333] I, a més, és un dels textos que Pappos descriu amb un cert detall en el llibre VII de la *Col·lecció matemàtica*, en l'apartat que es coneix amb el nom d'*El tresor de l'anàlisi* (D.1.1*a*, pàgina 240)

332. Pel que fa als fragments de mecànica, ACERBI (2007), apèndix B, p. 2455-2480.

333. L'edició francesa dels *Elements* de PEYRARD (1814-1818), p. 301-480, en proporciona també el text grec i la traducció francesa. Es basa en un manuscrit del segle X. ITO (1980), en canvi, en dona la traducció llatina.

perquè, d'entrada, l'inclou a la llista dels «llibres que pertanyen al camp de l'anàlisi».[334]

Fonamentalment, aquesta obra és un recull de problemes de geometria —en el sentit de *problema* que hem descrit—[335] relacionats amb els llibres EI, EII, EIII i EIV dels *Elements*. De fet, en constitueix un complement que té com a objectiu apropar l'alumne al maneig dels objectes geomètrics elementals: els triangles, els quadrilàters i el cercle. Pressuposa, però, un coneixement previ d'aquests llibres.[336]

*Dades* analitza el tipus d'informació que es dona en els problemes geomètrics i la seva naturalesa. Comença, com els *Elements*, amb les definicions. En conté quinze que precisen el significat geomètric dels conceptes: donat en magnitud (*μεγέθει δεδόσθαι*), donat en gènere o en forma (*εἴδει δεδόσθαι*) i donat en posició (*ἀπὸ δεδομένου*). El primer concepte s'aplica a les superfícies, els segments rectilinis, els angles i les raons; el segon, a la figures rectilínies, i el tercer, als punts, els segments, els angles i els cercles (D.1.1$c_1$, pàgines 241-243). Les dues primeres definicions són molt importants. La primera s'usa en vint-i-tres de les noranta-quatre dades i la segona en cinquanta.

A continuació, Euclides enuncia i resol noranta-quatre teoremes[337] que mostren que el fet de «donar» alguns elements o relacions d'elements d'una figura geomètrica fa que altres elements o relacions d'elements de la figura quedin ben determinats. A més, especifica com passa això.

Una descripció succinta del contingut d'aquesta obra ens permetrà apropar el lector a la mena de qüestions que s'hi resolen. En proposarem algunes com a exercicis.[338]

334. Vegeu l'apartat dedicat a la dualitat anàlisi-síntesi (pàgines 77) i C.2.2$a_1$ (pàgina 210-211).

335. Vegeu § 3.2.11 i la nota 299 (pàgines 95-96).

336. EUCLIDES (2003), edició anglesa, p. 12-16.

337. Observem que, en el text D.1.1$b_1$, Pappos diu que consta de noranta teoremes.

338. Una síntesi força acurada a <https:ca.wikipedia.org/wiki/Data>.

Les dues primeres proposicions estableixen que:

*a*) Si es donen dues magnituds, la seva raó queda determinada. Dada 1.[339]

*b*) Si es coneix la raó que una magnitud donada té amb una altra, aquesta segona queda determinada. Dada 2.[340]

▶ **Exercici 1**. Proveu:

*a*) La dada 2 enunciada més amunt.

*b*) Les dades 3 i 4: «Si ajuntem [o separem] dues magnituds donades [en magnitud], el total [o el romanent] queda determinat.»

*c*) La dada 5: «Si coneixem la raó d'una magnitud amb una de les seves parts, la raó entre la magnitud i l'altra part queda determinada.»

*d*) La dada 6: «Si coneixem la raó de dues magnituds i les ajuntem, la raó entre la magnitud resultant i cada una de les donades queda determinada.»

*e*) La dada 7: «Si dividim una magnitud en dues parts, la raó de les parts queda determinada.»

*f*) La dada 8: «Si dues magnituds tenen una raó donada amb una tercera, la raó que hi ha entre les dues primeres queda ben determinada.» ◀

La dada vuitena és interessant perquè fa referència a la raó composta (C.2.2$k$, pàgines 229-230).

▶ **Exercici 2**. Proveu:

*a*) La dada 9: «Diverses magnituds $A, B$ i $C$ tenen entre si raons conegudes i també en tenen amb les magnituds $D, E$ i $F$; aleshores les raons d'aquestes darreres magnituds queden totalment determinades.»

---

339. Usarem l'expressió «dada» per a referir-nos a cada un dels problemes proposats en *Dades*. A D.1.1$c_2$ (pàgina 243) podem veure com resol Euclides la primera.

340. Per raons de claredat expositiva i comprensió, emprem el terme *determinat* en el sentit de *donat* ($\delta\epsilon\delta\acute{o}\sigma\vartheta\alpha\iota$) del tipus corresponent, normalment *en magnitud*, que és el que usa Euclides. És a dir, direm: «Si es "donen" uns elements geomètrics o unes relacions, aquests elements o relacions queden "ben determinats".»

*b*) La dada 19: «Tenim tres magnituds. Si la primera és més gran que la segona segons una raó d'una magnitud determinada i la segona ho és més que la tercera segons una altra raó d'una magnitud determinada, aleshores la primera és més gran que la tercera segons una magnitud determinada.» ◀

Una dada interessant —lleugerament diferent de les altres— és la 23: «Si la raó entre dues totalitats, $AB$ i $CD$, és donada i també ho són les raons de les parts de la primera, $AE$ i $EB$, i les parts de la segona, $CF$ i $FD$, tot i que són diferents, aleshores totes [les magnituds] tenen proporcions ben determinades entre si.»

▶ **Exercici 3**. Proveu la dada 23. ◀

La dada 24 és la primera en la qual Euclides passa de les magnituds en general als objectes geomètrics particulars, és a dir, als segments rectilinis, angles de cercles i segments circulars. A partir de la dada 25 apareix el concepte «donat en posició», i a la 26 «donat en magnitud».

▶ **Exercici 4**. Establiu:

*a*) Dada 24: «Si tres segments rectilinis tenen la mateixa raó i coneixem la raó del primer amb el tercer, la raó amb el segon queda determinada.»

*b*) Dada 25: «Si dos segments rectilinis donats en posició es tallen, el punt d'intersecció queda determinat en posició.»

*c*) Dada 26: «Si els extrems d'un segment rectilini es donen en posició, el segment rectilini queda determinat en posició i, a més, en magnitud.» [*Indicació.* Vegeu D.1.1$c_{2g}$ (pàgina 247).]

*d*) Dada 29: «Si un segment es dona en posició i a un punt del segment n'hi apliquem un altre que forma amb un segment donat [amb el punt com a vèrtex] un angle donat, el segment queda determinat [en posició].» ◀

La dada 28 (figura D.8, pàgina 248) és molt interessant, atès que estableix que un segment paral·lel a un altre de donat per un punt donat [exterior a aquest], tots dos en posició, està completament determinat en posició. Es basa, de fet, en la «unicitat» del segment paral·lel a un segment per un punt exterior al segment donat (D.1.1$c_{2h}$, dada 28, pàgina 248).[341]

▶ **Exercici 5**. Sabríeu demostrar que, per un punt $P$ exterior a un segment $AB$, només hi podem tirar un segment paral·lel? [*Indicació.* Necessitem P 5? Vegeu PLA (2018), p. 83-84.] Aquest resultat implica que el segment paral·lel a un altre de donat per un punt donat exterior a aquest és un segment ben determinat en posició? ◀

En aquesta presentació de *Dades*, val la pena recordar tres qüestions molt rellevants en la geometria grega i que hi són tractades directament o indirectament:

*a*) L'aplicació d'àrees.[342]
*b*) La tangent a una circumferència.[343]
*c*) La potència d'un punt a una circumferència.[344]

*a*) Les dades 58 i 59 estableixen que, si un espai donat s'aplica a un segment donat fent que hi manqui [o fent que l'excedeixi en] una figura donada, les dimensions del defecte [o de l'excés][345] queden determinades (D.1.1$c_{2i}$, dada 58, pàgines 248-250). El fet que Euclides torni a aquesta qüestió en les dades 84 i 85 palesa la importància que hi atorga.[346]

▶ **Exercici 6**. Refeu-ho quan l'aplicació es fa per excés. [*Indicació.* És la dada 59. Aquest resultat implica que el segment paral·lel a un segment donat per un punt exterior donat, tots dos en posició, és un segment determinat en posició?] ◀

*b*) La dada 90 estableix que, donada una circumferència i un punt exterior al cercle limitat per aquesta, la tangent del punt a la circumferència queda determinada [en posició] (D.1.1$c_{2j}$, dada 90, pàgina 250).

---

341. Com hem vist en PLA (2018), p. 129-130, Euclides no demostra la unicitat del segment paral·lel a un segment donat per un punt exterior a aquest.

342. PLA (2016*b*), ítem *j* de la geometria de Pitàgores, p. 140 i 149.

343. Vegeu EIII 17. PLA (2018), p. 210-211.

344. Vegeu EIII 35, 36 i 37. PLA (2018), p. 232-237.

345. Usa l'expressió *τὰ πλατή*, que significa 'llargada', però també 'amplada'.

346. PEYRARD (1814-1818), p. 456 i 457; EUCLIDES (2003), p. 207-209.

*c*) Les dades 91 i 92 estableixen que, donats [en posició] una circumferència i un punt exterior [o interior] al cercle limitat per la circumferència, la potència del punt a la circumferència queda determinada (D.1.1$c_{2k}$, dada 91, pàgines 250-251).

▶ **Exercici 7**. Vegeu el text D.1.1$c_{2\ell}$ i refeu-lo quan el punt es troba dins del cercle. [*Indicació.* És la dada 93.] ◀

Cloem aquesta presentació de *Dades* amb la 93, que diu: «En un cercle donat considerem la corda que subtendeix un angle donat. El dimidiem [i considerem els punts que la bisectriu determina en la corda i en la circumferència]. La raó entre la suma dels costats [de l'angle] i la bisectriu és donada. El rectangle format per la suma esmentada i el segment de bisectriu que va de la corda a la circumferència [al costat oposat del vèrtex] també és donat» (D.1.1$c_{2\ell}$, dada 93, pàgina 251).

▶ **Exercici 8**. Proveu allò que estableix la dada 93. [*Indicació.* Vegeu la figura D.12 (pàgina 252).

**Exercici 9**. Siguin $\hat{A}, \hat{B}$ i $\hat{C}$ els tres angles d'un triangle; $a, b$ i $c$, els costats que s'hi oposen; $h_a, h_b, h_c; m_a, m_b, m_c; t_a, t_b, t_c$, les altures, les medianes i les bisectrius que corresponen als costats $a, b$ i $c$; $r$ i $R$, els radis de les circumferències inscrita i circumscrita; $b_a$ i $c_a$, les projeccions respectives dels costats $b$ i $c$ damunt del costat $a$, i $r_a$, el radi de la circumferència tangent al costat $a$ i a les prolongacions dels costats $b$ i $c$. Proveu que cada una de les ternes següents constitueix les dades [suficients] del triangle i indiqueu si queda fixat en magnitud o en gènere:

| | | |
|---|---|---|
| *a*) $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$. | *b*) $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$. | *c*) $b, \hat{A}, h_c$. |
| *d*) $b+c, \hat{A}, h_b+h_c$. | *e*) $b-c, \hat{A}, h_c-h_b$. | *f*) $h_a, t_a, \hat{B}-\hat{C}$. |
| *g*) $h_c, m_c, b_a-c_a$. | *h*) $r, \hat{B}-\hat{C}, b_a-c_a$. | *i*) $R, r_a-r, a$. |

**Exercici 10**. Amb les notacions de l'exercici anterior, construïu els triangles que tenen els elements coneguts següents: *a*) $a, \hat{A}, h_b+h_c$; *b*) $a-b$, $h_b+h_c, \hat{A}$, i *c*) $R, r, h_a$. [*Indicació.* Vegeu Eves (1953), p. 118.] ◀

### 4.1.2 *De les divisions* (*Περὶ διαιρέσεων βιβλίον*)

En el *Comentari* de Procle (C.1$a_2$ i D.1.1$d_1$, pàgines 206-207 i 253), respectivament, trobem l'altra obra de contingut estrictament geomètric. No ens n'ha arribat el text en grec però disposem de fragments seus en llatí (*De divisionibus*), i d'altres d'un manuscrit àrab descobert al segle XIX que conté trenta-sis proposicions,[347] encara que només en demostra quatre.[348]

L'obra s'ocupa de la divisió de figures geomètriques sotmeses a unes raons donades o dividides en dues o més parts iguals. De fet, és un text que tracta fonamentalment de la resolució de problemes. Heró d'Alexandria (segle III), al-Sijzí i Abū-l-Wafā' (segle X), i Leonardo da Pisa i Jordanus Nemorarius (segle XIII), entre d'altres,[349] recuperaran aquesta temàtica més tard.

En definitiva, doncs, aquest llibre mira de construir rectes que divideixen figures donades amb proporcions i formes donades. I, com ja hem dit, una obra del segle III dC d'Heró hi manté algunes analogies. Per exemple:

*a*) Donat un triangle i un punt de l'interior, tireu un segment que passi pel punt i talli el triangle en dues figures de la mateixa àrea.
*b*) Donat un cercle, construïu dos segments paral·lels de manera que la porció del cercle que limitin faci una tercera part de l'àrea del cercle.[350]

L'autor en va demostrar quatre —les divisions 19, 20, 28 i 29— que enunciarem més avall (pàgina 115). De moment, en proposem d'altres en forma d'exercicis.

347. Vegeu la relació a ACERBI (2007), p. 2388-2394.

348. Per a una informació més detallada, EUCLIDES (1915) i, molt exhaustiva, ACERBI (2007), p. 2383-2448. Per a una exposició molt clara i detallada, HEATH (1921), volum I, p. 425-430.

349. ACERBI (2007), p. 2383-2454.

350. SCHREIBER (1987), p. 63-65.

► **Exercici 11**. Resoleu:[351]

*a*) Divisió 1. Dividiu un triangle donat en dues parts iguals mitjançant un segment paral·lel a la base.

*b*) Divisió 2. Dividiu un triangle donat en tres parts iguals tirant dos segments paral·lels a la base.

*c*) Divisió 4. Bisequeu[352] un trapezi amb un segment paral·lel a la base.[353] [*Indicació.* El text d'ACERBI (2007), p. 2388, afirma: «Amb la metodologia usada en el cas del triangle, el trapezi no es pot dividir, mitjançant dos segments paral·lels.»[354]

*d*) Divisió 6. Bisequeu un paral·lelogram amb un segment que passi per un punt d'un dels costats.

*e*) Divisió 10. Dividiu un paral·lelogram en dues parts iguals amb un segment que passi per un punt exterior.

*f*) Divisió 11. Talleu un paral·lelogram amb un segment que passi per un punt exterior i determini una part de superfície donada.

*g*) Divisió 12. Dividiu un trapezi en dues parts iguals amb un segment que passi per un punt que no es trobi a la base més gran. [*Indicació.* Cal que no sigui un vèrtex.]

Què passaria si fos un vèrtex? I si es trobés a la base més gran?

*h*) Divisió 13. Talleu un trapezi amb un segment que passi per un punt interior o exterior de manera que una part tingui una àrea fixada per endavant. [*Indicació.* Cal que talli les dues bases, és a dir, que no passi per cap vèrtex.]

*i*) Divisió 14. Talleu un paral·lelogram amb un segment que passi per un dels vèrtexs i determini una part de superfície donada.

---

351. Usem la notació d'EUCLIDES (1915), p. 30-77.

352. Bisecar s'entén com: «Dividir una àrea o un cos geomètric en dues parts iguals mitjançant un segment o un pla.» ( GEC (1965)) És, doncs, sinònim de 'dimidiar' i de 'dividir per la meitat'.

353. Aquest problema el trobem a la tauleta babilònica AO 17264. PLA (2016*a*), § 2.9.1 i B.6.2*a*, p. 243 i 324, respectivament. O BRACK-BERNSEN i SCHMIDT (1990).

354. En EUCLIDES (1915), p. 35, aquesta divisió és la cinquena. Això fa que a partir d'aleshores la numeració estigui correguda una unitat en un dels textos.

A partir de la divisió 30, es proposen les mateixes divisions però imposant que les parts de la divisió mantinguin una raó $\frac{m}{n}$ donada. Què canvia en un cas i en un altre? ◀

Els enunciats de les divisions que va demostrar són els següents:[355]

Divisió 19. Dividiu un triangle $\triangle ABC$ en dues parts iguals amb un segment $GDH$ que passi per un punt donat $D$ de l'interior del triangle (D.1.1$d_{2a}$, pàgines 253-255).

Divisió 20. Dividiu un triangle $\triangle ABC$ amb un segment $GDH$ que passi per un punt $D$ per tal d'obtenir una part donada (D.1.1$d_{2b}$, pàgina 255).

Divisió 28. Dividiu en dues parts iguals una figura formada per un arc de circumferència i dos segments que es tallen en un punt (pàgines 115-116).

Divisió 29. En un cercle donat, tireu-hi dues cordes paral·leles que determinin una àrea donada (D.1.1$d_{2d}$, pàgines 256-257).

▶ **Exercici 12**. Resoleu les divisions 19, 20, 28 i 29 enunciades més amunt. [*Indicació*. En alguna d'aquestes divisions, es necessita alguna mena de diorisma? Quin? Vegeu D.1.1$d_2$ (pàgines 253-257).] ◀

Considerem ara, com a exemple de la manera que podria haver fet servir Euclides, la divisió 28:

> Divisió 28. Volem dividir en dues parts iguals una figura formada per un arc de circumferència i dos segments que es tallen en un punt.
>
> [*Construcció*.] Sigui $\lhd ABEC$ la figura donada,
> $D$ el punt mitjà de la corda $BC$, [EI 10]
> i $DE$ el segment perpendicular a $BC$ pel punt $D$.[356] [EI 12]
> Unim $AD$. [P 1]

355. Les numeracions corresponen a EUCLIDES (1915). En canvi, en ACERBI (2007) són les divisions 18, 19, 27 i 28.

356. Talla l'arc $\widehat{BEC}$ pel punt mitjà $E$ [EIII 30].

*a*) Afirmo que el segment trencat $ADE$ divideix clarament la figura en dues parts iguals, $ADEC$ i $ADEB$.[357] [P 1] ♣

[*Demostració*.] Pel punt $D$ tirem el segment $DF$ paral·lel a $AE$. [Ei 31]

Aquest segment talla el segment $AB$ pel punt $F$. [P 5]

Unim $EF$. [P 1] ♠

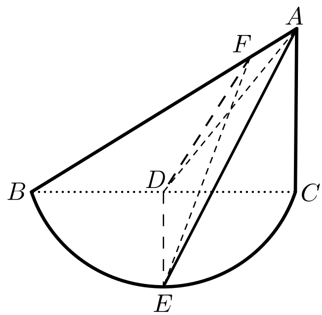


Figura 4.2. Divisió 28

*b*) Aquest és el segment buscat.

En efecte, els dos triangles $\triangle\, AFE$ i $\triangle\, ADE$ són iguals perquè tenen la base comuna [$AE$] i els vèrtexs oposats, $F$ i $D$, al mateix segment $FD$ paral·lel a la base comuna. [Ei 37]

A tots dos hi afegim el triangle mixtilini $\lhd\, AEC$.

Per tant, l'àrea nova $AFEC$ equival a l'antiga $ADEC$, que és la meitat de l'àrea total de la figura.

De retruc, doncs, aquesta àrea nova és la meitat de la figura $ABEC$.

Si la hi sostraiem, el residu $\lhd\, FBE$ és també la meitat de la figura inicial. ♠

En conseqüència, cada una val la meitat d'aquesta figura. ♠[358]

Quina simplicitat i, de retruc, quina elegància!

### 4.1.3 *Llibre de les fal·làcies* (*Περὶ Ψευδαρίων*)

Aquest text —malauradament perdut— tracta dels errors de raonament. El coneixem gràcies a la descripció que en fa Procle

357. Ara cal aconseguir un segment rectilini amb la mateixa propietat. Pla (2016*b*), ítem *d* del problema 6 del capítol 3, p. 155-156.

358. Observem que és una demostració per tangram que segueix les petjades que podem trobar a Ei 47 (Pla (2018), problema 16, p. 62-63 i 149-151), al problema 6 (Pla (2016*b*), p. 155-156) i a la quadratura de les lúnules (Pla (2016*b*), p. 244-249).

(D.1.1*e*, pàgines 257-258). Segons ell, l'obra tenia com a objectiu acostumar els principiants a detectar els raonaments falsos, en particular els que minen els raonaments deductius perquè tenen una aparença de correcció. El text també inclou exemples de paralogismes.[359]

► **Exercici 13**. Recordem que, en els *Elements* d'Euclides, no es diu mai com es construeix un rectangle.

Proveu que, si tirem dos segments perpendiculars a dos segments paral·lels, n'obtenim un. [*Indicació.* Cal P 5?]

**Exercici 14**. Siguin $AB$ i $CD$ dos segments no paral·lels, i $H$ i $K$ punts respectius de cadascun. Tireu els segments $HM$ i $KN$ perpendiculars als segments respectius. Proveu que $HM$ i $KN$ no són paral·lels. [*Indicació.* Cal P 5?]

**Exercici 15**. Proveu que un segment perpendicular a $AB$ ho és als seus paral·lels. [*Indicació.* Cal P 5?]

**Exercici 16**. Fal·làcia 1. Un angle recte és un angle més gran que un angle recte.[360]

Esbrineu quin és l'error que es comet en el raonament següent:

[*Construcció.*] Sigui $\square\, ABCD$ un rectangle. [exercici 13]

Per $A$, tirem el segment $AE$

exterior al rectangle, igual a $AB$ o $DC$, [P 3 i P 1]

que forma amb el segment $AB$ un angle agut (figura 4.3). [Ei 23] ♣

Afirmo que l'angle $\widehat{DAE}$ és alhora recte i més gran que un angle recte.

[*Demostració.*] Bisequem $CB$. [Ei 10]

Obtenim el punt $H$

i, per $H$, tirem un segment perpendicular a $CB$. [Ei 11]

Bisequem $CE$. [Ei 10]

359. El lector interessat pot consultat Rouse Ball (1892), quarta edició, p. 35-42. En proposem tres com a exercici, però en l'obra esmentada n'hi ha sis. Vegeu també <https://cms.math.ca/crux/v29/n6/page393-396.pdf>.

360. Agraeixo al col·lega Agustí Reventós que m'indiqués aquesta fal·làcia en particular. Reventós (2014), p, 16-17. És la primera fal·làcia de Rouse Ball (1892), quarta edició, p. 36-37.

[*Demostració*.] Sigui $\triangle ABC$ un triangle.

Obtenim el punt $K$

i, per $K$, tirem un segment perpendicular a $CE$. [Ei 11]

Com que $CB$ i $CE$ no són segments paral·lels, els segments $HO$ i $KO$ es tallen en un punt.

Anomenem aquest punt $O$. [exercici 15]

Considerem $OA$, $OE$, $OC$ i $OD$. [P 1]

Els triangles $\triangle ODC$ i $\triangle OAE$ són iguals ja que,

com que $KO$ biseca $CE$ i n'és la perpendicular,

$OC$ i $OE$ són iguals. [Ei 4]

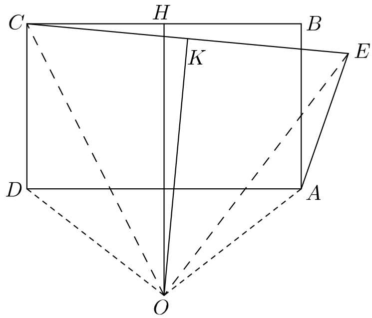



FIGURA 4.3. Fal·làcia 1

Anàlogament, com que $HO$ biseca $CB$ i $DA$

i n'és la perpendicular, $OD$ i $OA$ són iguals. [Ei 4]

Per construcció, també ho són $DC$ i $AE$.

Per tant, els costats respectius dels triangles $\triangle ODC$ i $\triangle OAE$ són iguals

i, en conseqüència, tots dos triangles també. [Ei 8]

Novament, com que $HO$ biseca $DA$ i n'és la perpendicular,

els angles $\widehat{ODA}$ i $\widehat{OAD}$ són iguals.

En definitiva, l'angle $\widehat{ADC}$, que és la diferència de $\widehat{ODC}$ i $\widehat{ODA}$, és igual a l'angle $\widehat{DAE}$, que és la diferència de $\widehat{OAE}$ i $\widehat{OAD}$. [Nc 3]

Però l'angle $\widehat{ADC}$ és recte.

En canvi, l'angle $\widehat{DAE}$ necessàriament és més gran que un angle recte,

ja que és la suma de l'angle recte $\widehat{DAB}$ i del $\widehat{BAE}$, que és agut.

Impossible! ♠

**Exercici 17**. Fal·làcia 2. Qualsevol part d'un segment és igual al segment complet.[361]

361. És la segona fal·làcia de ROUSE BALL (1892), quarta edició, p. 37-38.

[*Demostració.*] Sigui $\triangle ABC$ un triangle.

Per a fixar idees, el suposarem escalè, amb l'angle $\hat{B}$ agut i l'angle $\hat{A}$ més gran que l'angle $\hat{C}$.

Tirem l'angle $\widehat{BAD}$, amb vèrtex a $A$ i costat $AD$, igual al $\hat{C}$.[362] [EI 23]

El segment $AD$ tallarà $BC$ en un punt $D$ [del segment $BC$].[363]

Des del punt $A$, tirem el segment $AE$ perpendicular a $BC$. [EI 12]

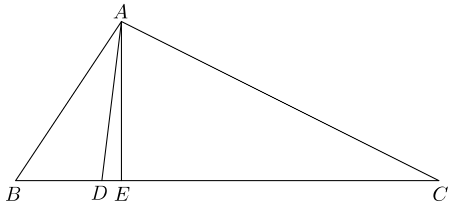



FIGURA 4.4. Fal·làcia 2

De tot això en resulta que els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle ABD$ són equiangles i, per tant, que $\frac{\triangle ABC}{\triangle ABD} = \frac{AC^2}{AD^2}$. [EVI 19]

Ara bé, els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle ABD$ tenen la mateixa altura.

Per tant, $\frac{\triangle ABC}{\triangle ABD} = \frac{BC}{BD}$. [EVI 1]

En conseqüència, $\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{BC}{BD}$ [Nc 1]

i, de retruc, $\frac{AC^2}{BC} = \frac{AD^2}{BD}$. [EV 16]

D'altra banda, $\frac{AB^2+BC^2-2\,BC\times BE}{BC} = \frac{AB^2+BD^2-2\,BD\times BE}{BD}$. [EII 13]

Per tant, $\frac{AB^2}{BC} + BC - 2\,BE = \frac{AB^2}{BD} + BD - 2\,BE$.

I $\frac{AB^2}{BC} - BD = \frac{AB^2}{BD} - BC$.

En definitiva, doncs, $\frac{AB^2-BD\times BC}{BC} = \frac{AB^2-BC\times BD}{BD}$.[364]

Per tant, $BC = BD$, com volíem. [EV 9] ♠

Quin és l'error d'aquest raonament? ◀

Vegeu la fal·làcia exposada en PLA (2016*b*), problema 12, p. 263: «Dos costats d'un triangle [junts] són iguals al tercer», en contra d'allò que estableix Euclides a EI 20.[365]

362. Ens hem de convèncer que un triangle d'aquesta mena és construïble. Pensem en un triangle rectangle arbitrari.

363. S'hi usa el fet que qualsevol segment interior a un angle d'un triangle talla el costat oposat. En aquest cas, P 5 és suficient.

364. Usem recursos de caràcter algèbric que cal justificar geomètricament.

365. Vegeu també <https://cms.math.ca/crux/v29/n6/page393-396.pdf>.

## 4.2 Les obres superiors de geometria

### 4.2.1 *Porismes* (*Πορίσματα*)

L'obra *Porismes* (*Πορίσματα*) podria haver estat una ampliació de la feina d'Euclides amb les seccions còniques,[366] però el significat del títol no és gaire explícit.[367] És una obra perduda que trobem esmentada en dos passatges del text imprescindible de Procle, *Comentari*, però, sobretot, que és objecte d'una llarga presentació en el llibre VII de la *Col·lecció* de Pappos, *El tresor de l'anàlisi*. Esdevé un exemple significatiu, d'un gran abast, de l'enfocament analític.

La paraula *porisma* (*πόρισμα*) admet diverses accepcions. Ja hem parlat del significat de *corol·lari*, que es troba després del comentari del problema quinze dels *Elements* fet per Procle (§ 3.2.9, pàgina 92).

En canvi, segons Pappos, a l'obra euclidiana, *Porismes* designa un enunciat de tipus intermedi entre els teoremes i els problemes. Aquest text, força extens, conté cent setanta-un teoremes i trenta-vuit lemes. Pappos en dona alguns exemples i, en particular, aquest:

> PORISMA 1. Siguin $P, Q$ dos punts donats en posició. Tirem dos segments $PM, MQ$ que intersequen [en un punt $M$ d']un segment $LM$ també donat en posició. Suposem que un segment $PM$ determina en un segment $AX$, donat en posició, un segment $Am$, on $A$ és un punt fixat per endavant. Aleshores, és possible trobar un segment $A'X'$ i un segment $Am$, i en aquest

366. ZEUTHEN (1886), p. 168 i 173-174. Segons Chasles, l'obra contenia proposicions relatives a la teoria moderna de les transversals i la geometria projectiva. En la reconstrucció del text euclidià, aquest autor va trobar la idea de «relació anharmònica». CHASLES (1860), p. 11.

367. HEIBERG i MENGE (1883-1916).

un punt $A'$, de manera que la raó entre el segment $A'm'$ que determina el segment $QM$ a $A'X'$ i el segment $Am$ sigui $\lambda$.[368]

Interpretar el sentit exacte d'allò que cal entendre com a *porisma* i refer eventualment la totalitat o una part dels enunciats de l'obra d'Euclides a partir de les informacions de Pappos ha ocupat nombrosos matemàtics.[369] Les temptatives més conegudes[370] són les de Pierre Fermat (segle XVII)[371] i Robert Simson (segle XVIII).[372] John Playfair, en una seqüel·la al tractat de Simson, mira de copsar l'origen dels porismes.[373]

368. Segons Chasles, en termes actuals, l'enunciat és: «Si es deforma un triangle fent que els costats girin a l'entorn de tres punts donats alineats, i es desplacen dos d'aquests vèrtexs en dos segments rectilinis [i les seves prolongacions] fixos, el tercer vèrtex també descriu un segment rectilini.» Aquest resultat val, en general, per a $n+1$ segments. Chasles (1860), p. 24.

369. Per a una exposició detallada, Chasles (1860), p. 1-61.

370. Albert Girard, en *Traité de trigonometrie* (1626), afirma: «Fa anys que vaig restaurar els *Porismes* d'Euclides, un text que s'ha perdut. Espero que s'editi aviat.» Però o bé s'ha perdut o bé no es va publicar mai.

371. Ho va fer a Fermat (1891), volum I, p. 76-83, i, en línia a <http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/6491350>. Ara bé, almenys dos dels cinc exemples que proporciona cauen fora de la mena de qüestions proposades per Pappos.

372. D'antuvi, Simson (1722) aconsegueix establir les tres proposicions que Pappos enuncia de manera completa. Després aprofundeix l'anàlisi dels porismes a Simson (1776), publicat després de la seva mort. Afirma que la definició de *porisma* de Pappos és massa general i la concreta en els termes següents: «El Porisma és una proposició en la qual es demana que es demostri que un objecte geomètric o diversos estan "determinats" —"donats"— quan un qualsevol d'una infinitat d'objectes "no donats", que manté amb els donats una certa relació, té una certa propietat comuna, que és precisament la que estableix la proposició.»

373. Playfair (1792) observa dos fets: 1) Certes condicions fan que els problemes esdevinguin impossibles de resoldre. 2) Certes condicions fan que les solucions siguin indeterminades o que el problema tingui una infinitat de solucions. I defineix *porisma* en els termes següents: «Un porisma és una proposició que afirma la possibilitat de trobar condicions que facin que un problema sigui indeterminat o susceptible d'una infinitat de solucions.» Vegeu també Chasles (1860), p. 30.

I també s'hi apropa Michel Chasles (segle XIX). Encara que els historiadors actuals no consideren la reconstitució de Chasles gaire acurada, sí que li va servir per a desenvolupar la noció de «relació anharmònica».[374]

Sempre d'acord amb la informació de Pappos, els lemes vinculats als porismes tenen interès històric perquè proporcionen tres resultats molt rellevants de caire projectiu. En termes actuals:[375]

1. La demostració de les propietats harmòniques d'un quadrilàter complet (D.2.1$a_{4a}$, pàgines 265-267).[376]
2. El teorema fonamental que estableix que la raó harmònica de quatre segments rectilinis que es tallen en un punt és constant per a qualsevol transversal. Per tant, hi apareix novament un invariant, en aquest cas projectiu (D.2.1$a_{4b}$, pàgines 267-270).[377]
3. El teorema que afirma que, si tres vèrtexs d'un hexàgon estan arrenglerats i els altres tres també, els tres punts on es tallen els costats oposats de l'hexàgon també ho estan (D.2.1$a_{4c}$, pàgines 270-271).[378]

▶ **Exercici 18**. Proveu la validesa del porisma enunciat a la pàgines 120-121. [*Indicació.* Seguiu les indicacions següents (figura 4.5):[379]

374. CHASLES (1860), p. 74.

375. KLINE (1972), edició castellana, volum I, p. 176-178.

376. Els lemes I, II, IV, V, VI i VII, proposicions 127, 128, 130, 131, 132 i 133 de la *Col·lecció matemàtica* de Pappos, fan referència al quadrilàter complet. PAPPOS (1932), p. 669-680. El lema general és el IV.

377. Els lemes III, X, XIV, XVI i XIX, proposicions 129, 136, 137, 140, 142 i 145 de la *Col·lecció matemàtica* de Pappos, fan referència al teorema fonamental. Vegeu PAPPOS (1932), p. 672-675, 680-685 i 688-692. El lema general és el III.

378. Vegeu els lemes XII, XIII, XV i XVII, proposicions 138, 139, 141 i 143 de la *Col·lecció matemàtica* de Pappos, a PAPPOS (1932), p. 685-688, 689-690 i 693-695.

379. CHASLES (1860), p. 114-115.

[*Anàlisi.*] Atès que volem que $\frac{Am}{A'm'} = \lambda$, hem dividit les rectes[380] $AX$ i $A'X'$ en parts proporcionals pels dos punts $m, m'$,
essent els dos punts de divisió homòlegs a l'infinit.

D'això en resulta que [les rectes] $AX$ i $A'X'$ són paral·leles a segments tirats des dels dos punts $P, Q$ a un cert punt del segment $LM$.

Tirem, doncs, $Pc$ paral·lel a $AX$.

Tenim que la recta $A'X'$ és paral·lela a $Qc$.

Els dos punts $A, A'$ són dos punts homòlegs en les divisions determinades pels punts $m, m'$.

Per tant, les rectes $PA$ i $QA'$ es tallen en $LM$.

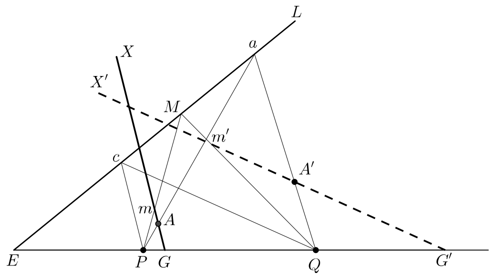


FIGURA 4.5. Porisma 1

Tirem $PA$.

Talla $LM$ en el punt $a$.

Seguidament, considerem $Qa$.

Resulta que el punt $A'$ és damunt d'aquesta recta.

Per fi, volem que $\frac{Am}{A'm'} = \lambda$.

Atès que els punts $G$ i $G'$ pels quals les rectes $AX$ i $A'X'$ tallen, respectivament, la base $PQ$,
són homòlegs en les dues divisions d'aquestes rectes,
tenim que $\frac{AG}{A'G'} = \lambda$.

I això determina $A'G'$ en grandària.

Cal, doncs, que, a l'angle que formen $PQ$ i $Qa$, hi considerem un segment paral·lel a $Qc$ igual a $\frac{AG}{\lambda}$.

Aquest segment satisfarà la qüestió plantejada. ♣

[*Síntesi.*] Considereu els segments $PE, Pc, PM$ i $Pa$ tallats per $LM$ i $AG$
i que els quatre surten del punt $P$.

La resta és trivial si usem el teorema fonamental. ♠]

380. Hem de parlar de rectes perquè, de fet, som al món projectiu.

**Exercici 19**. Lema I. Suposeu que:

1. En un segment, hi ha els punts $A, F, D$ i $G$, de manera que $\frac{AD}{DG} = \frac{AF}{FG}$.
2. Els segments $FE, GE$ i $DB, CB$ es tallen damunt del segment $AB$ [o de la seva prolongació].
3. Els segments que ixen dels punts $F$ i $D$ s'intersequen al punt $K$.
4. Els que ixen dels punts $G$ i $C$ ho fan al punt $H$.

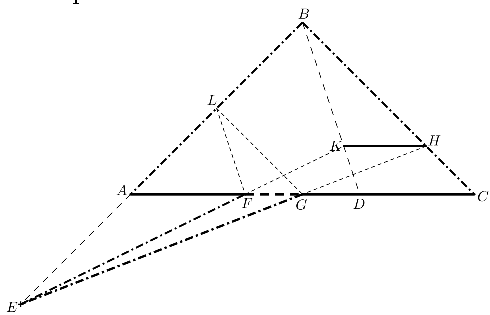


FIGURA 4.6. Lema I dels *Porismes* d'Euclides

Aleshores, el segment $HK$ és paral·lel a $AC$.[381]

Constateu la validesa de les afirmacions del text de Pappos (D.2.1$a_{4a}$, pàgines 265-267). [*Indicació.* Hi ha diverses possibilitats a l'hora de fer el dibuix (nosaltres usem la figura D.16, pàgina 266). Per això, a PAPPOS (1932), p. 670, n'hi ha cinc.]

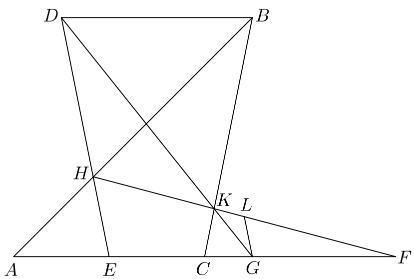


FIGURA 4.7. Lema II dels *Porismes* d'Euclides

**Exercici 20**. Lema II. Considereu la figura $ABCDEFGH$ (figura 4.7) amb $AF$ paral·lel a $DB$ i $\frac{CG}{FG} = \frac{AE}{EF}$. Els punts $H, K$ i $F$ estan alineats.

**Exercici 21**. Lema III. Constateu la validesa d'allò que s'exposa en el text D.2.1$a_{4b}$ (pàgines 267-270). [*Indicació.* Vegeu la figura D.18 (pàgina 271) i les notes que acompanyen el text.]

**Exercici 22**. Proveu els dos enunciats següents:

*a*) Lema IV. Si a la figura 4.8*a* els segments $AF, BC, AB, FC, DE, AD$ i $EF$ estan lligats per la relació $\frac{AF\times BC}{AB\times FC} = \frac{AF\times DE}{AD\times EF}$, aleshores els tres punts $H, G$ i $F$ estan alineats.

381. Trobem aquest enunciat a SIMSON (1776), p. 398, proposició XII.

*b*) Lema V. Si a la figura 4.8*b* els segments $AD, DC, AB$ i $BC$ estan lligats per la relació $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, aleshores els tres punts $A, G$ i $H$ estan alineats.

**Exercici 23**. Vegeu ara el recíproc del lema III o proposició 129 de Pappos (D.2.1$a_{4b}$, pàgines 267-270), que és el lema X o proposició 136 de Pappos.

Des d'un punt $F$ tirem els segments $DF$ i $FE$ fins als segments $BAE$ i $DAH$ (figura 4.9).

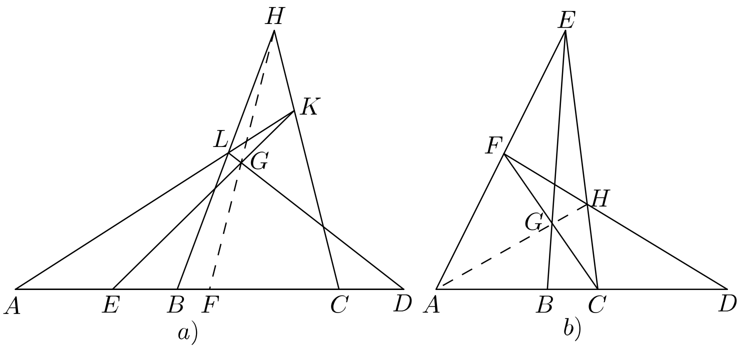



FIGURA 4.8. Lemes IV i V dels *Porismes* d'Euclides

Suposem que el rectangle de costats $FH$ i $GE$ és al rectangle de costats $EF$ i $GH$
com el de costats $DF$ i $BC$ al de costats $DC$ i $BF$.

Afirmo que la línia que passa pels punts $C, A$ i $G$ és un segment rectilini.

Fem les construccions següents:
1) Per $F$, tirem el segment $KL$ paral·lel al segment $CA$.

Siguin $K$ i $L$ els punts en els quals $KL$ talla $AB$ i $AD$.
2) Per $L$, tirem el segment $LM$ paral·lel a $AD$,
i prolonguem el segment $EF$ fins al punt $M$.
3) Pel punt $K$, tirem el segment $KN$ paral·lel a $AB$,
i prolonguem el segment $DF$ fins al punt $N$.

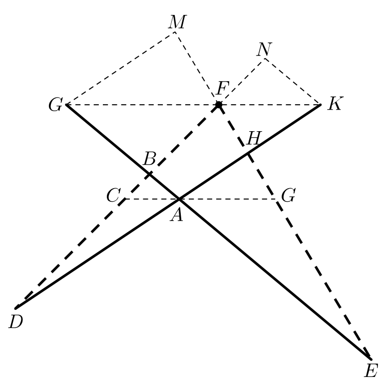



FIGURA 4.9. Lema X dels *Porismes* d'Euclides

Proveu que:

*a*) $DC \times FN = DF \times CB$. [*Indicació.* Useu la semblança de les parelles de triangles $\triangle CDA$, $\triangle FDK$ i $\triangle CBA$, $\triangle FNK$, i la raó composta de les raons adequades.]

*b*) $\frac{FN}{BF} = \frac{FH \times EG}{EF \times GH}$. [*Indicació.* Useu la hipòtesi, la igualtat anterior i el fet que dos rectangles de la mateixa altura són com les bases respectives (Evi 1).]

*c*) $EF \times GH = FM \times EG$. [*Indicació.* Useu la semblança de les parelles de triangles $\triangle FNK, \triangle FBL$ i $\triangle FHK, \triangle FBL$. Evi 1 i l'ítem *b*.]

*d*) Els segments $AG$ i $KL$ són paral·lels. [*Indicació.* Useu la composició d'una proporció (Ev 18), la semblança dels triangles $\triangle LEM$ i $\triangle AEH$, i l'ítem *c*.]

*e*) Per tant, els punts $C, A$ i $G$ estan alineats. [*Indicació.* Els segments $CA$ i $KL$ són paral·lels.][382]

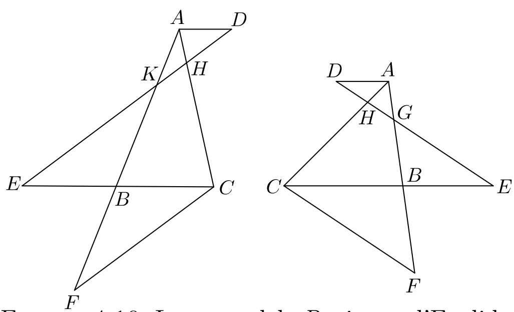


Figura 4.10. Lema xi dels *Porismes* d'Euclides

**Exercici 24**. Vegem el lema xi o proposició 137 de Pappos.

Considerem el triangle $\triangle ABC$ i tirem el segment $AD$ paral·lel al $BC$.

Aleshores, el segment transversal $DE$ talla el $BC$ pel punt $E$.

Afirmo que el segment $BC$ és al $BE$ com el rectangle de costats $DE$ i $GH$ al de costats $EG$ i $DH$.[383]

Feu les construccions següents:

1) Per $C$ tireu el segment $CF$ paral·lel al segment $DE$.

2) Prolongueu el segment $AB$ fins al punt $F$.

Proveu que:

*a*) $CF \times DH = DE \times GH$. [*Indicació.* Useu la semblança de les parelles de triangles $\triangle CAF, \triangle HAG$ i $\triangle AHD, \triangle CHE$, i la composta d'una proporció.]

382. Pappos (1932), edició francesa, volum ii, p. 682-684.

383. És un cas particular del lema iii o proposició 129, en el qual una de les transversals és paral·lela a un dels costats.

*b*) $\frac{BC}{BE} = \frac{DE\times GH}{EG\times DH}$. [*Indicació.* Useu Evi 1 i la semblança dels triangles $\triangle CBF$ i $\triangle EBG$.][384] ◀

Voldríem acabar aquesta presentació dels *Porismes* amb tres reflexions succintes.

1) D'alguna manera, tots aquests resultats són propis de la «geometria projectiva». Aquesta és potser la raó per la qual alguns autors els lliguen al tractat de les còniques. Això no obstant, en el text euclidià, com en el de Pappos, no hi ha cap tret que faci pensar en una visió projectiva dels resultats que trobem en *Porismes*. I les demostracions s'inscriuen en el context dels *Elements*, si bé, com queda ben palès, es basen en la teoria de les proporcions d'Èudox —és a dir, en resultats dels llibres Ev i Evi. No són, doncs, resultats mètrics en sentit estricte. En el millor dels casos, són resultats afins que necessiten, a més, un dels conceptes que hem esmentat en l'apartat 3.2.13 (pàgines 99-101), la «composició [forta] de raons». Esdevenen, es mirin com es mirin, resultats molt potents i interessants.

2) Hi ha un cert vincle entre *Porismes* i *Dades*, i no solament pel que fa al «pensament del qual deriven les dues menes de proposicions, sinó també pel que fa a la finalitat comuna de les definicions d'un text i de l'altre, i a la forma dels seus enunciats, que és comuna». Chasles aprofundeix aquest vincle de manera detallada i adequada.[385]

3) Pappos vincula els porismes als llocs.[386] En aquest aspecte cal distingir tres menes d'enunciats: els teoremes locals, els llocs i els problemes globals. Els primers expressen una propietat comuna a tots els punts d'una mateixa línia, sigui recta o corba (vegeu l'ítem *a* de l'exercici 25, pàgina 128). Els segons són unes proposicions que afirmen que tals punts sotmesos a una mateixa llei es troben en un segment de corba (ja sigui rectilini, d'una circumferència o d'una altra mena) de la qual fixen

384. Pappos (1932), edició francesa, volum ii, p. 684-685.
385. Vegeu l'exposició detallada a Chasles (1860), p. 41-44.
386. Vegeu D.2.1$a_3$, pàgina 262, nota 812.

la naturalesa, però de la qual cal trobar la magnitud i la proporció (vegeu l'ítem *b* de l'exercici 25). Els tercers demanen que es trobin la naturalesa, la magnitud i la posició de cada «lloc», és a dir, la corba (vegeu l'ítem *c* de l'exercici 25).

▶ **Exercici 25**. Proveu que:

*a*) Si tenim dos punts $C$ i $D$, fixos, del diàmetre $AB$ del cercle amb la propietat $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{BD}$, les distàncies de qualsevol punt $M$ de la circumferència a aquests dos punts tenen una raó constant $\frac{CA}{DA}$.

*b*) Donats dos punts i una raó, el lloc dels punts que disten dels donats dues distàncies que tenen, l'una amb l'altra, la raó donada, és una circumferència d'un cercle donat en magnitud i posició.

*c*) Donats dos punts i una raó, quin és el lloc d'un punt les distàncies del qual als donats tenen entre si la raó donada? ◀

### 4.2.2 *Llocs en superfícies* (*Τόπων Ἐπιπέδων βιβλία B*)

Aquesta obra tractava de llocs geomètrics sobre superfícies —o, simplement, de llocs geomètrics que eren superfícies. I constava de dos llibres. Actualment, mantenim la hipòtesi de treball que l'obra podria haver estudiat les superfícies que avui anomenem *quàdriques*.[387] És un text que s'ha perdut en la boira dels temps. Pappos la menciona en *El tresor de l'anàlisi.* Ara bé, les referències que en fa, i, de retruc, les seves aportacions són d'una gran ambigüitat i, molt més descoratjador encara, no dei-

387. És rar perquè els grecs, a les còniques, les anomenaven «llocs sòlids» —*τόποι στέρεοι*—, i els altres llocs eren els «llocs plans» —*τόποι ἐπιπεδοι*. Si ho comparem amb la classificació dels problemes —plans, sòlids i lineals (Pla (2016*b*), p. 327 i el text C.8 $d_2$, p. 570)—, podem preguntar-nos: en *Llocs en superfícies*, Euclides hi estudia les corbes que s'obtenen tallant superfícies diferents dels cilindres, cons i esferes per tal d'aconseguir altres menes de llocs que permetin resoldre els problemes lineals? La informació de Pappos és molt escassa i, tanmateix, la seva proposició 235 (Pappos (1932), volum II, p. 792-793, o el text D.2.1*b*, pàgines 271-272) l'única cosa que fa és caracteritzar les còniques a través de la propietat directriu-focus. Vegeu l'anàlisi interessant d'Acerbi (2007), p. 745-754.

xa clar què plantejava l'obra. Recordem que, en la tradició de la matemàtica grega antiga, els «llocs» són conjunts de punts que verifiquen una propietat donada —segments rectilinis o circulars, seccions còniques o línies més complexes. Però també ho són —i això és la novetat d'aquest treball— les superfícies reglades i les quàdriques. I les preguntes són: les superfícies que Euclides hi va estudiar eren les quàdriques? Es va avançar així a l'anàlisi que en faria, uns anys més tard, Arquimedes?[388]

Tanmateix, val la pena esmentar-ne el lema II —proposició 238—, que conté la propietat fonamental de totes les seccions còniques. Fa referència a un lloc, en concret el dels punts les distàncies dels quals a un punt donat (el focus, *κωνική εστίας*) i a una recta (la directriu, *κωνική κατευθυντήρια γραμμή*) estan en una raó constant fixada. Euclides afirma que aquest lloc és una secció cònica (D.2.1$c_1$ i D.2.1$c_2$, pàgines 272-273).[389] De fet, aquesta propietat caracteritza les còniques segons que la raó sigui més gran, igual o més petita que la unitat (D.2.1$c_3$ a D.2.1$c_5$, pàgines 273-283).

▶ **Exercici 26**. La propietat anterior caracteritza una cònica. Què cal imposar per tal que caracteritzi: *a*) una paràbola, *b*) una el·lipse i *c*) una hipèrbola? ◀

### 4.2.3 *Còniques* (*Κωνικῶν Βιβλία*)

Aquest text, actualment perdut, lliga amb *Llocs en superfícies* (vegeu § 4.2.2 i el text D.2.1*d*, pàgines 283-288) i amb les aporta-

388. Ens referim a la monografia *Dels conoides i els esferoides*, *Grècia IIIb*, § 1.2.6, p. 85-93, i A.7, p. 337-372.

389. És la proposició 238 —un dels darrers lemes de la *Col·lecció matemàtica* de Pappos. Val la pena remarcar aquest fet perquè no el trobem en l'obra d'Apol·loni, en la qual no apareix mai la «directriu». Sembla que era una caracterització de les còniques coneguda per Euclides i potser, fins i tot abans, per Aristeu el Vell. Vegeu Kline (1972), edició castellana, volum I, p. 178.

cions d'Aristeu el Vell (C.1$b_2$ i D.2.1$d_1$, pàgines 208 i 283-287, respectivament). Són obres que contenen els «elements bàsics» de les còniques i constitueixen una introducció a l'obra magna d'Apol·loni, ja que està força ben establert que els quatre primers llibres de l'autor de Perge estaven inspirats en els d'Euclides que, al seu torn, ho estaven en els d'Aristeu.[390] Segons comenta Pappos, «Apol·loni va completar els quatre llibres de còniques d'Euclides, en va afegir quatre més i, d'aquesta manera, va confegir els vuit volums». Les *Còniques* d'Apol·loni van substituir completament tots els tractats de còniques precedents, de manera semblant a com ho havien fet els *Elements* d'Euclides amb els anteriors tractats de geometria (com hem indicat en l'últim paràgraf de la pàgina 85). A l'època de Pappos, però, el treball d'Euclides ja s'havia perdut.[391]

## 4.3 Les dues obres d'òptica

Acabarem aquesta presentació de les obres euclidianes que no són els *Elements* parlant de l'*Òptica* (*Ὀπτικά*) i de la *Catòptrica* (*Κατοπτρικός*). Aquests dos textos que li atribueix Procle[392] i que Pappos inclou en la *Petita astronomia* (*Ὁ μικρός ἀστρῖνομούμενος*)[393] presenten alguns punts de contacte amb la geometria i, per això, ens ha semblat que valia la pena posar-los en relleu. Com veurem en parlar de Ptolemeu en el volum quart d'aquesta *Història*, un dels resultats que conté inclou, per pri-

390. ALLMAN (1899), capítol VIII, p. 194-205.

391. HEATH (1921), volum I, p. 438-439. En la introducció de *Fenòmens*, Euclides també fa referència a les còniques [vegeu el text D.2.1$d_2$, pàgina 288].

392. PROCLE (1873), § 69, edició anglesa, p. 57, i, francesa, p. 62.

393. PAPPOS (1932), llibre VI, edició francesa, volum II, p. 369, nota 1. N'existeixen dues edicions gregues. L'autoria de la segona és de Teó d'Alexandria. I, tot i que la primera podria ser anterior, no sembla gaire probable que fos d'Euclides. Els autors àrabs no l'esmenten. Vegeu KAYAS (1978), volum I, p. XXI.

mer cop i de manera implícita, un principi de mínima acció en el comportament dels fets naturals: el recorregut mínim.

### 4.3.1 *Òptica* (Ὀπτικά)

*Òptica* és el tractat grec més antic que es conserva consagrat a problemes que ara en diríem de perspectiva. De fet, es tracta d'un text de geometria aplicada a l'astronomia. Tanmateix, adopta la forma dels *Elements* i, per això, hem de considerar-lo una obra teòrica i no pas d'anàlisi experimental. De primer, s'hi estableixen les definicions dels objectes que es manegen al corpus. Però, de fet, es tracta de postulats o lemes previs (D.3.1$b_1$, pàgina 289). Tot seguit, s'hi ofereixen cinquanta-vuit proposicions provades a partir de les definicions postulat enunciades al començament del text.

En les definicions, Euclides segueix la tradició platònica segons la qual els raigs que emanen de l'ull són allò que provoca la visió (D.3.1$a_1$, pàgina 288). És interessant observar que, per Euclides, el raig no és instantani, sinó que necessita un cert temps per a desplaçar-se de l'ull a l'objecte a través de l'espai (D.3.1$b_{2a}$, pàgines 289-290).

Més endavant, l'obra descriu la mida aparent d'un objecte en relació amb la seva distància als ulls i mostra que les mides aparents d'objectes iguals no són proporcionals a aquestes distàncies (D.3.1$b_{2b}$, pàgines 290-292).

En termes de trigonometria, estableix la relació de desigualtat entre raons següent:

«Si $\alpha$ i $\beta$ són dos angles, i $\alpha < \beta < \frac{1}{2}\pi$, aleshores $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$».[394]

► **Exercici 27**. *a*) Demostreu la validesa de la desigualtat precedent. *b*) Analitzeu la correcció de la demostració del text D.3.1$b_{2b}$ (pàgina 292). ◄

394. Aristarc l'adoptarà sense demostrar-la. Vegeu l'equació (5.1) (pàgina 143).

Finalment, Euclides investiga les formes aparents dels objectes geomètrics: l'arc de circumferència (D.3.1$b_{2c}$, pàgina 292),[395] els cilindres i els cons, quan s'observen des d'angles diferents.

El tractat contradiu, doncs, una opinió defensada en algunes escoles gregues de pensament segons la qual la grandària real dels objectes —en concret, dels cossos celestes— és l'aparent, la que es veu.[396]

Com ja hem indicat abans, Pappos va considerar que aquests resultats eren importants en astronomia, i va incloure l'*Òptica* i els *Fenòmens* d'Euclides en un compendi d'obres menors que calia estudiar abans d'endinsar-se en l'*Almagest* de Ptolemeu.

### 4.3.2 *Catòptrica* (*Κατοπτρικός*)

Aquest llibre és un estudi sobre la teoria matemàtica dels miralls, sobretot de les imatges formades en miralls plans i esfèrics. Tal com hem dit, l'autoria d'Euclides n'és dubtosa. L'obra podria ser de Teó d'Alexandria, tot i que apareix en els *Comentaris* de Procle. Si bé té una estructura semblant a la de l'*Òptica* (D.3.2$b_1$, pàgines 294-295), geomètricament és inferior, i les seves demostracions no tenen el rigor que trobem en les altres obres euclidianes.[397]

Amb tot, ens sembla força interessant remarcar-ne el teorema primer, que estableix la «llei de la reflexió»:

> L'angle d'incidència i l'angle de reflexió [del raig lluminós en un mirall] són iguals.

I ens ho sembla per dues raons. Primer, perquè hi estableix la propietat tant per a miralls plans com per a còncaus i conve-

395. N'ofereix tres demostracions. Euclides (2000*a*), edició castellana, p. 153-155.

396. Vitrac (1990), p. 27, nota 46, que, per a un estudi més detallat, remet a Simon (1988).

397. En aquest text, Euclides adopta la definició de «segment rectilini» de Plató (D.3.2$a_1$, pàgina 294).

xos. Segon, perquè, en el cas dels plans, la demostració es basa en una definició postulat que afirma el principi però no el demostra (D.3.2$b_{2a}$, pàgines 295-296). Euclides no pensa a establir-lo com un «principi del recorregut mínim»: quan el raig incident i el reflectit van de l'ull a l'objecte, recorren el camí més curt possible.[398] I, per a fer això, només necessita el recurs a la geometria plana [EI 20], que coneixia bé.

398. Caldrà esperar alguns segles per a disposar de la demostració geomètrica, molt elegant, de Claudi Ptolemeu, basada en el «principi del recorregut mínim».

# Capítol 5

# Aristarc de Samos i la seva obra

> Quant au prétendu Aristarc de Samos, qu'on dit avoir développé les découvertes des Chaldéens sur le cours de la planète de la terre et des autres planètes, il est si obscur, que Wallis a été obligé de le commenter d'un bout à l'autre pour tâcher de le rendre intelligible.
>
> VOLTAIRE[399]

> Of the two mathematicians Aristarchus of Samos and Seleucus of Babylon, whose systems came most nearly to his own, he [Copernicus] mentions only the first, making no reference to the segon.
>
> ALEXANDER VON HUMBOLDT[400]

> Aristarchus, a famous Greek mathematician and astronomer, was born on the island of Samos about 310 B.C. and died about 230 B.C., so that he was a contemporary of Euclid. His fame rests on his heliocentric

399. VOLTAIRE (1764), edició de 1878, p. 469. «L'obra d'Aristarc de Samos, en la qual pretenia donar a conèixer les descobertes dels caldeus sobre el moviment del planeta Terra i d'altres, era tan fosca que Wallis es va veure obligat a comentar-la de dalt a baix per fer-la entenedora.»

400. HUMBOLDT (1850), volum II, p. 109. «Dels dos matemàtics amb els sistemes més propers al seu, Aristarc de Samos i Seleuc de Babilònia, [Copèrnic] només esmenta el primer i omet el segon.»

> theory, the theory that the Earth and planets revolve the orbits around the Sun. Perhaps "theory" is too strong a word, for his proofs were weak; yet it was a great idea, an idea redeveloped centuries later by Copernicus.
>
> GEORGE PÓLYA[401]

Un personatge molt important per a la història de la matemàtica és l'astrònom Aristarc de Samos (Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος) (310-230 aC).[402] La seva rellevància i la seva obra queden eclipsades per la brillantor enorme dels tres gegants del segle d'or de la matemàtica grega. Nosaltres, però, li volem retre l'homenatge que es mereix.

Una de les preocupacions dels erudits d'Alexandria consistia a fixar amb precisió la posició de les estrelles, i els resultats que van obtenir es poden considerar el punt de partida del *Catàleg* d'Hiparc de mitjan segle II dC. Les primeres passes, en aquest sentit, les devem a Arístil·los i Timòcaris, astrònoms d'un segle abans.[403] L'obra d'aquests astrònoms pràctics va precedir la d'Aristarc, que es va preocupar de plantejar i resoldre, en termes matemàtics, les qüestions obertes per l'astronomia del seu temps. Per això se'l considera el primer astrònom grec. Per exemple, va ser capaç —i va tenir l'audàcia— d'eliminar de l'as-

401. PÓLYA (1977), p. 10. «Aristarc, famós matemàtic i astrònom que va néixer a l'illa de Samos pels volts del 310 aC i va morir al voltant del 230 aC, era, doncs, contemporani d'Euclides. La seva fama es fonamenta en la teoria heliocèntrica, que estableix que la Terra i els planetes giren en òrbites enviró del Sol. Potser aplicar a aquestes idees el terme *teoria* és exagerat, atesa la feblesa de les seves demostracions. Tanmateix, va ser una gran idea, redescoberta segles més tard per Copèrnic.»

402. Per a una aproximació al personatge, vegeu MASSA (2009) i, per a una lectura més aprofundida, HEATH (1913), ARISTARC (2007) i GÓMEZ (2013). Una biografia succinta, a STHAL (1970) i en l'entrada «Aristarchus» de *MacTutor History of Mathematics Archive* de la Universitat de Saint Andrews, en línia a <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Aristarchus/>.

403. Tanmateix, aquest camí el van seguir Èudox, que va establir que el diàmetre del Sol és nou vegades el de la Terra, i Fídies, que va determinar que ho és dotze. Vegeu TANNERY (1912-1950), volum I, p. 372-373.

tronomia els prejudicis estètics i religiosos que concedien als astres un rang de divinitat.

Plagiant un text que Diògenes Laerci aplica a Heràclit,[404] podem dir que Aristarc és «l'iniciat que t'acompanya» per tal que el coneixement del cel «brilli més que el Sol».

## 5.1 Notes sobre la vida d'Aristarc i sobre l'heliocentrisme

Sabem poques coses de la vida d'aquest íncliit astrònom. Va néixer a l'illa de Samos pels volts del 310 aC i, per tant, era vint-i-cinc anys més vell que Arquimedes i se situava cronològicament entre ell, que l'esmenta en l'*Arenari*, i Euclides.[405] Va estudiar amb Estrató de Làmpsac, director del Liceu entre els anys 287 i 269 aC,[406] però va viure la major part de la vida a Alexandria. Ptolemeu IV Filopàtor li va encarregar l'educació del seu fill Ptolemeu V Epífanes. La seva mort se situa cap al 230 aC. L'astrònom Ptolemeu explica que els anys 281-280 aC Aristarc feia observacions del solstici d'estiu.[407] Vitruvi deixa ben clara la seva vàlua en equiparar-lo amb Filolau, Arquites, Apol·loni, Eratòstenes i Arquimedes.[408]

El seu model astronòmic és heliocèntric,[409] és a dir, considera que la Terra i els planetes giren al voltant del Sol, i que la Lluna ho fa al voltant de la terra. Aquesta teoria la va exposar en l'obra, dissortadament perduda, *Del sistema del món* (*Απὸ το σύστημα του κόσμου*). Malgrat que aquest sistema també va

404. Vegeu la citació de la pàgina 299.
405. Pla (2020), § 1.2.8, p. 103, i el text A.9.2*a*, p. 381.
406. Diels (1879), p. 313, conté un text d'Aeci.
407. Ptolemeu (1988), llibre III, 2, edició francesa, p. 160 i 163.
408. E.1$a_4$ (pàgines 300-301).
409. Diu: «Ἀρισταρχος τὸ ἥλιον ἵστησι μετὰ των ακλανων, την δε γην κινειεϑαι περι τον ηλιακον και κατα τας ταυτεε εγκλιασεις ακιαζεσϑαι.» Textos E.1$a_1$ i E.1$a_3$ (pàgina 300).

ser adoptat pel mateix Arquimedes, no va ser gaire ben acceptat pels erudits grecs. A *De la cara visible de la Lluna*, Plutarc exposa el rebuig cap a la teoria heliocèntrica per part de la majoria dels prohoms grecs, que sostenien que el model era geocèntric, com ens recorda Arquimedes en l'*Arenari*.[410]

En definitiva, doncs, el model geocèntric va ser assumit ben aviat com una explicació més senzilla i millor, ja que al segle III aC els astrònoms no eren capaços d'observar la paral·laxi. Si la Terra es desplaça, les estrelles fixes s'han de veure des d'angles diferents al llarg de l'any, cosa que admet com a hipòtesi: «La diferència d'angles, la paral·laxi, existeix però no som capaços d'observar-la per culpa de la llunyania de les estrelles fixes respecte de la Terra, que és el punt d'observació.»[411] Tanmateix, la impossibilitat d'observar-la va fer que no s'acceptés com un fet real, i la hipòtesi d'Aristarc va ser rebutjada definitivament.[412] En concret, Cleantes, un contemporani seu, va pensar que el deure dels grecs era processar-lo amb el càrrec d'impietat per haver suposat en moviment la Llar de l'univers, és a dir, la Terra, i per suposar que el cel roman en repòs i ella gira en un cercle oblic i, al mateix temps, sobre el seu propi eix.[413]

---

410. E.1$a_3$ (pàgina 300).

411. La hipòtesi és correcta i avui podem mesurar la paral·laxi perfectament.

412. Els arguments principals en contra de l'heliocentrisme eren:
1. La Terra, constituïda per l'element més pesat, ha d'ocupar el seu lloc natural al centre de l'univers i, malgrat que el diàmetre del Sol és més gran que el de la Terra, en ser un astre de foc és més lleuger i, per això, no pot restar immòbil.
2. Si la Terra es desplaça s'ha de donar la paral·laxi.
3. Si la Terra giravolta sobre si mateixa cap a l'est, els objectes que no estan fixats s'han de moure cap a l'oest. En aquella època no era possible observar l'acceleració de Coriolis.
4. Al costat d'aquests arguments racionals, calia respectar les qüestions d'ordre més filosòfic i religiós.

Taton (1957), edició castellana de 1988, volum II, p. 386-388; Roy (1982), p. 88-89, i Durham i Purrington (1983), edició castellana, p. 79-80.

413. E.1$a_4$ (pàgines 300-301).

Ja vam veure que l'Escola de Milet havia establert certes relacions astronòmiques, com ara que la distància de la Terra al Sol és tres vegades la de la Terra a la Lluna,[414] i que Aristòtil afirmava que el Sol és més gran que la Terra i que les estrelles es troben molt més lluny de la Terra que el Sol.[415] Aquests apunts posen de manifest que, a mitjan segle IV aC, els pensadors grecs ja es plantejaven l'estudi de l'univers i els seus límits.[416]

Segons Censorí,[417] Aristarc va afegir $\frac{1}{1.632}$ de dia a la determinació feta per Cal·lip, que era de $365\,\frac{1}{4}$, i que l'Any Gran —el període que ha de passar perquè el Sol, la Terra i els planetes tornin a la posició inicial— és de 2.484 anys.[418] I, segons Vitruvi, va construir dos rellotges de sol, un d'esfèric —*σκάφη*— i un de pla.[419]

A més, sembla que també va escriure sobre la visió, la llum i els colors, que veia com «formes estampades a l'aire a partir d'impressions de la realitat».[420]

## 5.2 Una breu descripció de *De les mides i les distàncies del Sol i la Lluna*

Dels escrits d'Aristarc solament ens ha arribat *De les mides i les distàncies del Sol i la Lluna* (*Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀπὸστημάτων ἡλόυ καὶ σελῆνης*) i això el converteix en l'astrònom conegut més antic que tracta aquesta qüestió. L'obra no conté la teoria

414. Pla (2016*b*), p. 86, i el text A.5.2.3.2*e*, p. 385.

415. *Dels meteors*, llibre I, capítol 8, 346 1-9, a Aristòtil (1863), § 6, p. 56.

416. Vegeu la nota 403 (pàgina 136).

417. Censorí (1843), XIX, 2. Per a una explicació d'aquest afegitó, vegeu Heath (1913), p. 314-315.

418. Censorí (1843), XVIII, 11. Aquesta dada és errònia, ja que hauria de ser 2.434 anys. Tannery (1888), p. 79-96.

419. E.1$d_1$, pàgina 307, i Tannery (1883), p. 373.

420. Aristarc (2007), p. 18.

heliocèntrica però aporta el mètode geomètric per a establir a les mesures astronòmiques. Seguint el model geomètric d'Euclides, es basa en sis hipòtesis fonamentades en observacions sistemàtiques. Les tres primeres són qualitatives i les tres darreres, quantitatives.

Les hipòtesis qualitatives són:

1. La Lluna rep la llum del Sol.
2. La Terra es comporta respecte de l'esfera en la qual es mou la Lluna com un punt i com el centre.[421]
3. El cercle màxim que delimita la part fosca i la il·luminada de la Lluna es troba dins el camp de visió del nostre ull.

I les tres quantitatives:

4. Quan veiem la Lluna dimidiada,[422] la seva distància al Sol és una trigèsima part més petita que el quadrant.[423]
5. L'amplada de l'ombra de la Terra equival a dues llunes.[424]
6. [El diàmetre aparent de] la Lluna subtendeix una quinzena part d'un signe del zodíac —*ζῴδιυ*.[425]

Aquestes hipòtesis tenen l'objectiu, al cap i a la fi, de geometritzar —és a dir, fer teòric, matemàtic— el text d'astronomia.

---

421. Vegeu el text de Pappos (text E.1$b_2$, pàgines 301-305).

422. És a dir, quan forma angle recte amb la Terra i el Sol.

423. Es tracta de «distàncies angulars». Afirma que el valor de l'angle és 1 recte $-\frac{1}{30}$ recte, o sigui, 87º. Per tant, els angles $\widehat{LTS}$ i $\widehat{TSL}$ equivalen a $\frac{29}{30}$ i $\frac{1}{30}$ de l'angle recte, respectivament. És a dir, a 87º i 3º (figura 5.1). Però, realment, l'angle $\widehat{LTS}$ val 89º 50′. Aquest error és la causa principal que alguns càlculs efectuats per ell siguin defectuosos encara que no ho siguin els raonaments que fa, que són força correctes.

424. És a dir, el diàmetre de la secció del con d'ombra de la Terra a la Lluna equival a dues vegades el diàmetre de la Lluna. Vegeu Vera (1970), volum I, nota 6, p. 987.

425. Els signes del zodíac són dotze. Per tant, $\frac{1}{15} \times \frac{360^{\circ}}{12} = 2^{\circ}$, un valor erroni que contrasta amb el que li atribueix Arquimedes en l'*Arenari* [nota 405, pàgina 137]: $\frac{1}{720}$ del zodíac, o sigui, mig grau. Aquest valor és força més ajustat al real, que es troba entre $31'31''$ i $32'35,6''$. Vegeu la taula 5.2 (pàgina 145).

La resta de l'obra està constituïda per divuit proposicions. La majoria fan referència a les mesures relatives del Sol, la Terra i la Lluna, i moltes admeten una reescriptura trigonomètrica.[426]

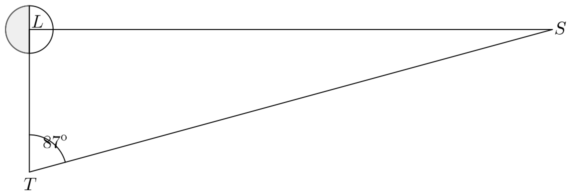



FIGURA 5.1. Triangle Sol-Terra-Lluna

TAULA 5.1. *Els dotze signes del zodíac*[427]

| Núm. | Símbol | Longitud | Nom llatí | Nom català | Nom grec |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ♈ | 0° | Aries | Àries | *Κριός* |
| 2 | ♉ | 30° | Taurus | Taure | *Ταῦρος* |
| 3 | ♊ | 60° | Gemini | Bessons o Gèminis | *Δίδυμοι* |
| 4 | ♋ | 90° | Cancer | Càncer o Cranc | *Καρκῖνος* |
| 5 | ♌ | 120° | Leo | Lleó | *Λέων* |
| 6 | ♍ | 150° | Virgo | Verge | *Παρθένος* |
| 7 | ♎ | 180° | Libra | Balança | *Ζυγός* |
| 8 | ♏ | 210° | Scorpio | Escorpió | *Σκορπιός* |
| 9 | ♐ | 240° | Sagittarius | Sagitari | *Τοξότης* |
| 10 | ♑ | 270° | Capricorn | Capricorn | *Αἰγόκερως* |
| 11 | ♒ | 300° | Aquarius | Aquari | *Ὑδροχόος* |
| 12 | ♓ | 330° | Pisces | Peixos | *Ἰχθύες* |

426. MASSA (2003) i (2005).

427. Recordem que els signes del zodíac pertanyen a les constel·lacions amb el mateix nom però corregudes: Peixos, Àries, Taure, Bessons, Cranc, Lleó, Verge, Balança, Escorpió, Sagitari, Capricorn i Aquari. Es distribueixen segons els quatre elements de la Naturalesa. Foc: Àries, Lleó i Sagitari. Terra: Taure, Verge i Capricorn. Aire: Bessons, Balança i Aquari. I aigua: Càncer, Escorpió i Peixos.

A partir de les seves hipòtesis, Aristarc, entre d'altres, treu les conseqüències següents:

Proposició 1. Dues esferes iguals es poden englobar dins un cilindre i, si són desiguals, dins un con.[428]

Proposició 2. Els diàmetres aparents del Sol i de la Lluna són iguals.

Proposició 3. $\frac{19}{3} < \frac{d_S}{d_T} < \frac{43}{6}$, en què $d_S$ i $d_T$ designen els diàmetres del Sol i de la Terra.

Proposició 7. $18\,TL < TS < 20\,TL$, en què $TS$ i $TL$ indiquen les distàncies de la Terra al Sol i a la Lluna (figura 5.1).[429]

Si ho expressem en el llenguatge de les proporcions i després ho traduïm al trigonomètric, tenim que: $\frac{1}{20} < \sin 3^{\text{o}} < \frac{1}{18}$.[430]

Les proposicions 11, 12 i 13 estableixen, en termes actuals, les relacions trigonomètriques:

$$\tfrac{1}{60} < \sin 1^{\text{o}} < \tfrac{1}{45},\ \tfrac{89}{90} < \cos 1^{\text{o}} < 1 \text{ i } \tfrac{44}{45} < \cos^2 1^{\text{o}} < 1.$$

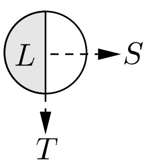


FIGURA 5.2

El mètode d'Aristarc consisteix a determinar la paral·laxi del Sol —l'angle màxim des del qual es veu la Terra des del centre del Sol aprofitant el moment en el qual es veu la Lluna dicotònicament i en quadratura, és a dir, quan mostra la meitat exacta del seu disc il·luminada, que és el moment en el qual el triangle Sol-Terra-Lluna és rectangle. Això suposa que la distància Terra-Sol és més gran que divuit i més petita que vint vegades la distància Terra-Lluna. Però, en realitat, aquestes distàncies són errònies.[431] Haurien de passar

428. És un «element» del text en el sentit descrit a § 3.2.6 (pàgina 84).

429. Malgrat que és erroni —el valor real és 346—, millora els valors 9 i 12 que Arquimedes atribueix a Èudox i Fídies, respectivament. Vegeu la nota 403 (pàgina 136).

430. BOYER (1968), edició castellana, p. 117, indica que, en no disposar de taules trigonomètriques, havien de recórrer a les desigualtats.

431. De fet, la distància Terra-Sol és tres-centes vuitanta-cinc vegades la Terra-Lluna.

molts segles abans de corregir aquests càlculs que, amb tot, solament suposen un error de $19'$.

En realitat, Aristarc usa la relació trigonomètrica

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}, \text{ amb } 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}, \qquad (5.1)$$

que ja hem trobat en l'*Òptica* d'Euclides (pàgines 131-132).

Aplicant la relació 5.1 als angles $\widehat{ETG}$ i $\widehat{ETH}$, obté que $\frac{EG}{EH}$ [$= \frac{\tan\widehat{ETG}}{\tan\widehat{ETH}}$] $> \frac{15}{2}$.

▶ **Exercici 28**. Proveu que la funció $\frac{\sin x}{x}$ és creixent quan $x$ va de 0 a $\frac{\pi}{2}$.

Com és la funció $\frac{\tan x}{x}$, en les mateixes condicions?

Deduïu-ne la relació 5.1. [*Indicació.* Vegeu l'exercici 27.] ◀

La demostració que fa Aristarc de la proposició 7 és la següent:[432]

[*Demostració.*] Amb centre a la Terra $T$ i radis $TS$ i $TL$, tirem els quarts de cercle de la figura adjunta. [P 3]

Fem el quadrat $\square TAFE$ de costat $TS$. [Ei 46]

Prolonguem el catet $TL$ fins que talla el costat $FE$. [P 2 i P 5]

Tirem les bisectrius $TF$ i $FG$ dels angles $\widehat{ATE}$ i $\widehat{FTE}$. [Ei 9]

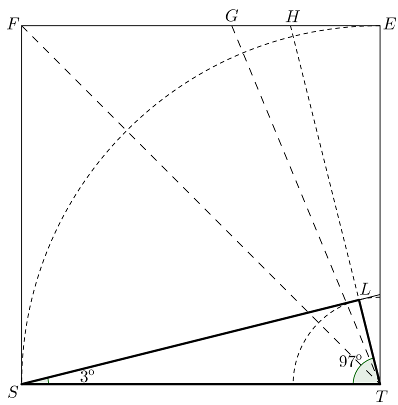


FIGURA 5.3. Relació entre $TS$ i $TL$

$a_1$) Tenim la relació $\frac{\widehat{ETG}}{\widehat{ETH}} = \frac{\frac{1}{4}\text{ recte}}{\frac{1}{30}\text{ recte}} = \frac{15}{2}$. [Evi 3]

$a_2$) D'altra banda, $\frac{FG^2}{EG^2} = \frac{TF^2}{ET^2} = \frac{EF^2+TE^2}{ET^2} = \frac{2}{1}$. [Di 20, Di 22 i Ei 47]

432. Vegeu l'elegant exposició de Waerden (1954), edició de 1963, p. 204.

Per tant, $\frac{FG}{EG} > \frac{7}{5}$.[433]

D'això, en resulta que $\frac{FE}{EG} > \frac{12}{5}$. [Ev 18]

I $\frac{ET}{EG} > \frac{12}{5}$. [Ev 7]

Per tant, *ex æquali*, $\frac{ET}{EH} > \frac{18}{1}$. [Ev 7 i Nc 1]

I, per la semblança dels triangles $\triangle TLS$ i $\triangle TEH$,

$\frac{TS}{TL} > \frac{18}{1}$. [Evi 4 i per substitució] ♠

*b*) Per a la desigualtat $\frac{TS}{TL} < \frac{20}{1}$, vegeu l'exercici 29 o el text E.2.2$a_7$ (pàgina 323). ♠

► **Exercici 29**. Sabríeu demostrar que $\frac{TS}{TL} < \frac{20}{1}$? ◄

De retruc, en la proposició 10, estableix que $5.832\,\mathcal{V}_{\text{Lluna}} < \mathcal{V}_{Sol} < 8.000\,\mathcal{V}_{\text{Lluna}}$.[434] I, en les 15 i 17, que $\frac{19}{3} < \frac{R_S}{R_T} < \frac{43}{9}$ i $\frac{108}{43} < \frac{R_T}{R_L} < \frac{60}{19}$, respectivament. Ho fa a partir d'observacions fetes dels eclipsis de Lluna que li van permetre afirmar la sisena hipòtesi.[435]

Acabem aquesta breu presentació de l'obra d'Aristarc exposant les demostracions de les proposicions 15 i 17.

Siguin $R_S, R_T$ i $R_L$ els radis del Sol, la Terra i la Lluna, $d_S := TS$ i $d_L := TB$ les distàncies de la Terra al Sol i a la Lluna.

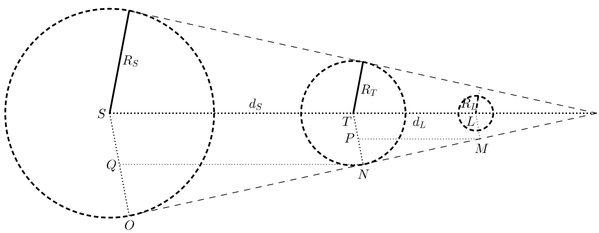



Figura 5.4. Relació entre $R_S, R_T$ i $R_L$

Suposem que els tres cossos es troben en la situació de l'eclipsi de Lluna (figura 5.4).

433. Això és degut a l'aproximació pitagòrica de $\sqrt{2}$ recollida per Plató.

434. És a dir, si prenem el valor mitjà, $\mathcal{V}_{\text{Sol}} \sim 7.000\,\mathcal{V}_{\text{Lluna}}$, que s'ha deduït correctament dels càlculs anteriors, però que és un valor força erroni ja que, en realitat, és $\mathcal{V}_{\text{Sol}} \sim 64.000.000\,\mathcal{V}_{\text{Lluna}}$.

435. Atesos els errors de principi, obté resultats que no s'ajusten a la realitat. De fet, $\frac{R_S}{R_T} \sim 107$. Tanmateix, deixeu-nos-hi insistir, els raonaments són correctes.

Els triangles $\triangle MPN$ i $\triangle NQO$ són semblants, i $d_S$ i $R_S$ valen aproximadament $19\,d_L$ i $19\,R_L$. Això permet asseverar que $R_L = \frac{20}{57}\,R_T$.

▶ **Exercici 30**. Proveu que $R_L = \frac{20}{57}\,R_T$.
Quina és la raó que hi ha entre $R_S$ i $R_T$? ◀

Per a posar en relleu la importància d'Aristarc, val la pena indicar que, després d'ell, a excepció de Seleuc de Selèucida (128 aC), ningú no va tornar a parlar de la teoria heliocèntrica fins a Copèrnic.[436] En canvi, pel que fa a les relacions entre les mides i les distàncies dels astres, Hiparc i Ptolemeu van agafar-li el relleu i les van millorar.[437]

TAULA 5.2. *Comparació de les mides i les distàncies del Sol i la Lluna*

| Astrònom | Distància mitjana de la Terra | | Diàmetre | |
|---|---|---|---|---|
| | a la Lluna | al Sol | de la Lluna | del Sol |
| ARISTARC | $9\,\frac{1}{2}$ | 180 | $\frac{9}{25} = 0'36$ | $6\,\frac{3}{4}$ |
| HIPARC | $33\,\frac{2}{3}$ | 1.245 | $\frac{1}{3} = 0'33$ | $1\,\frac{3}{3}$ |
| POSIDONI[438] | $26\,\frac{1}{5}$ | 6.545 | $\frac{3}{19} = 0'157$ | $39\,\frac{1}{4}$ |
| PTOLEMEU | $29\,\frac{1}{2}$ | 605 | $\frac{5}{17} = 0'29$ | $5\,\frac{1}{2}$ |
| Valor real | $30\,\frac{1}{5}$ | 11.726 | $\frac{5}{17} = 0'27$ | $108\,\frac{9}{10}$ |

436. E.1$d_4$, pàgina 308. SCHIAPARELLI (1873), p. 50.
Tanmateix, potser val la pena indicar que Copèrnic menciona l'astrònom de Samos en un passatge que més tard va suprimir: «Credibile est hisce similibusque causis Philolaum mobilitatem terræ sensisse, quod etiam nonnulli Aristarchum Samium fuerunt in eadem fuisse sententia.»

437. Vegeu el text de Pappos, E.1$b_2$ (pàgines 301-305).

438. Aquest astrònom no apareix en el text de Pappos esmentat abans. Recordem que HEATH (1913) dedica tres-centes pàgines a exposar l'astronomia grega des de Tales a Aristarc. Per a una història de l'astronomia, vegeu DREYER (1953) o MOTZ i WEAVER (1995).

## 5.3 Del text d'Aristarc i les seves traduccions

Segons Pappos,[439] l'obra d'Aristarc que hem comentat es trobava en l'*Astronomia menor* (*Ὀ Μικρος αστρονομία προτος*) o *Petita astronomia*, juntament amb altres obres: *De l'esfera en moviment* d'Autòlic de Pítana, l'*Òptica* i els *Fenòmens* d'Euclides, i les *Esfèriques* i *Dels dies i les nits* de Teodosi de Bitínia.[440] Aquest opuscle —*Astronomia menor*— constituïa una introducció a l'*Almagest* de Ptolemeu.[441] Els àrabs el van traduir, més tard, a la seva llengua. El primer a fer-ho va ser Luqa al-Balabakki († 912). I Nasir al-din al-Tusi en va elaborar una recensió.

La primera traducció llatina —*Aristarchi Samij. De magnitudinibus et distantiis Solis et Lunæ*— és de Giorgio Valla i es va publicar a Venècia l'any 1488. Un temps després, el 1572, a Pesaro, Commandino ho va fer amb comentaris.[442]

La primera edició grega —*Αρισταρκος Σαμον Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστηματων ἡλίου καὶ σελήνης*— la va confegir John Wallis el 1688, i es va publicar a Oxford. La Porte du Theil en va dur a terme una reedició en grec i llatí l'any 1810, a París.

M. de Fortia d'Urban va elaborar la traducció francesa *Traité d'Aristarche de Samos sur les grandeurs et les distances du Soleil et de la Lune*, el 1883, també a París.[443]

La traducció anglesa de Heath, *Aristarchus of Samus, the Ancient Copernichus. A history of greek astronomy to Aristarchus, together with Aristarchus's treatise on the size and distances of the Sun and Moon* (Oxford, 1913), com el seu nom indi-

439. E.1$d_3$, pàgina 308.
440. Pappos (1932), edició francesa, p. 369 i, en particular, la nota 1.
441. Per a una mica d'informació, vegeu el text E.1$d_3$ (pàgina 308).
442. Aristarc (2007), p. 77-157.
443. En línia a <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/aristarque/soleil.htm>.

ca, proporciona una visió històrica molt aconsellable de l'astronomia grega abans d'Aristarc.[444]

En castellà disposem d'una petita joia, *Aristarco de Samos. Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna* de Massa, que ja hem esmentat en diverses ocasions,[445] amb una introducció breu però molt acurada.[446]

## 5.4 Problemes

**Problema 1**. *a*) Descripció de la «hipopede». Suposem una esfera amb centre $O$ que gira al voltant d'un eix $ON$. Sigui $M$ un punt d'aquesta esfera que gira i $P$ un de la intersecció dels cercles màxims perpendiculars a $ON$ i $OM$. Si, mentre gira l'esfera, un punt $H$ surt de $P$ i es mou pel cercle màxim perpendicular a $OM$ amb la mateixa velocitat angular que l'esfera i en sentit contrari, aleshores el punt $H$ descriu una corba a l'espai en forma de 8.

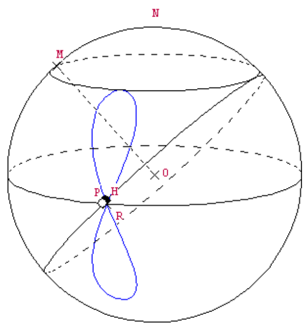


FIGURA 5.5. Descripció de la hipopede

Segons explica Simplici, Èudox l'anomena *hipopede*.

*b*) Procés de determinació de la «hipopede» d'Èudox segons G. V. Schiaparelli.[447] És la corba intersecció de l'esfera i el cilindre de revolució tangent. Això fa que sigui una corba esfèrica i cilíndrica alhora. Per Èudox, s'obté gràcies a la intersecció de dues esferes.

Proveu que l'equació cartesiana és $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2, \\ (x-a)^2+y^2=(r-a)^2, \end{cases}$

444. HEATH (1913).

445. ARISTARC (2007), p. 33-72.

446. ARISTARC (2007), p. 13-32. A E.2 (pàgines 309-345), hi trobem la traducció catalana.

447. SCHIAPARELLI (1875). En particular, les proposicions I a VII, p. 25-29. Vegeu també YAVETZ (1998).

en la qual $r$ és el radi de l'esfera i $a$ la distància del centre $O$ de l'esfera a l'eix del cilindre, amb $0 < a < r$.

Constateu que la parametrització cartesiana és:

$$\begin{cases} x - a = (r-a)\cos\theta, \\ y = (r-a)\,\sin\theta, \\ z = 2\,\sqrt{a(r-a)}\,\sin\frac{\theta}{2}. \end{cases}$$

*c*) Demostració simplificada de la de Schiaparelli. Suprimim el gir de l'esfera però deixem que el punt $H$ se segueixi movent pel seu cercle màxim ($\bigcirc\, PBS$ de la figura 5.6), allunyant-se del punt $P$.

Si, al mateix temps que el punt $H$ surt de $P$, també en surten els punts $R$ i $T$, movent-se pel cercle màxim perpendicular a $ON$ ($\bigcirc\, PAS$ de la figura) en sentits oposats i a la mateixa velocitat angular que $H$ sobre el seu cercle, el pla que conté els punts $H, R$ i $T$ serà sempre paral·lel al pla tangent a l'esfera per $P$ en cada instant.

Aquest pla talla l'esfera en un cercle de diàmetre $RT$.

Per tant, l'angle $\widehat{RHT}$ és recte.

I, en conseqüència, l'angle $\widehat{HTR}$ és complementari del $\widehat{HRT}$.

Si $FR$ és perpendicular al pla $PAS$, l'angle $\widehat{FRH}$ també és complementari del $\widehat{HRT}$

i, aleshores, els angles $\widehat{FRH}$ i $\widehat{HTR}$ són iguals.

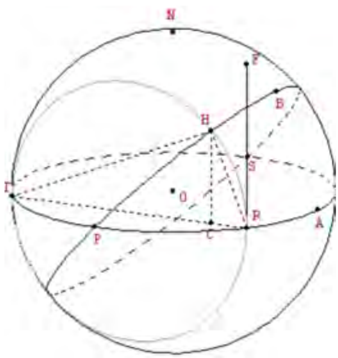



FIGURA 5.6. Descripció de la hipopede

Però l'angle $\widehat{HTR}$ inscrit en el cercle de diàmetre $RT$ equival a la meitat de l'angle central per al mateix arc, que és el que formen els plans $\varparallelogram PAS$ i $\varparallelogram PBS$.

Per tant, l'angle que formen els segments $FR$ i $HR$ és constant.

I, com que les seves posicions diferents del triangle $\triangle HRT$ són semblants, la raó $\frac{RC}{RT}$ és constant i $C$ és el peu de la perpendicular per $H$ sobre $RT$.

Si ara fem girar l'esfera al voltant de l'eix $ON$ a la mateixa velocitat angular que el punt $R$ i en sentit contrari, el punt $R$ queda fix en l'espai en la posició que ocupava $P$ i el punt $H$ descriu la «hipopede».

Com que l'angle determinat pels segments $FR$ i $HR$ és constant, $HR$ és la generatriu d'un con amb eix $FR$,
$\frac{RC}{RT}$ és constant,
i el punt $C$ descriu una corba que és el resultat d'aplicar una homotècia de centre $R$ a la corba que descriu el punt $T$, és a dir, un cercle.

I com que la hipopede es projecta sobre aquest cercle, està situada en un cilindre.

Porisma. La corba que s'obté intersecant un cilindre i un con d'eix la generatriu del cilindre és una hipopede d'Èudox i, per tant, una corba esfèrica.[448]

*d*) Vegeu també que, si tenim dues esferes $S_1$ i $S_2$, en les quals l'eix $XY$ de $S_1$ és un diàmetre de l'esfera $S_2$ que giravolta amb l'eix $AB$, aleshores l'eix $XY$ de $S_1$ giravolta amb aquest. Suposem que giren amb velocitats angulars constants però oposades; aleshores, un punt $P$ de l'equador de $S_1$ descriu un vuit. És la hipopede tal com la va introduir Èudox. [*Indicació.* Vegeu Durham i Purrington (1983), edició castellana, p. 70-76.]

**Problema 2**. Vegem, ara, els detalls de la proposició primera de l'obra d'Aristarc (text E.2.2$a_1$, ítem *b*, pàgines 311-313).

Volem demostrar que és possible determinar el punt $K$ (figura 2, pàgina 312). [*Indicació.* Considerem els radis perpendiculars al segment que uneix els centres $A$ i $B$ dels cercles [Ei 11].

Unim els extrems d'aquests radis [P 1] i prolonguem aquest segment de la banda del radi petit fins que talla la prolongació de $AB$ [P 2 i P 5]. Sigui quin sigui el parell de radis, el punt $K$ queda determinat de manera única [Evi 4].]

448. En línia a <https://www.gaussianos.com/la-hipopede-de-eudoxo/>. En la reconstrucció de Schiaparelli de la teoria astronòmica de les esferes homocèntriques d'Èudox, el moviment del planeta sobre la hipopede que produeixen les dues esferes més interiors (de les quatre que fa servir per a cada planeta) serveix per a explicar les retrogradacions planetàries, és a dir, els retrocessos transitoris que s'observen en les trajectòries dels planetes movent-se sobre el fons d'estrelles fixes vistos des de la Terra.

El segment $CFK$ és rectilini. [*Indicació.* Empreu la reducció a l'absurd. Prolongueu $KF$ fins que talla $A$ o la seva prolongació [P 5]. Useu Evi 4 per a obtenir una contradicció en cada un dels dos casos.]

Podríem haver usat directament Evi 4, tenint en compte que els triangles $\triangle ACK$ i $\triangle BFK$ són semblants, ja que hem tallat els segments paral·lels $AC$ i $BF$ amb la secant $KC$. A més, l'angle $\widehat{ACK}$ és recte [Eiii 18] i, de retruc, $\widehat{BFK}$ també.

**Problema 3**. Siguin $A$ i $P$ dos punts de la prolongació del radi del cercle de centre $C$, essent el punt $P$ més llunyà del centre $C$ que el $A$.

Siguin $AH$ i $AL$, i $PM$ i $PO$ les dues tangents tirades per $A$ i $P$ a aquest cercle, respectivament [E iii 17]. Aleshores, $MO > HL$. [*Indicació.* Per Evi 8 i Evi 17, $CM^2 = CT \times CP$ i $CH^2 = CS \times CA$.

Per tant, $CT \times CP = CS \times CA$ [Nc 1].

O sigui $\frac{CA}{CP} = \frac{CT}{CS}$ [Evi 16].

Però $CA < CP$ [per construcció].

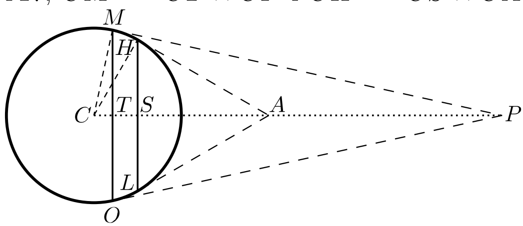



Figura 5.7. Problema 3

De retruc, $CT < CS$ [Dv 7].

I, per tant, la corda $HL$ és més curta que la $MO$ [Ei 47 o Eiii 15].][449]

**Problema 4**. Presentem ara dues demostracions geomètriques de la desigualtat trigonomètrica següent:

$$\text{«Si } \alpha < \beta < \tfrac{\pi}{2}\text{, aleshores } \tfrac{\tan\alpha}{\tan\beta} > \tfrac{\alpha}{\beta}\text{».}$$[450]

1. Siguin $BC$ i $BA$ els segments que determinen, amb el segment $ACD$, els angles $\alpha := \widehat{EAG}$ i $\beta := \widehat{GAF}$, respectivament.

Sabem que $\tan\alpha = \frac{BD}{CD}$ i $\tan\beta = \frac{BD}{AD}$.

Tirem la perpendicular $BD$ a $AD$ [Ei 11].

Volem veure que $\frac{AD}{CD} > \frac{\alpha}{\beta}$.

449. Heath (1913), nota 1, p. 363.

450. Aquesta desigualtat la retrobarem en l'obra d'Arquimedes i, en particular, en l'*Arenari*. Pla (2020), § 1.2.8, p. 103, i el text A.9.2*a*, p. 381.

[*Indicació*. Fem els passos següents:

Fem $AF$ igual a $CD$ [Ei 2 o Ei 3].

Tirem $FE$ perpendicular a $AD$ [Ei 11] i l'agafem igual a $BD$.

Unim $AE$ [P 1].

Aleshores, $\widehat{EAF} = \widehat{BCD} = \alpha$ [Ei 4].

El segment $EF$ talla el $AB$ pel punt $G$ [P 5].

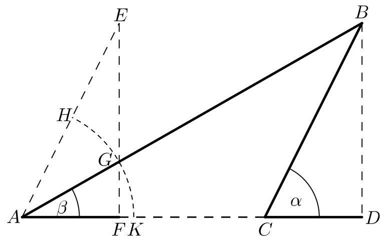



Figura 5.8. Problema 4*a*

Atès que $AE > AG > AF$, el cercle de centre $A$ i radi $AG$ talla $AE$ pel punt $H$[451] [P 5].

Prolonguem $AF$ fins a $K$ [P 2].

Aleshores, $\frac{\alpha}{\beta} := \frac{\widehat{EAG}}{\widehat{GAF}} = \frac{\triangleleft HAG}{\triangleleft GAK} < \frac{\triangle EAG}{\triangle GAF} < \frac{EG}{GF}$ [Dv 7 o Ev 8, i Evi 1].

*Componendo*, $\frac{\widehat{EAF}}{\widehat{GAF}} < \frac{EF}{GF}$ [Ev 18].

Però $\frac{EF}{GF} = \frac{BD}{GF} = \frac{AD}{AF} = \frac{AD}{CD}$ [Dv 7 i Evi 4].

Per tant, $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{AD}{DC}$ [per substitució].

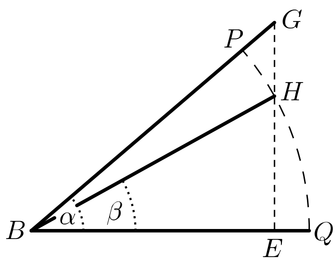



Figura 5.9. Problema 4*b*

Aristarc recorre a un cas particular, aquell en el qual $\alpha = \frac{1}{2}$ recte, és a dir, quan $CD$ i $BD$ són iguals, i obté:

$\frac{AD}{DB} > \frac{\frac{1}{2}\text{ recte}}{\widehat{BAD}}$ i $\frac{BD}{DA} < \frac{\widehat{BAD}}{\frac{1}{2}\text{ recte}}$.][452]

2. Siguin $\alpha$ i $\beta$ els angles $\widehat{GBE}$ i $\widehat{HBE}$ de la figura adjunta.

Pel punt $E$, tirem el segment $GE$ perpendicular a $BE$ [Ei 11].

Aquest segment talla $BH$ pel punt $H$ [P 5].

Considerem l'arc del cercle de centre el punt $B$ i radi $BH$ [P 3].

Aquest arc de cercle talla $BG$ pel punt $P$ i la prolongació de $BE$ pel $Q$.

451. Recordem que no s'ha establert mai en quines condicions una circumferència talla un segment o una altra circumferència. Pla (2018), p. 88, nota 269, i p. 183, nota 597.

452. Heath (1913), nota 1, p. 368-369.

Aleshores, tenim que $\frac{\triangle GBH}{\triangle HBE} > \frac{\text{sector} \lhd PBH}{\text{sector} \lhd HBQ}$, atès que el primer triangle és més gran que el primer sector, i el segon, més petit que el segon [DV 7 o EV 8].

Per tant, $\frac{GH}{HE} > \frac{\widehat{GBH}}{\widehat{HBE}}$ [EVI 1, i EV 8, i per substitució].

I, *componendo* [EV 18], $\frac{GE}{HE} > \frac{\widehat{GBE}}{\widehat{HBE}}$.

**Problema 5**. Proveu que:

*a*) Si dos angles tenen els costats perpendiculars i són de la mateixa classe, són iguals. I, si són de classes diferents, suplementaris. [*Indicació*. És un exercici de geometria plana elemental.]

*b*) L'angle $\widehat{DAF}$ és més petit que el $\widehat{KAH}$ [figura 4, pàgina 317].

**Problema 6**. Proveu que, si considerem dues cordes diferents en un cercle, la raó entre la gran i la petita és més petita que la de l'arc de la corda gran i el de la corda petita. [*Indicació*. Això ho demostra Ptolemeu en la proposició 10 del llibre primer de la *Sintaxi matemàtica*. Ho veurem en el quart volum d'aquesta història.[453]]

Observeu que aquest enunciat equival a la desigualtat trigonomètrica: si $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, aleshores $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$.

**Problema 7**. *a*) Feu tots els passos de la proposició 129 (pàgines 267-270) tal com hem procedit a la 127 (pàgines 265-267). [*Indicació*. Ajudeu-vos amb les notes del text D.2.1$a_{4b}$ (pàgines 267-270).]

*b*) Feu el mateix que indica l'ítem *a* però amb la proposició 138 (pàgines 270-271).

**Problema 8**. Proveu la validesa de les dades següents:

Dada 5. Si una magnitud té una raó donada amb una part, també en té una de donada amb l'altra part.

Dada 6. Si dues magnituds tenen una raó donada, aleshores la magnitud que s'obté ajuntant-les en té una de donada amb cada una.

Dada 7. Si dividim una magnitud donada en dues parts que tenen una raó donada, cada part queda ben determinada.

Dada 9. Si dues o més magnituds tenen entre si una raó donada i, a més, cada una té una raó donada amb una altra magnitud, aquestes altres magnituds corresponents tenen entre si raons donades.

453. Vegeu, tanmateix, HEATH (1913), nota 1, p. 368-369.

[*Indicació*. Vegeu les demostracions de les dades 1, 2, 3, 4 i 8 (pàgines 243-246).]

**Problema 9**. Expresseu de manera simbòlica els passos de la demostració del lema 4 (text D.2.1$c_4$, pàgines 276-281). [*Indicació*. Per construcció, tenim $\frac{FB}{BD} = \frac{AB}{BH} = \frac{SU}{TS}$. I, en el primer cas [primera figura], tenim que $\frac{PT^2}{TS^2} > 1$. Aleshores, $\frac{FB+AB}{BD+BH} = \frac{AB}{BH}$ [Ev 12]. Per tant, $\frac{AF}{DH} = \frac{AB}{BH}\frac{SU}{TS}$ [Ev 11]. I, *invertendo*, $\frac{DH}{AF} = \frac{BH}{AB} = \frac{TS}{SU}$ [Dv 13 i Dv 5]. En canvi, en el segon cas [segona figura], $\frac{AB-FB}{BH-BD} = \frac{AB}{BH}$ o $\frac{AF}{DH} = \frac{AB}{BH} = \frac{SU}{TS}$. I, *invertendo*, $(i)$ $\frac{DH}{AF} = \frac{BH}{AB} = \frac{TS}{SU}$ [Ev 17, Dv 13 i Dv 5].

D'altra banda, també per construcció, $\frac{EF}{DB} = \frac{AG}{GB} = \frac{PT}{TS}$. Per tant, *componendo*, $\frac{AG+GB}{GB} = \frac{PT+TS}{TS}$, o sigui, $\frac{AB}{GB} = \frac{PS}{TS}$ [Ev 18]. Però, en la part analítica de la demostració [nota 878, pàgina 278], hem establert que $\frac{AB}{GB} = \frac{EB}{DB}$. Per tant, *dividendo*, $\frac{AB-EB}{GB-DB} = \frac{AB}{GB}$ [Ev 17] o $\frac{AE}{GD} = \frac{AB}{GB}$ i, per tant, $\frac{AE}{GD} = \frac{PS}{TS}$ [Ev 11]. I, *invertendo*, $(ii)$ $\frac{GD}{AE} = \frac{TS}{PS}$ [Dv 13 i Dv 5].

Les relacions $i$ i $ii$ donen: $(iii)$ $\frac{GD\times DH}{AE\times AF} = \frac{TS}{SU} \times \frac{TS}{PS}$.]

**Problema 10**. Volem trobar el lloc de les dues rectes. Tenim dos segments $s_1$ i $s_2$, i una raó donada $\rho$. Volem saber el lloc dels punts $C$ que, si d'aquest estant tirem segments $t_1$ i $t_2$ de $C$ a $s_1$ i $s_2$ segons angles donats $\alpha_1$ i $\alpha_2$, respectivament, la raó $\frac{t_1}{t_2} = \rho$.

Ara bé, per construcció, tenim que $\frac{GD\times DH}{DC^2} = \frac{TS}{SU} \times \frac{TS}{PS} \times \frac{PT^2}{TS^2}$. I, per composició de raons, que $\frac{GD\times DH}{DC^2} = \frac{GD\times DH}{AF\times AE} \times \frac{AF\times AE}{AC^2}$. Aleshores, $\frac{GD\times DH}{AF\times AE} \times \frac{AF\times AE}{AC^2} = \frac{TS}{SU} \times \frac{TS}{PS} \times \frac{PT^2}{TS^2}$ [Ev 11]. I, usant $iii$ i la substitució, $\frac{TS}{SU} \times \frac{TS}{PS} \times \frac{AF\times AE}{AC^2} = \frac{TS}{SU} \times \frac{TS}{PS} \times \frac{PT^2}{TS^2}$. I, per tant, $\frac{AF\times AE}{AC^2} = \frac{PT^2}{TS^2}$. En definitiva, $\frac{PT^2}{TS^2}$ és la raó donada. I, com hem vist a l'inici de la demostració, tot just després d'haver establert $ii$, $\frac{ED^2}{DB^2} = \frac{PT^2}{PE^2}$. I aleshores, $\frac{AF\times AE}{DC^2} = \frac{ED^2}{DB^2} = \frac{PT^2}{PS^2}$. I, *componendo*, $\frac{AF\times AE+ED^2}{DC^2+DB^2} = \frac{PT^2}{PS^2}$ [Ev 11].

En definitiva, si dimidiem el segment $EF$ per $D$ [Ei 10] i hi afegim el segment $AE$, tenim que $AF \times AE + ED^2 = AD^2$ [Eii 6]. I, per tant, $\frac{AD^2}{DC^2+DB^2} = \frac{PT^2}{TS^2} = \frac{ED^2}{DB^2}$ [Ev 11], que és la raó donada.

Aquesta relació caracteritza l'el·lipse en el primer cas i la hipèrbola en el segon.

# Apèndix A

# Textos sobre Aristeu i el seu teorema, i sobre Eudem

Gradiaque effossis mirabitur ossa sepulcris.

VIRGILI[454]

## A.1 Alguns textos sobre Aristeu

Separem els textos en tres apartats. El primer n'aplegarà dos p. 5-11 d'Eutoci que posen de manifest que Apol·loni introdueix les seccions còniques d'una manera diferent de la que havien fet servir els seus antecessors. El segon, la «Introducció» del llibre V de la *Col·lecció matemàtica* de Pappos. I el tercer, la demostració que Hipsicles va fer del teorema d'Aristeu.

### A.1.1 Dos textos d'Eutoci

**A.1.1*a*** [...] Però, més endavant, Apol·loni va establir, d'una manera general, que qualsevol con, recte o escalè, és útil per a les seccions que depenen del comportament del pla respecte del con. [...] Gemine ho explica en el llibre sisè de la seva *Teoria de la matemàtica* (*Τῶν μαθημάτικων θεωρία*).[455]

454. «I es meravellarà veient gegantines ossades dins les tombes obertes.» VIRGILI (1956), llibre VII, vers 497, edició catalana, p. 93.

455. HEIBERG (1891-1893), volum II, p. 171. El text complet el trobem a A.1.1$a_1$ de PLA (en premsa *b*).

**A.1.1*b*** I, més endavant, Eutoci diu: «Apol·loni, que considera tant un con recte com un escalè, obté les còniques tallant-los amb plans amb inclinacions diferents».[456]

### A.1.2 La introducció del llibre v de la *Col·lecció matemàtica* de Pappos

En aquest text es mostra que solament el triangle equilàter, el quadrat i l'hexàgon regular serveixen per a pavimentar el terra. I dona les raons que justifiquen la intuïció que els déus han posat en les abelles a l'hora d'escollir els hexàgons regulars.

**A.1.2*a*** Estimat Megetius, la divinitat va concedir als homes el disseny més alt, la més perfecta saviesa i les matemàtiques,
però també va atorgar aquest privilegi, d'una manera parcial, als animals i, especialment, a les abelles.

Va concedir als homes poder-ho fer tot amb la intel·ligència, per mitjà de la raó i amb coneixement de causa.

I, als altres éssers vius, els va donar la facultat d'aconseguir el que els és necessari i vital per a llur subsistència, però sense permetre'ls que ho fessin amb la raó, sinó gràcies a una certa intuïció natural.

I això ho constatem si observem un gran nombre d'espècies animals i, d'una manera particular, el món de les abelles.

Ho fan no tan sols per la disciplina i la submissió, objectius del govern que tenen establert, sinó —i això és molt més sorprenent— pel zel i la pulcritud en la recollida de la mel i per l'atenció i saviesa a l'hora de conservar-la.

Hom estaria temptat d'afirmar que aporten aquesta parcel·la d'ambrosia als homes convençudes que reben la mel dels déus.

I no deixen que se'ls escampi per terra de manera atzarosa,
damunt de la fusta o de qualsevol altra matèria informe i irregular.

Trien les flors més formoses entre les més agradables crescudes a la terra i, per a guardar la mel, construeixen vasos de forma hexagonal —anomenats *alvèols*—, iguals, semblants i juxtaposats.

456. Heiberg (1891-1893), volum ii, p. 175.

Si hi pensem, ens podem adonar de la manera com van arribar a aquest resultat gràcies a una certa intuïció geomètrica.

Estaven convençuts que aquestes figures havien d'estar absolutament juxtaposades i amb els seus costats comuns, de manera que les substàncies foranes no poguessin filtrar-se per les seves interfícies i contaminar el fruit del seu esforç.

Hi ha, però, tres figures rectilínies que poden complir aquesta condició: els triangles [equilàters], els quadrats i els hexàgons equilàters,[457] és a dir, les figures regulars —*τεταγμένα*—, equilàteres [i equiangles],
que poden superar la repugnància de les abelles per les figures dissemblants.

Totes tres són útils per a la feina constructora de les abelles, atès que comparteixen un costat i no són dissemblants.

Sis triangles equilàters omplen l'espai que envolta un punt,
ja que cada angle val dues terceres parts d'un angle recte.

Quatre quadrats, també, ja que cada angle val un angle recte.

I tres hexàgons regulars, també, ja que cada angle val un angle recte i una tercera part d'aquest.

És clar que tres pentàgons regulars no omplen l'espai al voltant d'un punt i que cinc el sobrepassen, perquè els angles de tres no arriben a quatre rectes i els de quatre els superen.

I tres heptàgons no poden cobrir l'espai al voltant d'un punt
mantenint els costats juxtaposats, perquè tres angles del pentàgon regular valen més de quatre angles rectes, ja que cadascun val un angle recte i tres setenes parts d'aquest.

I, *a fortiori*, el mateix raonament es pot aplicar als polígons regulars amb més costats.

I, com que només aquestes tres figures —triangles equilàters, quadrats i hexàgons regulars— permeten omplir l'espai [del pla] que envolta un punt, les abelles trien, gràcies a la seva destresa, la figura més poligonal després d'adonar-se que és la que accepta més mel.

457. Són els polígons regulars que permeten pavimentar el terra. Vegeu Pla (2016*b*), p. 139 i 142, i el text A.6.13.2$b_3$, p. 431.

Només s'orienten pel que els és útil, és a dir, pel fet que l'hexàgon és més gran que el quadrat i el triangle equilàter, i que, amb la mateixa quantitat de material, poden fer un hexàgon, que és el màxim contenidor de mel.

Ara bé, nosaltres, que pretenem tenir més saviesa que les abelles, busquem una cosa més remarcable encara.

De fet, entre les figures planes equiangulars i equilàteres planes del mateix perímetre, la que té més angles és contínuament més gran.

I la més gran de totes és el cercle.[458]

### A.1.3 El teorema d'Aristeu

p. 7 Vegem, ara, la demostració que Hipsicles fa del teorema d'Aristeu en el llibre XIV dels *Elements* d'Euclides. I, com que la seva proposició depèn d'Exiv 2 —que n'és un «element»—, en donem el desenvolupament a continuació.

**A.1.3*a*** [Exiv 3] *Un mateix cercle circumscriu el pentàgon regular* [*que és la cara*] *d'un dodecaedre regular i el triangle equilàter* [*que és la cara*] *d'un icosaedre regular inscrits en la mateixa esfera.*

Abans d'establir aquest teorema hem de veure que:

*a*) El quadrat del costat d'un pentàgon [regular] juntament amb el quadrat de la diagonal que subtendeix els seus angles equivalen a cinc vegades el quadrat del radi que circumscriu el pentàgon.

Considerem el cercle $\bigcirc ABCDE$ de radi $FG$,
el pentàgon inscrit de costat $CD$
i la diagonal $CA$ que subtendeix un angle [del pentàgon regular].

Suposem que el radi $FG$ dimidia l'angle $\widehat{CGD}$ i la corda $CD$.

[Eiii 3 i Eiii 30][459]

458. Dues observacions: *a*) Pappos tracta el cercle com un polígon regular d'infinits costats i *b*) el cercle no serveix per a enllosar el terra i, per tant, no és útil per a les abelles. Pappos (1932), capítol v, edició francesa, volum ii, p. 237-239.

459. És a dir, és el radi perpendicular a la corda $CD$. En el text d'Hipsicles, s'atribueix aquest fet al porisma d'Exiii 10 (Euclides (1676), p. 459 i 506), que nosaltres no hem recollit a Pla (2020).

Afirmo que els quadrats de $CD$ i $CA$ junts equivalen a cinc vegades el de $FG$.

[*Demostració*.] Això és així perquè, si tirem $CG$, obtenim el costat del decàgon. [EIV 13 i EIII 30]

El quadrat de $AG$ equival a quatre vegades el del radi $FG$. [EII 4, porisma]

Per tant, els quadrats de $AC$ i $CG$ junts equivalen al quadrat de $AG$, [EI 47]

i, de retruc, a quatre vegades el quadrat de $FG$. [Nc 1]

En conseqüència, els quadrats de $AC$, $CG$ i $GF$, junts, equivalen a cinc vegades el de costat $FG$. [Nc 2]

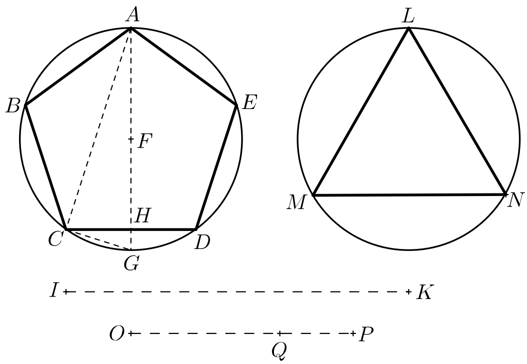


FIGURA A.1. Teorema d'Aristeu

Però els dels costats de l'hexàgon i del decàgon regular, $CG$ i $GF$, junts, equivalen al del pentàgon regular $CD$. [EXIII 10]

En definitiva, els quadrats de $AC$ i $CD$ junts equivalen a cinc vegades el de $GF$. [Nc 1]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ara establirem el teorema que hem proposat.

*b*) Siguin $IK$ el diàmetre de l'esfera en la qual es troben inscrits el dodecaedre i l'icosaedre,

$\pentagon ABCDE$ el pentàgon [cara] del dodecaedre

i $\triangle LMN$ el triangle equilàter [cara] de l'icosaedre.

Afirmo que un mateix cercle circumscriu el pentàgon $\pentagon ABCDE$ i el triangle equilàter $\triangle LMN$,

és a dir, que els cercles que circumscriuen $\pentagon ABCHE$ i $\triangle LMN$ són iguals.[460]

[*Demostració*.] Sigui $AC$ la corda que subtendeix l'angle [de vèrtex] $\hat{B}$.

460. En el sentit que tenen el mateix radi.

És l'aresta del cub inscrit en l'esfera. [Exiii 17, porisma]

Considerem el segment $OP$ de manera que el quadrat de costat $IK$
—el diàmetre de l'esfera—
és equivalent a cinc vegades el quadrat de costat $OP$.

Aleshores, $OP$ és igual al radi de l'esfera en la qual hi ha inscrit l'icosaedre. [Exiii 16, porisma]

Dividim $OP$ en mitjana i extrema raó pel punt $Q$. [Eii 11]

La part més gran, $OQ$, és el costat del decàgon inscrit en aquest mateix cercle,
i $OP$, el radi o el costat de l'hexàgon. [Exiii 9, porisma]

Ara bé, atès que el segment $CA$ està dividit en mitjana i extrema raó, [Exiii 7]
el costat més gran, $AB$, és el costat del pentàgon regular.

I $AC$ és a $OP$ com el segment més gran, $AB$, al segment més gran, $OQ$. [Exiv 2][461]

Per tant, el quadrat de $AC$ és al de $OP$ com el de $AB$ al de $OQ$. [Evi 22]

I, en conseqüència, el triple del quadrat de $AC$ és al quíntuple del quadrat de $OP$
com el triple del quadrat de $AB$ al quíntuple del quadrat de $OQ$. [Ev 4]

Però el triple del quadrat de $AC$ equival al quíntuple del quadrat de $OP$,
ja que el quadrat del diàmetre de l'esfera $IK$ equival tant al triple del quadrat de $AC$, aresta del cub, [Exiii 15]
com al quíntuple del quadrat de $OP$. [per hipòtesi]

Per tant, el triple del quadrat de $AB$ també equival al quíntuple del quadrat de $OQ$. [Dv 5]

Ara bé, el costat $LM$ del triangle equilàter [que és la cara de l'icosaedre] és igual al del pentàgon regular inscrit en el cercle de radi $OP$. [Exiii 16, porisma]

Però sabem que el quadrat de costat $ML$ equival els quadrats de costats $OP$ i $OQ$, junts
—que ho són del decàgon i de l'hexàgon regulars. [Exiii 10]

461. El reproduïm a les pàgines 161–163.

I, per tant, cinc vegades el quadrat de costat $ML$
equival a cinc vegades els quadrats de costats $OP$ i $OQ$, [Nc 2]
øa tres vegades els quadrats de costats $BA$ i $AC$, junts. [Nc 2]

Però, com hem vist abans, els quadrats de costats $BA$ i $AC$, junts, equivalen a cinc vegades el quadrat de radi $FA$.

Per tant, tres vegades els quadrats de costats $AC$ i $AB$ equivalen a quinze vegades el quadrat de costat el radi $FA$. [Nc 2]

Però cinc vegades el quadrat de costat $ML$
—que és el costat del triangle equilàter—
equival a quinze vegades el quadrat del radi del cercle $\bigcirc LMN$,
ja que cadascun dels quadrats de costat $ML$ equival a tres vegades el del radi. [Exiii 12]

I, atès que tres vegades els quadrats de costats $BA$ i $AC$, junts, equivalen a cinc vegades el quadrat de $ML$,
els quinze quadrats de costat el radi $FA$ equivalen a quinze vegades el quadrat de costat el radi del cercle $\bigcirc LMN$. [Nc 1]

En conseqüència, cada quadrat equival a cada quadrat
i el radi és igual al radi.[462]

I, de retruc, els cercles $\bigcirc ABC$ i $LMN$ són iguals. [Diii 1]

En definitiva, són un mateix cercle.

I això és el que volíem demostrar. ♠[463]

**A.1.3*b*** [Exiv 2] *Si tallem dos segments en mitjana i extrema raó, els segments i les parts tenen la mateixa raó.*

Suposem que els punts $E$ i $F$ tallen els segments $AB$ i $CD$ en mitjana i extrema raó.

Afirmo que s'han tallat de manera semblant,
és a dir, que $AB$ és a $CD$ com $AE$ a $CF$ i com $EB$ a $FD$, etc.

[*Demostració*.] Atès que $AB$ és a $AE$ com $AE$ a $EB$, [Dvi 3]
i que $CD$ és a $CF$ com $CF$ a $FD$,
els rectangles de costats $AB$ i $EB$, i $CD$ i $DF$ equivalen als quadrats de costats $AE$ i $CF$, respectivament. [Evi 17]

462. Vegeu l'ítem $f_1$ del problema 52 de Pla (2020), p. 67.
463. Euclides (1676), p. 506-509.

Per tant, el rectangle de costats $AB$ i $EB$ és al quadrat de costat $AE$ com el de costats $CD$ i $FD$ al de costat $CF$. [Ev 7]

I, aleshores, quatre vegades el rectangle de costats $AB$ i $EB$ és al quadrat de costat $AE$
com quatre vegades el rectangle de costats $CD$ i $FD$
al de costat $CF$. [Ev 4]

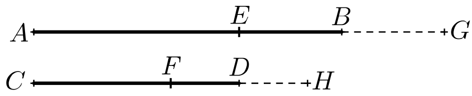



FIGURA A.2. Element del teorema d'Aristeu

Ara, a $AB$ hi afegim el segment $BG$ igual al $BE$
i, al segment $CD$, el $DH$ igual al $DE$ (figura A.2). [Ei 2][464]

I, *componendo*, quatre vegades el rectangle de costats $AB$ i $EB$,
i el quadrat de costat $AE$, junts,
[que equivalen al quadrat de costat $AG$] [Eii 8]
és al quadrat de costat $AE$
com quatre vegades el rectangle de costats $CD$ i $FD$ i el quadrat de costat $CF$, junts, [que equivalen al quadrat de costat $CH$] [Eii 8]
és al quadrat de costat $CF$. [Ev 18][465]

Per tant, $AG$ és a $AE$ com $CH$ a $CF$. [Evi 22]

I, *componendo*, $AG$ i $AE$, junts,
—és a dir, el doble de $AB$—[466] és a $AE$
com $GH$ i $CF$, junts —que és el doble de $CD$—, a $CF$. [Ev 18]

I, *permutando*, el doble de $AB$ és al doble de $CD$ com $AE$ a $CF$. [Ev 15]

Però el doble de $AB$ és al doble de $CD$ com $AB$ a $CD$. [Ev 4]

Per tant, $AB$ és a $CD$ com $AE$ a $CF$. [Ev 11]

I, atès que $AE$ i $CF$ són parts de $AB$ i $AE$, respectivament,
el residu $EB$ és al residu $FD$ com $AE$ a $CF$. [Ev 17 i Ev 16]

Ara, raonant de manera idònia en les altres proporcions,
aconseguirem establir que els segments donats i les parts corresponents són proporcionals. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠[467]

464. Pel que fa a la suma de segments, PLA (2018), nota 279, p. 89.
465. O sigui, $\frac{AG^2}{AE^2} = \frac{CH^2}{CF^2}$.
466. $AG + AE = AB + (AE + BG) = 2\,AB$, atès que $EB = BG$.
467. EUCLIDES (1676), p. 502-504.

## A.2 Alguns textos sobre Eudem

Tot seguit recollim alguns textos sobre Eudem, encara que molts ja els hem esmentat, com s'indica en el text del paràgraf 1.2.2 (pàgines 13-14).[468] Recordem-los. p. 11-13

### A.2.1 El successor d'Aristòtil al Liceu

Aule Gel·li explica la manera com va decidir Aristòtil el seu successor al Liceu. p. 12

**A.2.1*a*** Quan tenia seixanta-dos anys, el filòsof Aristòtil va patir una malaltia sense gaires esperances de curació. Coneixedors de la situació, els seus deixebles li van demanar que nomenés un successor prou hàbil per a conrear les seves ments, que els guiés després de la seva mort, que els nodrís amb els mateixos principis [del mestre] i que els ajudés a completar el seu treball.

L'escola tenia una gran quantitat de deixebles notables, però cap no s'havia distingit com Teofrast i Eudem tant pel seu enginy com per l'abast dels seus coneixements. Teofrast era natural de Lesbos i Eudem de Rodes.

Aristòtil els va respondre que se sumava al seu desig i que els ho faria saber en el moment oportú. Uns dies després, veient-se envoltat dels mateixos deixebles que li havien fet arribar aquesta petició, va dir: «El vi que bec, amarg i insalubre, no és l'adequat per a la meva salut. Trobeu-me un vi de Rodes i un de Lesbos, i prendré el que sigui més agradable». «Anem prestos a cercar-los i els hi portarem», van dir els deixebles. Llavors, Aristòtil va tastar el vi de Rodes i va dir: «Certament, aquest vi és fort i agradable». Tot seguit, va tastar el de Lesbos i va exclamar: «Aquests dos vins són de bona verema, però el de Lesbos és més dolç». Amb aquestes paraules, queda ben clar que el filòsof havia indicat d'una manera enginyosa i delicada la seva preferència, no pel vi sinó pel seu successor.

Teofrast de Lesbos era, en efecte, infinitament delicat, tant en l'eloqüència com en les maneres. Uns dies més tard, un cop mort Aristòtil,

468. Pla (2016*b*) i Pla (2018).

tots els seus deixebles van acceptar Teofrast com a nou director del Liceu.[469]

## A.2.2 Els textos d'Eudem

p. 17 Recordem els textos d'Eudem que fan referència a les aportacions dels matemàtics que van viure entre els segles VI i IV aC.

### A.2.2*a* Els textos relatius a Tales

Els textos relatius a Tales són:

**A.2.2*a*$_1$** [Ei 15] Aquest teorema estableix que, quan dos segments rectilinis es tallen, els angles verticals són iguals.[470]

I va ser enunciat, per primera vegada, per Tales.

Però segons Eudem,[471] la primera demostració científica seva la va establir l'autor dels *Elements*, tot i que no consta de totes les parts capitals —*κεφάλαιον*—,[472] ja que hi manca la construcció.[473] Tanmateix, és indispensable i depèn de la proposició tretzena i de dues nocions comunes: «Dues coses iguals a una tercera són iguals entre si» i «Si d'iguals sostraiem iguals, el que en queda són residus iguals».[474]

**A.2.2*a*$_2$** [Ei 26] Teofrast és qui s'ha preocupat de les qüestions relatives al rigor de la proposició.

Però, Eudem, en la *Història de la geometria*, atribueix el teorema a Tales i afirma que el milesi el va usar per a determinar la distància d'un vaixell a la costa.[475]

---

469. Gel·li (1930), llibre XIII, 5 5, edició electrònica, p. 425.

470. De fet, els angles oposats són iguals.

471. L'edició francesa, p. 255-256, no l'esmenta, però la grega, edició electrònica, p. 299, sí.

472. Procle les anomena també *τέλεια μέα ρη*.

473. Vegeu el text C.2.2$i_1$, pàgines 227-228.

474. Són les nocions comunes Nc 1 i Nc 3. Curiosament, Procle no esmenta que també depèn del postulat P 4 —«Tots els angles rectes són iguals»—, que és necessari per a poder aplicar les nocions comunes. Vegeu Procle (1873), § 299, edició anglesa, p. 233. I també A.6.13.2$b_4$ de Pla (2016*b*), p. 432, i (2018), p. 108.

475. Procle (1873), § 325, edició anglesa, p. 275. I també A.5.2.4*a* i A.5.2.4*c* de Pla (2016*b*), p. 380 i 381, i (2018), p. 117-118.

**A.2.2*a*$_3$** [D.17*b*] S'ha dit que el primer geòmetra que va demostrar que el diàmetre dimidia —*διχοτομία*— el cercle va ser Tales.[476]

La raó que adduïa és la incapacitat de desviar-se del segment rectilini que passa pel centre.

En efecte, havent tirat el segment pel mig i conservant en tot moment l'equilibri a tots dos costats de les dues parts,
determina una part igual del cercle a cada banda.

Però, si en volem una demostració matemàtica,
només cal que pensem que ja hem tirat el diàmetre
i hem vist que una part s'ajusta a l'altra.[477]

Si no és així,[478]
la primera caurà a l'interior o a l'exterior de l'altra.[479]

En tots dos casos tindrem que un segment més curt és igual a un de més llarg,
atès que tots els radis d'un cercle són iguals. [Di 15]

És a dir, el segment que cau fora és igual al que queda dins.

I això és impossible.

Per tant, les dues [semi]circumferències s'ajusten.

En definitiva, les dues parts són iguals
i el diàmetre divideix el cercle en dues parts que també ho són.[480]

**A.2.2*a*$_4$** [Ei 5] Aquests i molts altres teoremes són de Tales.[481]

**A.2.2*a*$_5$** [Eiii 31] Vegeu el text A.5.2.4*b* de Pla (2016*b*), p. 381, i Pla (2018), p. 224-225.

### A.2.2*b* Els textos relatius a Pitàgores

Alguns d'aquests textos ja els hem citat en altres volums:

**A.2.2*b*$_1$** [Ei 32] A.6.13.2$b_4$ de Pla (2016*b*), p. 432, i Pla (2018), p. 130-131.

---

476. Procle no esmenta Eudem com a font de l'afirmació.
477. Vegeu el mètode atribuït a Tales en Pla (2016*b*), p. 73-74.
478. Hipòtesi de l'absurd.
479. Disjunció de casos.
480. Procle (1873), § 157-158, edició anglesa, p. 124-125. I el text A.6.13.2$b_5$ de Pla (2016*b*), p. 432-433.
481. Procle (1873), § 250, edició anglesa, p. 195, i Pla (2018), p. 94-95.

**A.2.2*b*$_2$** [Ei 44] A.6.13.2$b_5$ de Pla (2016*b*), p. 432-433, i Pla (2018), p. 143-145, 162-166, i 341-344.

**A.2.2*b*$_3$** [Ei 15, porisma] A.6.13.2$b_3$ de Pla (2016*b*), p. 431.

**A.2.2*b*$_4$** [Ei 35] [Com ja hem dit,] Alguns problemes són universals i uns altres particulars, i hem aclarit el significat d'aquesta distinció.[482]

Alguns són simples i uns altres compostos, i n'hem explicat la raó.

Ara ens fixarem en una altra distinció, la que hi ha entre els teoremes que són «de llocs» i els que no ho són. Anomenem «teoremes de lloc» aquells en els quals la propietat es compleix arreu d'un cert lloc.

I entenem que «lloc» és una posició d'una línia o d'una superfície que produeix una mateixa propietat.

Uns llocs fan referència a línies i uns altres a superfícies.

I, atès que algunes línies —com ara les rectilínies— són «planes»
—és a dir, es troben en un pla i la seva generació és simple—
i unes altres són «sòlides» —com les «còniques», que s'obtenen tallant un sòlid, o l'«hèlix cilíndrica»—,
parlarem de teoremes de lloc que fan referència a línies planes
i teoremes de lloc que fan referència a línies sòlides.

La proposició que analitzem és un teorema de lloc que fa referència a línies planes,
perquè, com indica l'autor dels *Elements*,
l'espai que hi ha entre els segments paral·lels és el lloc del parallelogram construït sobre la mateixa base,
ja que són iguals.[483]

Un altre exemple de teorema de lloc és aquell que diu: «Els parallelograms inscrits entre les asímptotes i la hipèrbola són iguals»,[484]
però la hipèrbola és una línia sòlida, ja que s'obté tallant un con. [...]

Aquesta proposició [la Ei 35] és el primer teorema de lloc dels *Elements*.

482. Procle (1873), § 390 i 391, edició anglesa, p. 307-308.

483. Fixem-nos que, en aquest text, «lloc» fa referència a «invariància».

484. També es refereix a una invariància.

En el seu intent de mostrar-nos una àmplia varietat de teoremes compatibles amb una geometria elemental,
no omet aquesta classe especial de llocs. I ho fa amb tota la raó.

Tant en aquesta ocasió com en la resta del llibre I,
que tracta de línies rectes,
solament dona teoremes de lloc que s'hi referencien.

En canvi, en el llibre III
—que tracta de cercles i les seves propietats—
mostra les línies circulars que fan un paper en teoremes de llocs plans.

Per exemple, el teorema que diu: «Els angles inscrits en un mateix arc de cercle són iguals»,
i el que afirma: «Els angles inscrits en un semicercle són rectes».[485]

[...] Aquesta proposició és, doncs, de la mena de teoremes que els antics van anomenar «teoremes de llocs».[486]

**A.2.2*b*$_5$** [EI 47] PLA (2016*b*), p. 149-151, i (2016*a*), A.6.13.2$b_7$, p. 433.

**A.2.2*b*$_6$** [DI 10 a 12] Hi ha tres tipus d'angles que, segons Sòcrates, els geòmetres admeten com a hipòtesis.[487] Són l'angle recte, l'obtús i l'agut, que s'obtenen quan es consideren les diverses classes d'angles rectilinis. Els primers es distingeixen per la igualtat i semblança, els altres per la grandària o petitesa relativa i, en general, per la desigualtat, la diferència i la indefinició. En general, els geòmetres són incapaços de justificar aquesta classificació, però accepten la hipòtesi que estableix que hi ha tres menes d'angles. I, quan els demanem una explicació, ens neguen el dret a preguntar-los per aquesta qüestió. Els pitagòrics, que van ser els primers a establir-ne aquesta distinció, no tenien cap dificultat a facilitar-ne les causes.[488]

---

485. Fa referència a EIII 21 i EIII 31*a*. PLA (2018), p. 214-215 i 224-225. Tots dos teoremes es refereixen a una invariància.

486. PROCLE (1873), § 394-396, edició anglesa, p. 310-312.

487. Vegeu el text C.7 $a_1$ de PLA (2016*b*), p. 540-541.

488. PROCLE (1873), § 131, 9-25, edició anglesa, p. 105-106.

### A.2.2*c* Els textos relatius a Enòpides

Alguns, inclosos en altres volums, són:

**A.2.2$c_1$** [EI 12] Donats un segment i un punt seu o exterior a aquest, podem tirar la perpendicular al segment.[489]

**A.2.2$c_2$** [EI 23] Vegeu el text B.7.3$b_2$ de PLA (2016*b*), p. 475, i PLA (2018), p. 117-118.

### A.2.2*d* Un text sobre Antifont

El text relatiu a Antifont, que ens ha arribat a través de Simplici, i també el d'Aristòtil:

**A.2.2$d_1$** [EXII 2] PLA (2016*b*), p. 234-235, i B.7.5$c_3$, p. 480-481. I també (2019*a*), p. 484-490.

**A.2.2$d_2$** Voldríem recordar el text magnífic d'Aristòtil, en el qual diferencia la manera de procedir d'Antifont [i Brisó] i la d'Hipòcrates de Quios. PLA (2016*b*), B 7.5$c_1$, p. 459.

### A.2.2*e* El text relatiu a Hipòcrates de Quios

Aquest text, que hem conegut a través de Simplici, és el que parla de la [quadratura de les lúnules]:

**A.2.2$e_1$** Tanmateix, Eudem, en la *Història de la geometria*, diu que Hipòcrates no va demostrar [només] la quadratura d'una lúnula sobre el costat d'un quadrat, sinó que va fer el cas general.[490]

### A.2.2*f* Un text sobre les magnituds incommensurables

El text relatiu a les magnituds irracionals de Teetet ens ha arribat a través de Pappos, que afirma que coneixia els cinc sòlids platònics a través de Suïda. Aquest fet és corroborat per Heiberg:[491]

---

489. Vegeu B.7.3$b_1$ de PLA (2016*b*), p. 475, i (2018), p. 103-104.

490. Vegeu, *in extenso*, B. 7.7$e_2$ de PLA (2016*b*), p. 489-495.

Recordem que les demostracions que ofereix Simplici es basen en EI 47 i EXII 2.

491. Sabem que a Teodor, Teetet i Èudox se'ls atribueix l'estudi dels segments incommensurables. PLA (2016*b*), p. XIV, 20, 208, 220 i 249 i 250.

**A.2.2*f*$_1$** [**Els irracionals**] L'objectiu del llibre X dels *Elements* d'Euclides és la investigació de les magnituds commensurables i incommensurables.

La ciència [estudi] s'inicia a l'Escola pitagòrica, però assoleix un creixement força notable amb Teetet d'Atenes, que posseïa una notable disposició per a la matemàtica, cosa que despertava l'admiració de tothom.

Feliçment, era un dels homes més dotats. Amb paciència, es va endinsar en la investigació d'aquestes branques de la ciència, com testimonia Plató en el diàleg que té el seu nom.[492]

I, en la meva opinió, va ser qui va determinar les distincions exactes i les demostracions incontestables de les quantitats esmentades.

Si bé Apol·loni, un dels genis matemàtics més encimbellat, en va afegir d'altres molt notables amb una laboriosa anàlisi, Teetet va ser el primer a distingir les potències (és a dir, els quadrats)[493] que són commensurables i les que són incommensurables, en longitud.

A més, va diferenciar les magnituds irracionals, més generals, segons el seu significat divers.

I, segons afirma Eudem el peripatètic, Teetet va assignar la [magnitud] medial a la geometria, la binomial a l'aritmètica i l'apòtoma a l'harmonia.[494]

D'altra banda, l'objectiu d'Euclides era aconseguir principis incontrovertibles i ho va assolir per a les [magnituds] commensurables i incommensurables en general.

A més, va assenyalar les definicions i les diferències específiques entre les racionals i les irracionals. I va aconseguir molts ordres d'irracionals.

Finalment, va analitzar si, en aquestes, hi ha finitud [o indefinició].[495]

492. Es refereix a PLATÓ (1995*b*).

493. Això posa de manifest que l'anàlisi de la qual parla era de segments. Però, de retruc, es pot traslladar a les àrees de les figures poligonals planes. PLA (2020), p. 21-23.

494. PLA (2020), p. 26-27.

495. HEIBERG i MENGE (1883-1916), volum V, p. 415.

D'altra banda, Apol·loni va aconseguir explicar les menes d'irracionals ordenats i va descobrir la ciència dels que va anomenar *no ordenats* per a la qual va proporcionar un grandíssim nombre de mètodes exactes.[496]

**A.2.2*f*$_2$** [Exiii] Teetet va ser el primer a construir els cinc sòlids platònics o a escriure sobre aquests.[497]

**A.2.2*f*$_3$** Tres dels cinc sòlids platònics que, malgrat tot, no són de Plató, pertanyen als pitagòrics. En concret, el tetraedre, el cub i el dodecaedre. En canvi, els altres dos, l'octaedre i l'icosaedre, els devem a Teetet.[498]

### A.2.2*g* El text relatiu a Arquites

És el següent:

**A.2.2*g*$_1$** B.7.11$f_1$ de Pla (2016*b*), p. 505-508.

496. A Pappos (1970), § 1, edició electrònica, p. 63-64. En els § 10, 11 i 12, veiem fins a quin punt Teetet és deutor de Teodor. És un text molt aconsellable per a entendre la manera com Apol·loni va interpretar el llibre x dels *Elements*. Per a una anàlisi històrica de les mitjanes, Vitrac (1994), p. 497-506.

497. En l'entrada *Θεαίτητος* del *Suda*, llegim: «Πρῶτος δὲ τὰ πέντε καλούμενα στερεὰ.» Suïda (1834), volum i, p. 1852; Pla (2016*b*) p. 306 i (2020), p. 540.

498. Heiberg i Menge (1883-1916), volum v, p. 654.

# Apèndix B

# Textos històrics i polítics (segle III aC)

Εἰ μὲν καινοῦ τινος πράγματος προὐτίθετ΄, ὦ ἄνδρες Ἀθηναῖοι, λέγειν, ἐπισχών ἄν ἕως οἱ πλρῖστοι τῶν εἰωθότων γνώμην ἀπεφήναντα, εἰ ὼν μὲν ἤρεσκέ τί μοι τῶν ῥηθέντων, ἡσυχίαν ἄν ἦγον, εἰ δὲ μή, τότ΄ ἄν καὶ αύτος ἐπειρώμην ἅ γιγνώσκω λέγειν.

DEMÒSTENES[499]

En aquest apèndix s'inclouen, cronològicament —seguint el relat del primer capítol—, alguns textos que expliquen el context històric i polític del segle III aC, el segle d'or de la matemàtica grega, un període que comença a Grècia, amb el domini i l'herència de Macedònia, i acaba amb les guerres púniques, la mort d'Arquimedes i la presència de Roma a la Mediterrània.

499. «Atenencs!, si s'hagués discutit sobre alguna cosa nova, hauria esperat les opinions dels oradors experimentats i, si alguna de llurs propostes m'hagués plagut, hauria callat. Però, si no, jo mateix hauria provat de dir allò que en penso.» DEMÒSTENES (1932-1951), primera filípica, I [1-4], edició catalana (1932), p. 38-39.

## B.1 La fundació del regne de Macedònia

p. 26 Malgrat que la llegenda explica que el regne de Macedònia va tenir Caranos com a fundador mític, Heròdot hi situa Perdicàs I i Tucídides hi està d'acord. En canvi, Demòstenes discrepa d'aquesta opinió. És fàcil entendre la seva posició si tenim en compte que l'orador vol mostrar el rei macedoni [Filip II] com un enemic dels grecs.

**B.1*a*** [22] D'altra banda, crec que, tal com ells mateixos afirmen —i en llibres posteriors demostraré—,[500] els descendents de Perdicàs eren grecs. A més, els hel·lanòdiques (*ἑλληνοδίκαι*), que eren els responsables de les Olimpíades, també van determinar que efectivament era així. En efecte, després que Alexandre [el Gran] va decidir prendre-hi part, i amb aquest propòsit va saltar a l'arena, els seus competidors grecs el van voler excloure de la cursa, tot al·legant que els bàrbars no podien participar en els jocs perquè estaven reservats als grecs. Tanmateix, quan Alexandre va demostrar que era argiu (*ἄργιος*),[501] es va determinar que era grec i que, per tant, podia participar en la cursa de l'estadi. Ho va fer i va empatar amb el primer. Així és, més o menys, com va anar la història.[502]

**B.1*b*** [1] Es van establir, doncs, a Doberos, i es van preparar per a penetrar a la baixa Macedònia, des de l'alta, que era el domini de Perdicàs.

[6] El conjunt s'anomenava Macedònia, i Perdicàs, fill d'Alexandre [I, rei de Macedònia], n'era el rei.[503]

**B.1*c*** [137] Aquest Alexandre va ser el setè descendent d'un cert Perdicàs que, per un camí singular, va esdevenir rei de Macedònia.[504]

---

500. Vegeu B.1*c*.

501. *Argiu* a la GEC (1965): «natural d'Argos o de l'Argòlida», «grec».

502. Heròdot (2000), tom v, [22], edició catalana, p. 35-36.

503. Tucídides (1953-1981), llibre ii, xcix [1] i [6], edició catalana, p. 76. La part suprimida del text —ítems [2]-[5]— explica com es va establir el regne de Macedònia abans de Perdicàs I.

504. Heròdot (2000), llibre viii, [137], edició catalana, p. 119.

**B.1*d*** [31] En canvi, si un esclau o un que s'anomena fill dilapida, fent-lo fonedís, un patrimoni al qual no té dret, per Hèracles, que tothom diria que el fet és molt greu i indignant! Però, davant de tot allò que fa Filip, res de res. Així, ningú no pensa encara que sigui grec ni que tingui res en comú amb nosaltres, els grecs, ni tampoc que no sigui un bàrbar d'aquells amb qui es pot parlar, sinó que és un miserable macedoni, d'una terra on abans no es podia ni tan solament comprar un esclau decent.[505]

## B.2 Filip II de Macedònia

Sobre la vida de Filip II de Macedònia, concretament: la situació que havia assolit, un exemple de l'erudició que utilitza el seu contemporani Demòstenes en les *Filípiques* i, finalment, una notícia sobre la corrupció del seu regnat. p. 26

**B.2*a*** Recordem la situació en poques paraules. Filip aprofita la guerra social per estendre les seves posicions a la costa de Tràcia. Atenes, malgrat la derrota soferta en la guerra contra els seus aliats, ha provat de plantar-li cara, però la seva inferioritat, deguda a la diferència que hi ha entre l'agosarat Filip i els generals sense geni amb els quals compta Atenes, encara que tinguin bona voluntat, agreujada per la pusil·lanimitat i la peresa del poble, no cessa d'atreure nous desastres sobre les tropes de la ciutat. A penes una vegada, quan el perill ha esdevingut massa imminent per la temptativa de Filip contra les Termòpiles, Nàusicles, el cap d'una esquadra atenenca, sortosament aconsegueix protegir la Grècia autèntica contra el vencedor d'Onòmarc, que tot just acaba de conquerir Tessàlia.

La malaltia de Filip ha ajudat Atenes i el poble s'alegra de la falsa notícia de l'estat de salut del rei. Aleshores, la necessitat de preparar la propera campanya amb mesures hàbils duu Demòstenes, que fa temps que vigila amb inquietud els progressos de Filip, a prendre la

505. Demòstenes (1932-1951), edició catalana, volum II, tercera filípica, IX [31], p. 85.

paraula a l'Assemblea i iniciar amb un discurs, que podem anomenar un *discurs programa*, la lluita que li ocuparà tota la vida.[506]

**B.2*b*** [4] Atenencs, si penseu que, donada la magnitud de les seves forces i el fet d'haver perdut la República totes les places, Filip és de mal combatre, ho encerteu de ple. Però, tanmateix, cal que considereu que, en un altre temps, Pidna, Potidea i Metone,[507] amb els territoris que els envolten, i molts dels pobles que ara pertanyen a Filip, eren autònoms i lliures, i s'inclinaven a ser aliats vostres i no pas d'ell.[508] [5] I, doncs, si aleshores Filip hagués tingut la impressió que combatre els atenencs li podia resultar costós perquè disposàveu de fortaleses en els seus territoris mentre que a ell li mancaven els aliats, no hauria actuat com ho ha fet i no hauria assolit l'enorme poder que ara té. Però, atenencs, escolteu-me! S'ha adonat perfectament del següent: totes aquestes places són botins de guerra i així, per llei natural, es proposen, indistintament, els béns dels absents per als qui són presents, i els dels negligents per als qui passen penes i perills. [6] I, vet aquí, que seguint aquest principi, ho ha sotmès i ho domina tot: uns països perquè els ha conquerit i uns altres perquè se'ls ha fet amics i aliats. Tothom vol, en efecte, ser al costat, com a aliat, del qui consideren ben preparat i decidit a actuar. [7] Bé doncs, atenencs, si desitgeu seguir aquest principi, quelcom que no heu fet fins ara, cadascun de vosaltres, complint amb el seu deure i amb tot allò que podria ser útil per a la República, heu d'estar disposats a abandonar els subterfugis i a actuar, l'adinerat fent una contribució i el qui té l'edat adient servint en l'exèrcit. En una paraula, si voleu dependre de vosaltres mateixos, deixeu de pensar que no us cal fer res, que ja ho farà el veí. I així aconseguireu tornar a tenir el que us pertany, recuperareu el que heu perdut a causa de la vostra pròpia negligència i us venjareu de l'afront que us ha fet Filip.

[8] Perquè no cregueu, ni per un moment, que la fortuna de la qual gaudeix ara es mantindrà amb solidesa i serà perdurable com si fos

506. Demòstenes (1932-1951), edició catalana, volum I, notícia preliminar, p. 35-36.

507. Totes, ciutats de la costa macedònia.

508. Amb clara referència a l'Eubea.

un déu. De cap manera! Entre els qui ara li són incondicionals, uns l'odien i altres l'envegen, perquè heu de pensar que tot allò que trobem en altres homes també passa amb els que l'envolten. Certament, ara mateix tot això no us és patent i això fa que no sapigueu cap on girar-vos, per la vostra lentitud i fluixesa, la qual, com us dic, cal que us tragueu de sobre. [9] Fixeu-vos, atenencs, en la situació d'insolència a la qual ha arribat aquest home que no us deixa decidir entre actuar o mantenir-vos en pau: us amenaça, se us adreça amb petulància, i no en té prou amb el que ja ha subjugat, sinó que estén els seus dominis cada cop més i us encercla, com amb filats, pertot arreu, mentre que vosaltres, pusil·lànimes, vacil·leu i no feu res. [10] Quan, doncs, atenencs, fareu el que cal, quan? —us pregunto. Què espereu? Per Zeus, que s'imposi la determinació! Però, ara mateix, què hem de creure que passa? Penseu en el que us dic: considero que la força més gran que té l'home lliure és la vergonya del que pot esdevenir. Responeu-me: és que voleu divagar, tot preguntant-vos: «Què hi ha de nou?», perquè, què hi podria haver, més nou, que el fet que un macedoni ataqui els atenencs i dirigeixi la política dels grecs? [11] «Filip és mort?». «No, per Zeus!, però està malalt.»[509] Quina diferència hi ha, per vosaltres, entre una cosa i l'altra? Perquè, si li passés res però vosaltres mantinguéssiu la vostra actitud negligent, forjaríeu un nou Filip, perquè aquest Filip d'ara no s'ha fet tan poderós com és per la seva pròpia virtut sinó per la vostra descurança. [12] I encara us diré més: si li passava res i la Fortuna, que sempre té més cura de nosaltres que nosaltres mateixos, us feia aquest servei, tingueu present que, si us trobàveu allà i féssiu atenció a la confusió general, ho arranjaríeu com volguéssiu.[510] Però, tal com sou, encara que les circumstàncies us donessin Amfípolis, no podríeu prendre-la perquè us manca preparació i voluntat.[511]

---

509. Constantment corria la brama que Filip II estava malalt.

510. Referint-se a les diverses disputes que hi havia hagut ja, amb anterioritat, durant les successions dels reis de Macedònia.

511. Demòstenes (1932-1951), filípica primera, IV, [4]-[11], edició catalana, volum I, p. 39-41.

**B.2*c*** En sabríem molt més [de Filip II] si s'haguessin conservat els *Philippica* del coetani Teopomp de Quios (IV aC). Les *Philippica* (que no s'han de confondre amb els famosos discursos de Demòstenes) constituïen una història de Filip II i, de fet, de tot Grècia. Era una història que continuava la de Xenofont, des del 362 al 336 aC. Van ser un monument de vanitat literària, però Teopomp estava ben informat i era sincer. Fou un dels fundadors de la història psicològica, precursor de Tàcit (I-2). I, encara que considera Filip II el més gran dels homes que el món mai no hagi conegut, no l'afalaga, sinó que, ben al contrari, descriu un quadre terrible de la seva debilitat i de la vida dissoluta dels seus companys.[512]

## B.3 Alexandre el Gran

p. 28 La vida d'Alexandre el Gran va ser intensa però breu. La llegenda, en canvi, encara perdura. Recollim alguns textos relacionats amb la seva personalitat i el seu llegat mític.

**B.3*a*** [1] Pixòdar, sàtrapa de Cària, que pretenia una aliança militar amb Filip, pensà que una manera d'aconseguir-la era convertir-se en familiar seu. Per això oferí la seva filla en matrimoni a Arrideu, el fill gran de Filip. Envià, doncs, Aristòcrit a Macèdonia. Això va despertar, novament, rumors, insinuacions i acusacions que els amics i la mare feren arribar a Alexandre: amb aquests plans Filip preparava el camí de la successió i el tron, i ho feia tot pensant en Arrideu. Incòmode, Alexandre envià Tèsal, l'actor tràgic, a Cària per tal que proposés a Pixòdar una opció molt millor: que oblidés el germà bord, un pèl tocat de l'ala, i el prengués a ell com a gendre. La proposta va complaure moltíssim Pixòdar, molt més que la primera; [3] però havent-se'n assabentat Filip, va anar a la cambra d'Alexandre, que es trobava acompanyat d'un dels amics inseparables del seu fill, Filotes, el fill de Parmenió. En veure'l, l'increpà i el renyà amargament per la

512. SARTON (1952*a*), edició castellana, volum II, p. 583, nota 5. Vegeu la descripció de la corrupció en termes monitoris en el fragment 249 d'EYSSONIUS WICHERS (1829), p. 251.

seva roïndat. Li etzibà que, si creia adequat ser gendre d'un carià que, de fet, només era un esclau, el considerava indigne dels béns que li pertocaven per la seva condició. [4] I manà als corintis que li lliuressin Tèsal lligat de peus i mans; [5] i, dels altres companys d'Alexandre, desterrà Hàrpal i Nearc, i també Erigi i Ptolemeu, els quals Alexandre feu tornar més endavant i els tingué en els més alts honors.

[6] I, quan Pausànies, ultratjat per Àtal i Cleòpatra [de Macedònia], i no havent rebut cap mena de restitució, assassinà Filip, la culpa recaigué en Olimpíada, a qui atribuïen que, incitant-lo, havia fet créixer la ferida que li havia produït l'ofensa. I una part d'aquesta culpa recaigué també en Alexandre. [7] La raó —que li atribueix la brama— és que, quan Pausànies, després de rebre la injúria, se li queixà, Alexandre li replicà amb el vers de *Medea*: «A qui la feu, i a l'espòs i l'esposa».[513] [8] Sigui com sigui, perseguí —buscant-los diligentment— els responsables del crim, els castigà i s'enfadà moltíssim amb Olimpíada per la crueltat que havia mostrat amb Cleòpatra.[514]

**B.3*b*** Al començament, [Alexandre] admirava molt Aristòtil i l'estimava, com deia ell mateix, no pas menys que al seu pare perquè, si d'aquest havia rebut la vida, d'aquell havia après a viure-la noblement. Però, amb el pas dels anys, s'hi mostrà recelós, i no és pas que l'ofengués en res, sinó simplement que, en no mostrar-li ja ni aquella tendresa d'abans ni aquell caliu, quedava palès que se n'havia allunyat.[515] Això no obstant, el fervor i el deler per la filosofia que li havia transmès no desaparegueren mai més de la seva ànima, com ho testimonien l'honor que va fer a Anaxarc, els cinquanta talents que envià a Xenòcrates i l'interès que mostrà per Dandamis i Calanos.[516]

**B.3*c*** [5] Pel que sembla, Alexandre rebé d'ell [Aristòtil] no només la doctrina moral i política, sinó que participà també en els ensenyaments secrets i més íntims i profunds que els filòsofs anomenaven,

513. Medea, en el vers 288, creu que Creont, Jàson i Creüsa han de morir. Això suggereix que Alexandre li indica que han de morir Àtal, Filip i Cleòpatra.

514. Plutarc (1926-1946), tom IX, X, [1] a [8], edició catalana, p. 12.

515. Pla (2016*b*), p. 340-341. I el text C.11.1$c_1$, p. 575.

516. Plutarc (1926-1946), tom IX, VIII, [4] i [5], edició catalana, p. 10.

amb propietat, *acroamàtics* (ἀκροαματικός) i *epòptics* (ἐποπτικὰς), i que no feien extensius als de fora.[517] [6] Perquè, trobant-se a l'Àsia, s'assabentà que Aristòtil acabava de publicar alguns llibres que contenien aquestes matèries, i li escrigué una carta plena de franquesa en defensa de la filosofia, que deia: [7] «Alexandre a Aristòtil, salut! No has fet ben fet publicant els ensenyaments acromàtics. Perquè, en què excel·lirem nosaltres de la resta, si les doctrines en les quals ens hem instruït esdevenen comunes a tothom? Perquè m'estimaria molt més excel·lir en el coneixement de les coses que no pas en el poder. Estigues bo.» [8] Per tal de tranquil·litzar Alexandre, Aristòtil s'excusà dient que aquelles doctrines eren publicades i alhora no publicades; [9] perquè, certament, el tractat de física no contenia res que el fes apte ni per a l'ensenyament ni per a l'estudi, ans calia considerar-lo un memoràndum adreçat als qui ja havien après a fons la ciència.[518]

p. 30 Descripció de la gran tomba d'Alexandre.

**B.3*d*** El fèretre era d'or i el cos que contenia estava cobert d'espècies precioses. Duia un llençol mortuori púrpura brodat en or, damunt del qual s'exposava la panòplia[519] d'Alexandre. Damunt es construí un temple daurat. Columnes jòniques d'or, entrellaçades amb acant, sustentaven un sostre de volta tot d'escames d'or incrustades de joies i coronat per una corona llampant d'olivera, que sota l'efecte del Sol flamejava com els llamps. A cada cantonada s'alçava una Victòria, també del noble metall, que sostenia un trofeu. La cornisa d'or de la part inferior estava gravada en relleu amb testes de *capra ibex* —la cabra alpina— amb anelles daurades que sustentaven una garlanda policroma brillant. Als extrems hi havia borles de les quals penjaven unes campanes amb un dring diàfan i cristal·lí que ressonava a l'interior de la tomba. Sota la cornisa s'havia pintat un fris. Al primer panell, Alexandre apareixia menant un carro de gala, «amb un ceptre realment esplèndid a les mans», amb guardaespatlles macedonis i

517. Vegeu la nota 515 (pàgina 177).

518. Plutarc (1926-1946), tom ix, vii, [5] a [9], edició catalana, p. 9-10.

519. «Armadura completa». DIEC (2007).

perses; al segon, hi podíem veure una desfilada d'elefants indis amb guarniments de guerra; al tercer, la cavalleria en ordre de combat, i, al darrer, la flota. Els espais entre les columnes estaven coberts per una malla daurada que protegia el sarcòfag entapissat de sol i de pluja, però sense obstruir gens ni mica la contemplació dels visitants. Disposava d'una entrada guardada per lleons d'or. Els eixos de les rodes daurades acabaven amb caps de lleó que sostenien llances amb les dents, cosa que s'havien inventat per tal de protegir la càrrega del cos. L'estructura es trobava situada damunt d'un carruatge menat per setanta-quatre mules que, amb tirs de quatre, estaven junyides a quatre jous. Cada mula comptava amb una corona daurada, un cascavell d'or que penjava de cada una de les maixelles i un collar incrustat de gemmes.[520]

Que lluny que es troba el comportament d'Alexandre del dels herois grecs! p. 31

**B.3*e*** Els caçadors de bèsties es guarneixen amb pells de cérvols, els caçadors d'aus es cobreixen amb mantells de plomes. Mirem de no mostrar-nos davant d'un brau quan anem vestits de vermell, ni davant d'un elefant quan ho fem de blanc, perquè són colors que els irriten i espanten. I quan, a un gran rei, davant de pobles inflexibles i disposats a lluitar, se li acut la idea de tranquil·litzar-los i retenir-los al seu costat vestint-se amb les seves robes tradicionals i mostrant-se amb el seu estil de vida, per tal de suavitzar la situació i domesticar-los com si fossin autèntics animals, se'l criminalitza pel fet de voler-se familiaritzar amb mala voluntat. Que els caràcters ferotges es tornin raonables! No hauríem d'admirar, més aviat, la saviesa amb la qual, mitjançant un simple canvi de vestimenta, aconsegueix conciliar-se amb Àsia? Alhora que sotmet els cossos amb la força de les armes, atreu els cors amb la manera de vestir-se.[521]

**B.3*f*** Educat en l'admiració als herois cantats per Homer, Alexandre el Gran es mou, sense cap mena de dubte, per pulsions psicològiques

520. Renault (1975), p. 2.
521. Plutarc (1936), text francès, 1.8.

i esperances que s'havien forjat, en la seva jovenesa, amb les gestes i el destí d'Aquil·les quan lluitava davant les muralles de Troia. Pel que fa a les relacions que manté amb un passat construït i reconstruït per Homer i els seus exegetes, i també amb els mites i els déus, Alexandre és un personatge de la seva època. Hem d'admetre, doncs, sense temor a equivocar-nos que en ell són permanentment presents l'amor per la glòria i l'anhel de construir el propi personatge —que vol que sigui històric— per mitjà d'un record que el sobrevisqui però, alhora, amb un desig d'identificar-se amb els conqueridors divins i mítics, com Hèracles i Dionís.[522]

p. 31 Alexandre fa gestos cap al passat, cap al present i cap a l'esdevenidor.

**B.3*g***$_{1.1}$ La primera cosa que va fer Alexandre, en arribar a la riba, va ser llançar la javelina, com si es tractés d'un «territori enemic» i, armat, va baixar de la nau, fent com el qui dansa, i, així, va degollar les víctimes, després d'haver demanat als déus que aquestes terres llunyanes no es mostressin hostils a rebre'l com a rei. A Ílion va fer ofrenes de sacrificis funeraris davant les tombes dels qui havien caigut durant la Guerra de Troia.[523]

**B.3*g***$_{1.2}$ Adreçant-se a l'enemic, va prohibir als soldats que devastessin Àsia, i va declarar, però, que calia que li retornessin els seus béns i que no destruïssin res perquè ho prendria com a possessió.[524]

**B.3*g***$_2$ Després va saltar del vaixell [. . . ] i va significar que rebia Àsia dels déus com si fos un territori conquerit amb la llança (*δέχεσθαι δορίκτητον*) [. . . ]. Seguidament, va fer celebrar honres fúnebres a les tombes d'Aquil·les i Àiax. I, finalment, va passar revista a les tropes que l'acompanyaven.[525]

522. Briant (1974), edició castellana, p. 34.
523. Justí (2003), xi, 5.10-12.
524. Justí (2003), xi, 6.1.
525. Diodor de Sicília (1976), xvii, 17.2-4.

L'esgotament de les tropes macedònies. p. 32

**B.3*h*** [1] La lluita contra Poros desencoratjà els macedonis i els tragué les ganes d'endinsar-se encara més a l'Índia [2], perquè la derrota els havia estat molt onerosa. Poros els havia atacat amb vint mil homes i dos mil cavalls que resistiren amb molt de coratge i vivesa l'escomesa d'Alexandre per a obligar-los a travessar el Ganges (*Γάγγην περᾶσαι ποταμόν*), del qual s'assabentaren que tenia una amplada de trenta estadis i una fondària de cent braces. També saberen que, a l'altra riba, els esperaven un nombre notable d'homes armats, cavalls i elefants. [3] Els esperaven —segons els rumors— amb vuitanta mil homes a cavall, dos-cents mil infants, vuit mil carros i sis mil elefants de batalla, i els reis dels gandarites i dels presis.[526] [4] I no hi ha res exagerat en tot això perquè Sandrocottus,[527] que va ser rei una mica després, regalà a Seleuc cinc-cents elefants de cop, i amb un exèrcit de sis-cents mil homes recorregué i sotmeté tot l'Índia. [5] D'antuvi, Alexandre, irritat, es tancà dins la tenda i s'ajagué a terra. No sentia cap mena de gratitud per tot el que els macedonis havien aconseguit fins aleshores, perquè considerava que, si no arribaven a travessar el Ganges, la retirada era una derrota. [6] Però els amics el consolaven amb paraules oportunes i adients, i els soldats s'apropaven a l'entrada de la tenda i li suplicaven amb planys i crits. A la fi es deixà convèncer i feu aixecar el camp, no sense abans maquinar mil invencions enganyoses i sofisticades encaminades a acréixer la seva fama. [7] Va fer preparar, per exemple, més armes, abeuradors i menjadores de cavalls que de costum, i els va deixar abandonats, ací i allà, per tot el campament, [8] i va fer aixecar altars en honor dels déus. Encara ara, els presis travessen el riu per venerar [els déus grecs] i els fan ofrenes a la manera grega. [9] Sandrocottus, que aleshores era un vailet, veié Alexandre en persona, i conten que sovint explicava que havia faltat poc perquè Alexandre no conquerís tot l'Índia, però el rei era odiat i menystingut per la maldat que mostrava i pel seu bressol.[528]

526. Poblacions que habitaven les ribes del Ganges. PLUTARC (1926-1946), tom IX, nota 264, p. 160.

527. ESTRABÓ (1867), llibre XV, capítol 1, § 36.

528. PLUTARC (1926-1946), tom IX, LII, [1] a [9], edició catalana, p. 66-

## B.4 El far, el museu i la Biblioteca d'Alexandria

p. 35 Breu notícia de les set meravelles del món clàssic.

**B.4*a*** He vist amb els meus ulls la muralla de la dolça Babilònia, una calçada per als carruatges, l'estàtua de Zeus dels Alfeus, els jardins penjants, el Colós del sol, l'enorme obra de les altes piràmides i la vasta tomba de Mausol; però quan vaig veure la casa d'Àrtemis, enfilada als núvols, els altres marbres van perdre la brillantor i vaig dir: «Mai a cap altre lloc, només a l'Olimp, el Sol no m'ha semblat tan gran».[529]

p. 37 Breu notícia de la Biblioteca d'Alexandria.

**B.4*b*** Hom explica que Ptolemeu, rei d'Egipte, estava tan orgullós de la col·lecció de llibres aplegats a la biblioteca que imposà que tots els qui desembarcaven deixessin en préstec els llibres que tenien perquè se'n pogués fer una còpia en papir que se'ls retornaria [...], ja que els llibres que aportaven serien dipositats a la biblioteca fent menció del «vaixell» d'origen. [...] Aquest Ptolemeu posà molt interès en l'adquisició de tots els llibres antics, com reflecteix la crida que va fer als atenencs: els oferia quinze talents de plata com a penyora per les còpies d'obres de Sòfocles, d'Eurípides i d'Èsquil, en feia una sola còpia i després els la retornava en perfecte estat. Esmerçà una bona quantitat [de talents] en l'obtenció de còpies amb el millor papir disponible, quelcom que també li comportà una gran despesa. Després els enviava la còpia, es quedava les obres que li havien fet arribar els atenencs i, com a contrapartida, els deia que es quedessin els quinze talents de la penyora que havien acceptat i rebut.[530]

---

67; Diodor de Sicília (1976), 17, 93, 3, i Quint Curci (1794), 9, 2, p. 408-411.

529. Antípater de Sidó (1916), llibre IX, 58, p. 31.

530. Galè (1936), *Corpus medicorum græcorum* V, 10, 2, 1, p. 78-80, citat a Ballet (2003), p. 120.

Agustí se sorprèn que Ambròs de Milà llegeixi en veu baixa. p. 39

**B.4*c*** Quan [Ambròs, bisbe de Milà] recorria les pàgines amb els ulls, el seu cor aprofundia el sentit, però la seva veu i la seva llengua descansaven. Moltes vegades, essent-hi presents —perquè no s'hi prohibia l'entrada a ningú, ni hi havia el costum d'anunciar-li el visitant—, vèiem que llegia en silenci i que mai no ho feia de cap altra manera. I després d'haver estat asseguts força estona sense dir res —qui hauria gosat importunar un home que estava tan abstret?—, ens retiràvem suposant que, durant els breus instants que trobava per a enfortir l'esperit descansant del rebombori dels afers aliens, no volia que ningú el distragués. Potser servava el silenci pensant amb temença que un oient, atent i captivat per un passatge una mica fosc de l'autor que llegia, l'obligaria a explicar o discutir algunes de les qüestions més difícils i que, a causa del temps esmerçat en les explicacions, no podria llegir tant com li hauria estat plaent fer. O potser el verdader motiu pel qual llegia en silenci era cuidar la veu que fàcilment se li posava ronca. Però, fos quina fos la raó i la intenció amb la qual ho feia aquell baró, de ben segur que era una bona raó.[531]

## B.5 Notes sobre el naixement de Roma

**B.5*a*** Heus ací quatre textos sobre els inicis de Roma: el seu origen diví, la infància de Ròmul i Rem,[532] el predomini de Ròmul i la mort del germà,[533] i el rapte de les sabines, segons Tit Livi i Dionís d'Halicarnàs. I, a més, la justificació dels noms dels bessons, segons Plutarc. p. 45

**B.5*a*$_1$** La vestal Sílvia —qui ens pot privar de remuntar-nos fins a ella?— va a la font a cercar aigua per rentar els objectes del ritu. Hi arriba per un sender que hi davalla amb un pendent suau. Descarrega

531. Agustí de Nipona (2007), llibre VI, capítol 3, § 2, edició castellana, p. 78-79.

532. Recordem els casos de Sargon I, el fundador de Mesopotàmia, i de Moisès, llibertador del poble jueu. Pla (2016*a*), nota 294, p. 127.

533. Pensem en els germans Abel i Caín, primers fills engendrats per Adam i Eva, segons la tradició jueva.

la gerra d'argila que porta al cap. Cansada, s'asseu a terra per refrescar-se i ofereix el pit nu a la brisa mentre es pentina la cabellera embullada. Alhora reposa a l'ombra dels salzes. El xerroteig dels ocells i el murmuri lleu del riu quan puja la bressen i adormen: un son dolç li amara suaument les parpelles i la venç. Cau trànguidament en un son profund, amb la mà sostenint-li el mentó. Mart la veu, la veu i la desitja, la desitja i la pren, però gràcies al poder diví pot amagar l'acte. El son se'n va però ella resta ajaguda, gràvida; ja porta en el si el fundador de la ciutat de Roma. S'aixeca llangorosa, s'arramba a un arbre i diu: «Tant de bo el somni que he tingut sigui bo i profitós. Però, realment, no és gaire precís per a ser un somni? Jo vetllava el foc d'Ílion quan se'm desferen els cabells i la cinta caigué davant el fogar sagrat. De la cinta, prodigi admirable!, sorgiren alhora dues palmeres: una, més gran que l'altra, ben aviat cobrí el món sencer amb les branques feixugues, i la seva cabellera atengué els astres més alts. Vet aquí que el meu oncle brandà una destral. Recordant-ho m'aterro i el cor, espantat, galopa dins el meu pit. L'ocell de Mart, el pic verd, i una lloba lluitaren en defensa dels arbres bessons; gràcies a ells, les dues palmeres se salvaren». Diu així i, no sense esforç, insegura, aconsegueix alçar-se i aixecar la gerra plena d'aigua. L'ha omplert mentre repassava la visió.[534]

**B.5**$\boldsymbol{a}_2$ [Libre 1. III] [10] A continuació, regnà Proca, que engendrà Numitor i Amuli. Al fill gran, Numitor, li deixà l'antic regne del poble silvi. Però la força prevalgué sobre la voluntat paterna i sobre l'edat: [11] Amuli expulsà el germà i li prengué el regne. I, a aquest crim, n'afegí un altre: eliminà la descendència masculina de Numitor i, sota l'aparença de fer-li un honor, feu vestal Rea Sílvia, filla del seu germà. La virginitat que això li imposà feu que perdés qualsevol esperança d'engendrar.[535]

534. OVIDI (1991), edició catalana, volum I, llibre III, 11-40, p. 112-113.

535. Recordem que les verges vestals tenien cura del foc sagrat del temple de Vesta. El fet de cometre adulteri, trencant la virginitat, era castigat amb la pena de mort. Passats els trenta anys, s'acabava el sacerdoci i [les vestals] podien abandonar el temple i casar-se (*Numa* 10, 2-3, PLUTARC (1926-1946), volum XI (1933)), però el més habitual era que es

[Libre 1. IV] [1] Però crec que fou cosa del destí que l'origen d'una ciutat tan important i el començament del més gran imperi fos obra dels déus. [2] Quan la vestal, que havia estat violada, engendrà dos bessons n'atribuí la dubtosa paternitat a Mart, potser perquè així ho creia, potser perquè era més honrós que un déu en fos el responsable.[536] [3] Però ni els déus ni els homes la salvaren, ni tampoc els fills, de la crueltat reial que ordenà que la vestal fos encadenada i empresonada i els fills llançats al riu. [4] Ara bé, per voluntat dels déus, el Tíber s'havia desbordat i formava petits estanys, quelcom que impedia que ningú no pogués acostar-se al seu corrent, i, malgrat tot, els qui portaven els infants confiaven que, deixats en l'aigua encalmada, també s'ofegarien. [5] I, complint les ordres del rei, els deixaren abandonats en una bassa propera, on actualment es troba la figuera Ruminal (*ficus Ruminalis*).[537] [6] Aquell indret era ple de descampats. La llegenda conta que, en enretirar-se les aigües, la cistella on s'havien col·locat els nens quedà dipositada en un indret pla i plàcid. Aleshores, una lloba assedegada que havia baixat de les muntanyes del voltant s'hi acostà, en sentir els plors, i els oferí les mamelles de manera tan dòcil que un pastor dels ramats del rei —diuen que es deia Fàustul— la trobà llepant els nens. [7] Se'ls emportà a casa i els va donar a la dona, de nom Larència, perquè en tingués cura. D'altres, però, creuen que els pastors l'anomenaven «lloba» Larència perquè es prostituïa. D'això en surt la llegenda i el prodigi.[538] [8] Nascuts i crescuts en aquest ambient, de grans no els agradava quedar-se als estables ni cuidar els ramats, sinó que els plaïa caçar lliurement per les muntanyes. [9] Així enfortiren el cos i el caràcter, i no es dedicaren solament a perseguir les feres, sinó que atacaven els lladres carregats amb el botí; els el prenien i el repartien amb els pastors. Arribaren a

quedessin a ensenyar a les novícies, ja que ser vestal tenia un gran prestigi social i donava accés a esferes socials i de poder que restaven negades a la resta de dones romanes.

536. La nota 22 de LIVI (2002), edició catalana, p. 133, proporciona una dotzena de referències clàssiques de la fundació de Roma.

537. Pel que fa al caràcter sagrat d'aquesta figuera, vegeu PLINI (2002), 15, p. 77.

538. El terme llatí *lupa* s'usava per a anomenar les prostitutes.

aplegar una bona colla de joves —cada cop més nombrosa— amb els quals compartien tant els jocs com els treballs.[539]

**B.5*a*₃** [Capítol 1. LXXVI] [1] Quan Amuli heretà el regne dels albans, un cop que hagué exclòs per la força el germà gran, Numitor, de la dignitat que li havia atorgat llur pare, no solament mostrà un menyspreu total per la injustícia del que acabava de fer, sinó que l'agreujà privant la família de Numitor dels seus descendents, per por que poguessin fer-li pagar l'acte d'usurpació que havia comès i, amb més força encara, pel desig de mantenir el reialme. [2] Hi havia meditat amb cura des de feia temps: d'antuvi observà l'entorn d'Egest, fill de Numitor, que acabava de fer-se adult i, un cop que sortí de cacera, li preparà una emboscada a l'indret més recòndit i feu que l'assassinessin. Un cop assolit l'objectiu, procurà que tothom cregués que l'havien mort uns bandolers. Però aquest rumor malvolent no apaivagà la veritat que volia mantenir oculta, i molts vilatans —malgrat el risc que això els suposava— intentaren explicar el que realment havia succeït. [3] Numitor s'adonà del crim, però assenyadament es tancà en la pena, mostrà ignorància i prengué la decisió de posposar la venjança al moment en el qual les circumstàncies ho fessin menys perillós. Amuli, per la seva banda, convençut que havia aconseguit ocultar la veritat del que li havia passat al jove, posà en marxa un altre pla: feu d'Ília, la filla de Numitor, que d'altres anomenen Rea, de sobrenom Sílvia —aleshores en edat núbil—, una sacerdotessa de Vesta per la temença que, si es casava, engendrés fills que vengessin el destí que havia imposat a la seva família. Segons els costums establerts, les noies consagrades a la custòdia del foc etern i a la preparació dels altres ritus en representació de la comunitat havien de ser verges i mantenir-se pures durant un període mínim de cinc anys. [4] Amuli portà a terme aquest pla amb el pretext que el que pretenia era conferir honor i dignitat a la família del seu germà. Aquesta llei general no l'havia pas imposat ell i el seu germà no fou pas el primer personatge d'alt llinatge que l'hagué d'obeir, ja que, entre els albans, era força usual i fins i tot honorable que les verges de noble nissaga fossin destinades al servei de Vesta. Però Numitor,

539. LIVI (2002), llibre 1, III, 10-IV 9, edició catalana, p. 133-134.

convençut que les disposicions del seu germà no les dictava pas una intenció recta, dissimulà el ressentiment que li causaven a fi d'evitar la ràbia del poble, i només se'n lamentava en privat.[540]

**B.5*a*$_4$** [Capítol 1. LXXXIV] [1] D'altres, no obstant això, sostenen que tot allò que té a veure amb la fabulació no ha de tenir cabuda en un discurs històric. I afirmen que la salvaguarda d'uns infants per part de persones domèstiques és del tot improbable si no es feia d'acord amb les seves instruccions. Es riuen de la lloba improvisada que alleta uns nadons, i afirmen que això és simplement una faula, ja que, com a fet històric, és completament absurd i melodramàtic. [2] I donen la versió alternativa següent: quan Numitor s'adonà que Ília estava prenyada, es procurà uns altres nadons, i, quan la filla engendrà els seus nets, els intercanvià. Seguidament, ordenà que, un cop haguessin nascut els falsos nadons, fossin encomanats a qui n'havia de tenir cura, ja fos perquè se'ls havia comprat la fidelitat o perquè ho aconseguiren amb l'ajuda de les dones més fidels. Quan Amuli els rebé, els feu desaparèixer d'una manera o d'una altra. I, en canvi, els nets autèntics, dels quals l'avi havia decidit tenir cura, els envià a Fàustul. [3] Fàustul era arcadi —descendent d'arcadis que havien arribat amb Evandre. Vivia prop del Palatí i s'ocupava dels dominis d'Amuli. El seu germà Faustí —que era l'encarregat de la intendència de les tropes de Numitor que es trobaven a prop de l'Aventí— el convencé per tal que permetés a Numitor criar-hi els nois. [4] I també conten que qui els alletà i nodrí no fou pas una lloba, sinó, com podeu suposar, una dona, l'esposa de Fàustul, de nom Larència, que, en ocasions, havia prostituït la seva bellesa i a qui, per aquesta raó, la gent dels voltants del Palatí havia posat el nom de Lloba, una expressió del grec antic que s'aplicava a les dones que es prostituïen per diners. Ara, en canvi, se les designa amb un nom més respectable: *hetaires*, que significa «companyes».[541] Però, els que ignoraven tot això inventaren el mite de la lloba, l'animal que, en llatí, s'anomena *lupa*.

540. DIONÍS D'HALICARNÀS (1937), capítol 1, LXXVI.
541. Segons l'entrada del DIEC (2007), *hetera* (ἑταίρα, *hetæra*): «Entre els grecs antics, cortesana d'alta categoria».

[5] La història continua en aquests termes: un cop s'aconseguí salvar la vida dels infants, els qui tenien cura del seu creixement els en- viaren a Gabi, una vil·la propera al Palatí, per tal que aprenguessin grec i fossin educats per alguns amics de Fàustul, que els ensenyaren de lletra, música i l'ús de les armes gregues fins que arribaren a l'adolescència. [6] Quan tornaren a casa dels suposats pares, entre els germans s'establí una rivalitat sobre les pastures, s'acarnissaren amb els homes de Numitor i aconseguiren que anessin a pasturar a altres indrets.[542]

p. 45 El significat dels noms *Ròmul* i *Rem*, segons Plutarc.

**B.5*a*$_5$** Els noms de Ròmul i Rem els vingueren, diuen, del mot que significa *mamella* (*ruma*, en llatí arcaic), perquè foren vistos mamant de la lloba.[543]

p. 45 **B.5*b*** Aconsegueixen vèncer l'oncle i retornar el poder al pare. Tot seguit, es plantegen la necessitat de crear una ciutat.

**B.5*b*$_1$** [Llibre VI] [3] [...] Hi havia prou gent albana i llatina i s'hi afegiren els pastors. Tots ells pressentien que la petita Alba i la petita Lavínia serien superades per la ciutat que estaven a punt de fundar. [4] Enmig d'aquest propòsit, de seguida aparegué una desgràcia ancestral: el desig de poder. Sorgí, doncs, una rivalitat funesta, produïda per una causa natural força banal. Atès que eren bessons, no hi havia manera de distingir la prioritat d'edat. Així, per tal que els déus tutelars triessin quin dels dos germans havia de donar nom a la ciutat que volien fundar i també qui, un cop fundada, l'havia de governar, calia rebre auguris. Ròmul se situà al mont Palatí i Rem a l'Aventí.

[Llibre VII] [1] La llegenda explica que Rem fou el primer a rebre l'auguri; sis voltors. Ja s'havia enunciat l'auguri quan Ròmul rebé el doble d'ocells. Els partidaris de cadascun aclamaren rei el seu candidat. Uns al·legaren la prioritat de l'auguri; altres, la superioritat en el nombre d'ocells. [2] Es produí, doncs, una discussió i els participants la convertiren en una lluita a mort. Enmig de la confusió, Rem caigué ferit. Una altra versió —molt més estesa— conta que Rem, per mofar-

---

542. Dionís d'Halicarnàs (1937), capítol 1, LXXXIV.
543. Plutarc (1926-1946), edició catalana, volum I, VI, [2], p. 38.

se del germà, travessà d'un salt les muralles que Ròmul acabava de dissenyar.[544] Fou mort allà mateix per la còlera del germà, que seguidament exclamà: «D'ara endavant, així acabarà qualsevol que gosi travessar les meves muralles».[545] [3] De manera que Ròmul, tot sol, gaudí de tot el poder. I, un cop hagué fundat la nova ciutat, li donà el seu propi nom.[546]

**B.5*b*$_2$** [Capítol 1. LXXXVI] [1] Passaven les hores, però la discòrdia no disminuïa gens. Acceptaren, doncs, recórrer a l'avi i, amb aquesta intenció, anaren a Alba. Ell els aconsellà que posessin en mans dels déus la decisió de quin d'ells havia de donar el nom a la colònia i alhora esdevenir-ne cabdill. Fixaren un dia, i ell els demanà que, de bon matí, se situessin lluny l'un de l'altre en un indret que consideressin apropiat, i que, un cop haguessin fet les ofrenes rituals als déus, estiguessin amatents als ocells propicis. I afegí que aquell al qual se li fessin presents els ocells més favorables seria qui tindria cura de la colònia. [2] Els joves ho acceptaren, partiren i tornaren el dia que havien acordat fer la prova. Ròmul trià, com a indret per a establir la colònia, el Palatí. Rem, l'Aventí, que limitava amb el Palatí i, segons alguns, amb Remòria.[547] Aleshores, es fixà una guàrdia a cada una de les colines per tal d'evitar que allò que s'expliqués no s'ajustés als fets esdevinguts realment. [3] I, quan cadascun ocupà el seu lloc, Ròmul, passat un moment, a causa de la passió i la gelosia envers el germà —probablement el cel l'empenyia a fer-ho—, no havent vist cap presagi, envià un missatger a Rem demanant-li que hi anés de seguida, com si hagués estat el primer a veure els ocells del presagi.

544. Una muralla de fusta o, en tot cas, de maons. La primera muralla de pedra la va construir Tarquini. Pel que fa al traçat del *pomerium* (*postmœrium*) —«passat el mur»— i als primers límits de la ciutat, podeu consultar *Ròmul*, 11, 2-5, (en PLUTARC (1926-1946), edició catalana, volum I (1926)).

545. El text llatí de Tit Livi diu: «Sic deinde, quicumque alius transiliet mœnia mea». LIVI (2002), p. 137.

546. LIVI (2002), p. 136-137. Com ja s'ha dit a la pàgina 44, Varró fixa l'any 753 aC com l'any de la fundació de Roma.

547. VILLALBA (1996), p. 66: «Un lloc situat al cim de l'Aventí fou anomenat Remòria, del nom de Rem».

Però, mentre els missatgers enviats pel germà hi anaven sense gaire diligència, avergonyits per l'engany, a Rem se li aparegueren, per la dreta, sis voltors. En veure'ls, se n'alegrà fervorosament. Poc temps després, els homes de Ròmul l'apressaren i el conduïren al Palatí. En trobar-se tots dos germans, Rem demanà a Ròmul quants ocells havia vist ell primer. Ròmul no sabé què respondre. Però, aleshores, veié dotze ocells propicis. En distingir-los, li retornà el coratge, els mostrà a Rem i li digué: «Per què vols saber què ha passat fa estona? Tu mateix pots veure els ocells.» Rem s'indignà amargament per l'engany del germà i refusà abandonar la colònia.

LXXXVII. [1] Hi hagué aleshores una diferència d'interpretació entre els germans. Cadascun mirava d'aferrar-se a la que li resultava més avantatjosa. Aparentment, acceptaren l'empat: com ja he explicat, l'avi els havia dit que aquell al qual els ocells del bon auguri es presentessin primerament comandaria la colònia; però tots dos havien vist la mateixa mena d'ocells, l'un amb l'avantatge d'haver-los vist primer i l'altre d'haver-ne vist més. La resta de la població feu seva la querella i, sense rebre l'ordre dels seus caps, s'escometeren. D'això n'esdevingué un combat molt violent, amb una quantitat notable de víctimes d'un bàndol i de l'altre massacrades. [2] Segons narren alguns, durant la batalla, Fàustul —que els havia criat— intentà posar fre a la disputa. Per aconseguir-ho, s'endinsà, sense armes, al bell mig de la batalla, com si busqués la mort, i així succeí. I conten també que el lleó de pedra que hi ha a la part principal del fòrum, al costat de la tribuna, fou erigit damunt del cos inert de Fàustul, que havia estat enterrat al mateix lloc on l'havien abatut. [3] També Rem fou assassinat durant la batalla i Ròmul, que havia obtingut la victòria més negra a causa de la mort del germà i de la massacre de què havien estat objecte els ciutadans, l'enterrà a Remòria, que era l'indret que Rem, en vida, havia triat per a bastir-hi la ciutat. I ell, torturat per la pena i el remordiment, es deprimí i desitjà morir. Però Larència, que els havia acollit quan eren uns bebès, els havia alletat, els havia alimentat, els havia acompanyat mentre creixien i els havia estimat com si fossin els seus fills, el reconfortà i li suplicà que es refés del dolor i la pena. [Ròmul] l'escoltà i reprengué el desig de viure. Reuní els llatins que no havien estat morts durant la batalla —en quedaven una mica més de tres mil de l'enorme multitud que hi havia abans de la confrontació— i els ordenà que construïssin la ciutat. I així es fundà la ciutat al Palatí. [4] L'exposició que us acabo d'oferir és la que m'ha semblat més probable de totes les que circulen sobre la mort de Rem. Això no obstant, n'hi ha una altra que també us vull explicar. Hi ha qui, efectivament, diu que Rem havia deixat el comandament a Ròmul a causa de l'engany —però no pas sense ressentiment i ple de còlera. I, així, quan ja estigué construït el mur de la ciutat, desafià el germà mostrant-li la feblesa de la fortificació. I digué: «Qualsevol enemic pot traspassar aquest mur com jo ho faig ara». I, dites aquestes paraules, hi saltà per damunt. En vista d'aquesta injúria, Celer,[548] que dirigia la construcció i que en aquell moment es trobava damunt del mur, digué: «Molt bé, però qualsevol de nosaltres podrà abatre aquest enemic». I, d'un cop de pic al cap, el matà. Aquest fou el final —diuen— de la guerra que s'establí entre els germans.[549]

### **B.5*c*** L'episodi del rapte de les sabines segons Tit Livi i Dionís d'Halicarnàs.[550] p. 45

**B.5*c*$_1$** [LLIBRE 1] IX [1] Roma ja era tan vigorosa que en cas de guerra estava en igualtat de forces amb els pobles veïns; però la manca de dones feia que la seva grandesa només pogués durar una generació, ja que no hi havia cap possibilitat de descendència dins la ciutat ni de

548. OVIDI (1991), IV, p. 809 i següents, en particular, p. 834-840, edició catalana, volum II, p. 45-47: «El ciutadans, contents amb l'auguri, col·locaren els fonaments i, en poc temps, s'aixecà la nova muralla. Celer els apressava. Ròmul mateix l'havia cridat i li havia dit: "Aquesta serà la teva comesa, Celer: vigilar que ningú no travessi la muralla o la fossa que les arades han obert. Si algú gosés fer-ho, li donaràs mort".»

549. DIONÍS D'HALICARNÀS (1937), capítol 1, LXXXVII, [1]-[4].

550. És el moment de recordar la pel·lícula musical *Seven brides for a seven brothers* (1954), dirigida per Stanley Donen i protagonitzada per Howard Keel i Jane Powell. La música és de Saul Chaplin, Gene Vincent de Paul, Johnny Mercer, Adolph Deutsch i Conrad Salinger, i les lletres, de Johnny Mercer. El guió, que es basa en un text breu del premi Pulitzer Stephen Vincent Benét, és una peça que comparteix una gran dosi de virilitat masculina i de sensibilitat femenina.

matrimonis amb els pobles veïns. [2] Llavors, per recomanació dels senadors, Ròmul envià ambaixadors als pobles veïns per demanar un pacte d'amistat i una aliança matrimonial per al nou poble: [3] els recordava que les ciutats, com totes les coses, neixen d'orígens humils, i que aquelles que són ajudades pel seu valor i pels déus aconsegueixen grans riqueses i gran anomenada; [4] que era més que suficient saber que els déus havien contribuït als inicis de Roma i que no els mancaria el valor; i, per fi, que no els sabés greu que els uns i els altres barregessin la sang i la raça. [5] L'ambaixada no fou escoltada de bon grat: tan aviat se'n mofaven com tenien por, per ells mateixos i pels seus fills, d'aquell poble veí la potència del qual creixia més i més. I, quan partiren, els demanaren per què no establien un lloc d'asil per a les dones: al cap i a la fi, el matrimoni que poguessin fer-hi fora molt escaient. [6] El jovent romà rebé la notícia molt malament i pressentí que l'enfrontament seria inevitable. Aleshores, Ròmul, dissimulant el malestar, per tal de preparar el lloc i el moment oportuns, decidí celebrar uns jocs solemnes en honor a Neptú Eqüestre que anomenà Consuàlies.[551] [7] Ordenà que s'anunciés als pobles veïns. I, per tal que la celebració fos brillant i atractiva, desplegaren tota la pompa que sabien i podien fer. [8] Hi acudiren una munió de pobles veïns —ceninencs, crustumins i antemnates, entre d'altres—, en part per la curiositat de conèixer la nova ciutat. [9] I també ho feren una multitud de sabins amb les esposes i els fills, que foren acollits i hostatjats amb gran hospitalitat a les cases. Quan veieren l'emplaçament, amb les muralles i la ciutat curulla de sostres, admiraren la manera com havia crescut Roma en tan poc temps. [10] Arribà l'espectacle, i tots els ulls i totes les ments quedaren absorts davant la seva magnificència. Aleshores, tingué lloc la baralla que havien pre-

551. La Consuàlia (*Consuales Ludi* o *Consualia*) era una festivitat de l'antiga Roma que tenia lloc el 21 d'agost i el 15 de desembre. Segons Ovidi (1991), iii, 199, edició catalana, volum i, p. 120, se celebrava en honor del déu itàlic Consus, el déu de les deliberacions secretes. Però, segons Tit Livi (2002), llibre i, ix [6], edició catalana, volum i, p. 141, era dedicada al déu Neptú Eqüestre. Va ser creada pel rei Ròmul amb l'objectiu d'aplegar —tal com indica la paraula llatina *consilium*, de la qual deriva el nom— els pobles veïns al final de les collites.

parat i, quan van rebre el senyal, els joves romans raptaren les noies.[552] [11] Moltes foren agafades a l'atzar, segons les anaven trobant: algunes sobresortien per la bellesa i foren destinades als senadors principals —conduïdes per homes de la plebs que havien estat designats per a fer-ho. [12] Una d'elles, que es distingia de totes les altres en bellesa i presència, va ser raptada pel grup de Talassi i quan els preguntava a on la portaven, per evitar que fos violada, cridaven que la portaven a Talassi. Per això, aquesta paraula esdevingué pròpia del cant nupcial.[553]

[13] Els pares de les noies, espantats i tristos, fugien mentre acusaven els romans d'haver violat les lleis de l'hospitalitat i invocaven el déu de la solemnitat als jocs del qual havien acudit enganyats per l'aparença sacra i la bona fe. [14] L'esperança de les noies no era millor que la indignació que sentien ells i els familiars. Però Ròmul els deia que tot allò havia passat per l'altivesa dels seus pares, que havien negat l'aliança matrimonial a un poble veí; que elles, en canvi, compartirien, per matrimoni, el destí dels romans i de Roma, i allò que és més valuós per a tots ells, la descendència. [15] Els demanà que calmessin la ràbia i donessin el cor a aquell que els havia tocat. Així, d'una injustícia, en sorgiria l'agraïment. També els assegurà que disposarien dels millors marits perquè cada un dels romans, complint amb el deure, s'esforçaria d'allò més a omplir el buit produït per l'enyor de la família i de la pàtria d'origen. [16] Els esposos, amb manyagueries, es disculparen dient-los que els perdonessin perquè ho havien fet amb passió i per amor, que són els precs més eficaços davant l'ànima femenina.[554]

552. Plutarc, en PLUTARC (1926-1946), *Ròmul* 14, 3-7, edició catalana, volum I (1923), parla de trenta noies, que donarien el nom a les cúries romanes. Dionís d'Halicarnàs situa el rapte de les sabines en l'àmbit del mite i parla de sis-centes vuitanta-tres verges. DIONÍS D'HALICARNÀS (1937), capítol 2, XXX [1] i [6].

553. Per això, a Roma —a diferència de Grècia, que usava *ὑμὴν, ὦ ̓μέναιε*, «Oh, Himeneu, déu dels esposoris»—, feien servir l'exclamació «*Talassie, talassie*!» LIVI (2002), edició catalana, nota 44, p. 142.

554. LIVI (2002), llibre I, IX [1]-[16], edició catalana, volum I, p. 141-143.

**B.5*c*$_2$** XI [2] Així doncs, havent posat en fuga els enemics a la primera embranzida i amb la cridòria, la ciutat fou capturada, i, mentre Ròmul era ovacionat per la victòria, la seva esposa, Hersília, cansada de les queixes de les raptades, li demanà que perdonés els pares de les noies i que els acceptés dins la ciutat. Només així podrien conviure en concòrdia. Ho aconseguí amb facilitat.[555]

**B.5*c*$_3$** [Capítol 2] XXX [1] Heus aquí altres activitats d'aquest personatge[, Rómul,] relatives a les guerres de Roma, que, si bé cal atribuir-les a la tradició, poden ser esmentades en una història. [2] Hi havia una gran quantitat de pobles potents i bel·licosos que envoltaven Roma i, atès que cap no es mostrava amigable amb els romans, va decidir, amb gran desig, establir-hi aliances per mitjà de matrimonis —la manera més segura segons l'opinió sàvia dels ancians. Però alhora era conscient que els pobles veïns no s'unirien pas de bon grat als romans perquè feia massa poc temps que s'havien establert a la ciutat i per aquesta raó no eren poderosos ni per les requises que tenien ni per cap explotació important. Considerà, però, que cedirien al seu desig si emprava la força però sense ofendre'ls. I determinà, d'acord amb Numitor, el seu avi, forçar els matrimonis raptant les verges. [3] Un cop presa la decisió, feu la promesa, al déu que presideix els designis secrets, d'oferir sacrificis i celebrar festes anuals, si l'empresa tenia èxit. I així, després d'haver exposat el pla al Senat i haver-ne rebut l'aprovació, anuncià la celebració d'una festa i d'una assemblea general en honor de Neptú, i invità els pobles veïns a participar conjuntament en les celebracions. Proposà tota mena de concursos, tant amb cavalls com amb humans. [4] I així que arribaren els estrangers, amb les dones i els fills, començaren les ofrenes a Neptú i les festes. Aleshores, el darrer dia —quan s'hagué acabat la reunió—, comandant els joves romans, els faria el senyal i ells raptarien les verges que havien assistit a l'espectacle, prenent aquella que es trobés més a prop de cadascun. Els ordenà que en tinguessin cura tota la nit, sense violar-les, i que els hi portessin l'endemà en clarejar. [5] Els joves romans, que s'havien distribuït en grups, així ho feren. En veure el senyal convingut, prengueren les noies verges. Es

555. Livi (2002), llibre I, XI [2], edició catalana, volum I, p. 144.

produí un gran rebombori entre els estrangers, que s'entristiren en gran manera. L'endemà, en trencar l'alba, quan les noies foren portades a la presència de Ròmul, explicà als estrangers que les havien pres no pas per violar-les, sinó per casar-s'hi. Els explicà que era un costum grec antic i que, per a les noies, era la manera més il·lustre d'aconseguir un espòs. I els pregà que, d'aleshores endavant, estimessin aquell que els havia tocat com a espòs. [6] Comptà quantes eren i veié que eren sis-centes vuitanta-tres. Elegí, aleshores, el mateix nombre de romans solters i els casà amb cada una de les noies d'acord amb el costum del país d'elles. I segellà els matrimonis amb una comunió d'aigua i foc, de la mateixa manera que se celebren les esposalles encara avui.[556]

XXXI [1] Uns diuen que això succeí el primer any del mandat de Ròmul, però Gneo Gel·li ho retarda al quart any, quelcom molt més raonable, perquè es fa difícil creure que, tot just acabada de construir la ciutat, s'embranqui en una empresa d'aquesta mena abans d'haver instituït un govern. Pel que fa al rapte de les verges, hi ha qui l'atribueix a l'escassetat de noies entre els romans; n'hi ha, però, que diuen que era un motiu per a provocar l'enfrontament bèl·lic. Però els qui donen l'explicació més plausible —amb la qual coincideixo— ho atribueixen a una voluntat expressa de pactar aliances amb els veïns fonamentades en l'establiment d'afinitats. [2] Els romans continuen celebrant la festa que instituí Ròmul —anomenada *Consuàlia*. Desplaçant tota la terra que el cobreix, s'eleva un altar subterrani a prop del Circ Màxim.[557] I s'hi honora el déu Consus amb sacrificis i l'ofrena de primícies. S'hi fan curses de carros i de cavalls. Segons l'opinió d'alguns autors, aquest déu romà és el mateix que [el grec] Posidó.

556. DIONÍS D'HALICARNÀS (1937), capítol 2, XXX [1]-[6].

557. El Circ Màxim (Circus Maximus) va ser el principal circ romà. Era el més gran i més bell. Podia acollir dos-cents mil espectadors asseguts. S'hi feien grans espectacles, sobretot curses de carros i de cavalls, i combats de boxa. Era rodó, amb seients tot al voltant. Actualment, en queden només unes restes escadusseres. Podem imaginar el seu aspecte contemplant el Circ de Caracal·la, més ben conservat i situat a la via Àpia.

I afirmen que se l'honora amb un altar subterrani perquè és el déu de la terra.[558]

**B.5*c*₄** [Llibre I] XIII [1] Aleshores, les dones sabines, per la injúria de les quals havia començat la guerra, superada la por que l'ofensa els havia provocat, es van estirar els cabells i esquinçar la vestimenta, i es posaren enmig de les fletxes que solcaven el cel pertot arreu. Apropant-se d'un costat i d'un altre, intentaven apaivagar els contendents hostils i les ires que els movien a combatre. [2] Pregaven a llurs pares i marits que no s'esquitxessin els uns amb la sang execrable dels sogres, i els altres amb la dels gendres, no fos cas que taquessin els fills amb el parricidi: els uns dels nets i els altres dels fills. [3] Deien: «Si us avergonyiu del vostre parentiu, d'aquests matrimonis, descarregueu la ira contra nosaltres perquè som la causa de la guerra, la causa de les ferides i les morts de pares i esposos. Preferim la mort abans que viure vídues o òrfenes, sense cap de vosaltres». [4] Això commogué tant els combatents com els qui els comandaven. Sobtadament, es produí un silenci i s'estengué arreu una tranquil·litat que corprenia els uns i els altres. Llavors els caps feren un pacte de pau. I no s'acontentaren amb la pau, sinó que, de dos pobles, en feren un de sol. A partir d'aleshores, compartiren el regne i donaren tot el poder a Roma.[559]

p. 48 **B.5*d*** Textos sobre l'origen dels etruscos.

**B.5*d*₁** Els lidis es governen amb unes lleis molt semblants a les dels grecs, amb l'excepció del costum que hem explicat quan hem parlat de les seves filles, de les quals hem dit que es prostituïen. Pel que sabem, foren els primers a encunyar monedes d'or per a l'ús públic, els primers que disposaren de tavernes de vi i botigues de comestibles i que es dedicaren al comerç. Segons el seu propi relat, foren els primers a inventar els jocs que avui es practiquen a Grècia. I alhora que se'ls inventaven colonitzaven Tirrènia. Ho expliquen així: a l'època en què regnava Atis, fill de Manes, el menjar escassejava a tot Lídia. De primer ho suportaren amb paciència però, en veure que

558. DIONÍS D'HALICARNÀS (1937), capítol 2, XXXI [1]-[2].
559. LIVI (2002), llibre I, XIII [1]-[4], edició catalana, volum I, p. 147.

la situació no s'apaivagava, idearen maneres de pal·liar la gana: uns s'empescaren una cosa i d'altres una altra. D'aleshores provenen els jocs de daus i el joc de l'osset,[560] i també el joc de pilota,[561] i d'altra, llevat del joc de dames, que reconeixen que no el van inventar ells. I, tot jugant-hi, enganyaven la gana. Jugaven un dia sencer i aquell dia no es feien res de menjar; però l'endemà menjaven. I així van passar divuit anys. Tanmateix, l'escassetat no cedia, ans al contrari, augmentava. Davant d'aquesta situació, el rei decidí dividir, per sorteig, el poble lidi en dues parts; un dels grups romandria al país, amb ell, però l'altre hauria de marxar. Feu que el seu fill Tirrè comandés els qui s'havien d'expatriar. I, així, aquest grup baixà fins a Esmirna, on armà barques que carregaren el que els calia per a la navegació. I es feren a la mar a la recerca d'una terra que els proporcionés prou aliment. Després de recórrer molts països arribaren al dels umbres,[562] on fundaren la ciutat en la qual encara viuen ara. I canviaren el nom de *lidis* per l'apel·latiu del fill del rei que els havia conduït fins allà, de manera que s'anomenaren *tirrens*.[563]

**B.5$\boldsymbol{d}_2$** Els romans coneixen els tirrens o tirrenencs amb el nom de *etruscos* o *truscos*. Els grecs els havien donat el nom de *tirrens* en record de Tirrè, fill d'Atis, que, segons diuen, conduí una colònia lidiana al país on viuen. El rei Atis, descendent d'Hèrcules i d'Òmfale, jugà als daus el destí dels dos fills, Lidos i Tirrè. Manà al primer que es quedés amb ell i envià l'altre lluny amb gran part dels seus súbdits. Tirrè arribà a les costes d'Itàlia, on fundà una dotzena de petites ciutats al mateix indret que anomenà Tirrènia. I n'encomanà l'admi-

560. «Joc de l'osset» a DIEC (2007): joc infalible en què es tira l'osset a tall de dau.

561. Recordem que Nausica i les seves serventes hi jugaven. Homer (1983), llibre VI, edició catalana, volum I, p. 142.

562. La vall del Po, a la Itàlia central. La conca del riu Po, que recull les aigües dels vessants de migjorn dels Alps i del nord dels Apenins, cobreix una quarta part del territori d'Itàlia.

563. Heròdot (2000), llibre I, 94, edició catalana, p. 101-102. En síntesi, podem dir que el rei Tirrè va salvar els etruscos perquè els va conduir, amb l'ajut del seu germà Tarcont, de Lídia a Etrúria. El lloc va donar el nom grec als nouvinguts. I els romans el van estendre a la mar que es trobava a l'oest: la mar Tirrena.

nistració a un únic governant, Tarcont, nom que trobem a Tarquínia, una de les dotze ciutats [tirrenes]. Ja d'infant havia fet mostra d'una saviesa precoç i la llegenda conta que nasqué amb els cabells blancs. Mentre van viure sota el comandament d'un únic governant, els tirrens foren forts i poderosos. Però, amb el pas del temps, el lligam que els mantenia units es rompé i cada ciutat s'aïllà de la resta. Això els afeblí i els convertí en presa fàcil per als veïns. Per aquesta raó, es veieren en la necessitat de recular. Com que això els obligà a renunciar a les terres fèrtils que posseïen, bolcaren les seves esperances envers la mar. Es convertiren en pirates arreu de les costes de la mar Mediterrània. Ells que, quan estaven units podien refusar qualsevol agressió exterior, prengueren l'ofensiva i dugueren a terme expansions llunyanes.[564]

## B.6 Segona Guerra Púnica: un detall sobre Anníbal, i la mort d'Arquimedes

p. 55 Textos que parlen una mica de la personalitat d'Anníbal.

**B.6*a*$_1$** [Anníbal] [1] Anníbal, fill d'Amílcar, era cartaginès. És ben cert —ningú no ho posa en dubte— que els romans excel·lien en mèrits militars entre les nacions. Tampoc ningú no posa en dubte que Anníbal sobresortia en prudència i habilitat entre els altres comandants de la mateixa manera que els romans sobrepassen els altres pobles en valor, perquè, cada cop que Anníbal s'hi enfrontà, en va sortir vencedor. Si els seus conciutadans no l'haguessin afeblit, els hauria derrotat completament. Però l'enveja d'uns quants pot vèncer la capacitat d'un sol home. Heretà l'odi del seu pare envers Roma. I s'hi mantingué tan fidel que hauria mort abans de renunciar-hi. Un cop l'hagueren expulsat de la seva pàtria, i veient-se en la necessitat de recursos estrangers, no deixà mai d'alimentar els projectes de guerra contra els romans. De fet, deixant de banda Filip, a qui, tro-

564. Estrabó (1867), llibre v, 2 [2], p. 363-364.

bant-se absent, convertí en enemic de Roma, el rei Antíoc era el més poderós de tots els reis de l'època. Anníbal va inflamar en l'esperit d'aquest príncep un desig tan gran de fer la guerra, que decidí envair Itàlia des del mar Roig. Aleshores Roma envià ambaixadors per copsar les seves disposicions i, amb mitjans secrets, per fer-li sospitar que Anníbal —que s'havia deixat corrompre— havia canviat d'opinió i ara tenia sentiments diferents dels que tenia abans. Assabentat Anníbal de les seves intencions, parlà amb el rei en un moment favorable i, després d'haver-li exposat extensament la seva bona fe i el seu odi pels romans, afegí aquestes paraules: «Quan era petit, no tenia més de nou anys, el meu pare, Amílcar, que estava a punt d'abandonar Cartago i anar a Hispània, feu presents al gran Júpiter. I, mentre feia les ofrenes, em preguntà si volia anar amb ell. Li respongué que ho desitjava de veritat, que em dugués amb ell i no es fes enrere. I em va dir: "Et portaré amb mi, si fas el que et demano". Aleshores, feu que m'apropés a l'altar del sacrifici, demanà als presents que abandonessin l'indret i, col·locant les meves mans a l'altar, em feu jurar que "no seria mai amic dels romans". Fins ara he mantingut la promesa que li vaig fer. Això és el que fa que ningú no pugui dubtar que soc el que era. Per això t'aconsello que si penses pactar amb els romans, no m'ho diguis. Però, si penses enfrontar-t'hi, trobaràs en mi el primer i més fidel dels teus aliats.»[565]

**B.6*a*$_2$** A partir de l'arribada a Hispània, Anníbal atregué tota l'atenció. Els soldats veterans exclamaven: «Ha retornat Amílcar ple de joventut, la mateixa energia al rostre i el mateix foc a la mirada. Observeu-li els gestos, fixeu-vos en el seu aspecte».[566]

**B.6*a*$_3$** Els soldats, consternats pel record del dolor que havien sofert i desconeixent els perills amb els quals s'havien d'enfrontar quan s'endinsessin en terreny enemic, perdien el coratge que tenien en començar l'escomesa. Anníbal els reuní al cim dels Alps, des d'on es veien les planures banyades per les aigües del Po, que semblaven tal-

565. NEPOS (1923), llibre XXXIII, capítols I i II, edició castellana electrònica, p. 333-337.

566. LIVI (2002), volum XXI, llibre IV [1]-[4], edició catalana, volum XI, p. 47-48.

ment l'entrada a Itàlia. I, aleshores, usà la magnificència i la bellesa que oferia l'espectacle visual. Era, de fet, l'únic recurs que li quedava per a aconseguir que els seus homes perdessin la por i retrobessin el coratge que calia. Els indicà l'indret on es trobava la ciutat de Roma i els recordà que tenien a la seva disposició la bona voluntat que envers ells sentien els pobles que habitaven el país estès als seus peus i que, des d'allà, contemplaven [...].[567]

Així que arribà a Itàlia amb tot el seu exèrcit, decidí acampar al peu dels Alps per tal que les tropes descansessin i es refessin de la marxa [...]. Fet això, intentà connectar amb els pobles del territori de Torí, que es trobaven al peu dels Alps, per tal de fer-hi aliances.[568]

**B.6$\boldsymbol{a}_4$** Maharbal respongué: «Els déus no han concedit tots els dons possibles a un mateix home. Anníbal, saps vèncer en la batalla però no saps aprofitar la victòria.»[569]

p. 198 Textos que expliquen la mort d'Arquimedes.

**B.6$\boldsymbol{b}_1$** Però, sobretot, la desventura afligí Marcel. [Arquimedes] es trobava tot sol al pati de casa seva, reflexionant, amb tota l'atenció física i mental, sobre una figura geomètrica. Tal era la concentració del seu esperit que no s'adonà que els romans havien aconseguit prendre la ciutat i que irrompien arreu. De sobte, entrà un soldat i li manà que l'acompanyés a veure Marcel. Arquimedes es resistí a fer-ho fins que no hagués acabat de resoldre el problema i n'hagués establert la demostració. El soldat, endut per la ira, tragué l'espasa, l'endinsà en el cos [d'Arquimedes] i el matà. D'altres diuen, en canvi, que el soldat entrà ja espasa en mà amb la intenció d'occir-lo i que, Arquimedes, en veure'l, li pregà —i fins i tot suplicà— que s'esperés per tal de no deixar la recerca inacabada i sense demostració. Però el soldat, sense fer-li cas, l'occí. Un altra versió diu que Arquimedes portava instruments matemàtics a Marcel —quadrants astronòmics, esferes i escaires— amb els quals volia estudiar la magnitud del Sol.

567. Polibi (1925), llibre III LIV, edició catalana, volum II, p. 122-123.
568. Polibi (1925), llibre III LX, edició catalana, volum III, p. 3-4.
569. Livi (2002), llibre XXII, LI [3].

I es creuà amb uns soldats que, convençuts que portava or a la caixa, l'occiren per prendre-la-hi.[570]

**B.6*b*$_2$** Arquimedes estava inclinat damunt d'uns dibuixos que havia fet a terra en el moment en què un soldat que en desconeixia la identitat el matà.[571]

**B.6*b*$_3$** Arquimedes es trobava al pati de casa seva completament absort estudiant unes figures que acabava de dibuixar, quan un soldat irrompé a la casa amb la intenció de saquejar-la. Portava l'espasa fora de la beina i l'alçava per damunt del cap. Li preguntà qui era. Arquimedes, endut pel deler desmesurat de seguir amb el que feia, no encertà a respondre-li, i l'únic que feu fou protegir el terra amb les mans i dir-li: «Si us plau, no em malmetis aquests dibuixos». Semblava talment que menyspreava l'ordre del vencedor i el matà allà mateix. La pròpia mà fou la que desfaiçonar les figures que volia servar, objecte de la seva anàlisi i recerca. Així, la mateixa passió per l'estudi de la geometria, que li havia omplert la vida, la hi prengué.[572]

## B.7 La victòria pírrica

Les victòries de Pirros de l'Epir comportaven una desfeta considerable del propi exèrcit, eren victòries «pírriques». Vegem un fragment del text de Plutarc sobre la batalla d'Asculum. p. 62

**B.7*a*$_1$** Al cap de molta estona, diuen, a l'indret on es troba Pirros, comença la desfeta que resulta de l'empenta impetuosa sobre les files enemigues i de la fúria desfermada pels elefants. Els romans no poden usar el seu valor contra aquesta mena d'empenta. Com davant d'una onada gegantina o d'un terratrèmol que tot ho esberla, comprenen que han de cedir i no esperar, sense esperança, la seva mort. I fugen ràpidament del campament. Segons Jerònim [de Càrdia], perderen sis

570. PLUTARC (1926-1946), volum II, *Marcel*, XIX [8]-[11], edició catalana, tom VIII, p. 125-126.

571. LIVI (2002), llibre XXV, XXI [9].

572. VALERI MÀXIM (1471), llibre VIII 7, edició castellana, p. 7.

mil homes, però, de la banda de Pirros, segons les memòries reials, la pèrdua fou de tres mil cinc-cents cinc morts. Dionís, en canvi, [. . .] diu que, després de combatre fins a la posta del Sol, [. . .] havien mort quinze mil homes de cada bàndol. Els exèrcits se separaren. I conten que Pirros digué a un que el felicitava: «Si tenim una altra victòria com aquesta davant els romans, estem totalment perduts». Havia perdut, en efecte, una gran quantitat dels efectius dels quals disposava a l'inici, i tots els generals i amics, llevat d'uns pocs. No en disposava d'altres que els poguessin substituir i veia que els seus aliats italians se n'allunyaven. Alhora, de la banda dels romans, com una font que brolla generosa a casa, el campament se'ls reomplia ràpidament. I, amb les derrotes, no perdien el coratge, ben al contrari. Duts per la ràbia, recobraven el valor i estaven més disposats que abans a fer la guerra.[573]

El diàleg entre Pirros i el seu amic, general i filòsof, Cinees.

**B.7*a*$_2$** Cinees es parà i tot seguit prosseguí:

CINEES. I un cop hàgim conquerit Itàlia, què farem?

I Pirros, que no veia on el volia dur l'amic, respongué:

PIRROS. Sicília, una illa molt rica, molt poblada i molt mal defensada, és a prop i ens allarga les mans perquè la prenguem, perquè Agàtocles no hi és i hi regna l'anarquia i la imprudència dels demagogs.

CINEES. El que proposes té moltes possibilitats d'èxit, però creus que la conquesta de Sicília serà el final de la nostra expedició?

PIRROS. Un cop Déu ens hagi permès conquerir l'illa i triomfar, estarem llestos per a empreses encara més grans, perquè qui no pensaria en Líbia i Cartago, que ofereixen molt poca resistència, si Agàtocles, fugitiu de Sicília, amb poques naus i apropant-s'hi secretament, no hagués aconseguit prendre-les? I un cop vençuts, cap dels que ara ens insulta ens oposarà resistència.

CINEES. Cap. És molt clar que recuperarem Macedònia amb facilitat i regirem sobre Grècia. I un cop ho hàgim aconseguit, què farem?

Cinees havia portat Pirros allà on volia tenir-lo, que digué:

573. PLUTARC (1926-1946), *Pirros*, XXI, [11]-[15], edició catalana, volum XI, p. 27-28.

PIRROS (rient). Descansarem i passarem els dies amb festes i grans tiberis, i discutirem d'això i d'allò altre. Descansarem.
CINEES. I què és el que ens impedeix, si així ho volem, fruir des d'ara mateix d'aquests festins i diàlegs, en el benentès que ja podem fer allò que esperem aconseguir, sense que hàgim de vessar sang i evitant els esforços i els perills, sense produir ni patir més infortunis?

Amb aquestes paraules, Cinees entristí Pirros en lloc de fer-lo canviar d'opinió perquè, malgrat que era conscient de la tranquil·litat del moment, era incapaç de renunciar als seus projectes i aventures.[574]

Vegem la reflexió que en fa Blaise Pascal en els *Pensaments*.

**B.7*a*$_3$** Quan Cinees digué a Pirros que volia descansar amb els seus amics un cop conquerida una part del món, que faria molt bé avançant aquesta benaurança i decidint descansar, que ja havia arribat l'hora de no buscar més fadigues, li donava un consell que tenia moltes dificultats i que no estava, en absolut, en el desig del jove i ambiciós guerrer. L'un i l'altre suposaven que l'home s'acontenta de si mateix i del que posseeix, sense omplir el cor d'esperances imaginàries. Però això és fals. Pirros no podia, de cap manera, ser feliç ni abans d'haver conquerit el món ni un cop conquerit. I, probablement, la vida que li aconsellava el seu ministre el satisfeia molt menys que l'agitació de la guerra i dels viatges que s'imaginava.[575]

Montesquieu li dedica també unes paraules i el tracta d'aventurer.

**B.7*a*$_4$** La grandesa de Pirros es reduïa a les seves qualitats personals. Plutarc diu que es va veure obligat a fer la guerra perquè no podia mantenir altrament ocupats els sis mil homes d'infanteria i els sis mil de cavalleria que tenia sota el seu comandament. Aquest príncep d'un petit estat, del qual mai més ningú no ha sentit parlar després de la seva mort, era un aventurer que contínuament s'embarcava en empreses perquè d'una altra manera no hauria pogut sobreviure.[576]

574. PLUTARC (1926-1946), *Pirros*, XIV, [3]-[12], edició catalana, volum XI, p. 14-15.
575. PASCAL (1670), XXVI, § 139, p. 209.
576. MONTESQUIEU (1734), edició castellana, p. 152.

# Apèndix C

# Textos relatius a les aportacions conceptuals d'Euclides

*Ἀνυπεύθυνον δὲ καὶ ἀζήτητον καὶ ἀνεξέταστον οὐδέν ἐστι τῶν ἐν τῇ πόλει.*

ÈSQUINES[577]

Oferirem, ara, un seguit de fragments relatius a algunes de les aportacions metodològiques de la matemàtica grega i emfatitzarem les conceptuals d'Euclides. Seguint el model text-apèndix, aquests fragments corresponen al contingut del capítol segon d'aquest volum i ajuden a entendre la concepció dels *Elements*.[578]

## C.1 Textos sobre Euclides i la seva obra

No disposem de gaire informació sobre aquest geòmetra grec. p. 72
Vegem un parell o tres de textos que n'exposen alguns trets més o menys biogràfics.

577. ÈSQUINES (1999), volum II, edició catalana, p. 22: «Tot allò que hi ha a la ciutat està sotmès a verificació, investigació i examen.»

578. PLA (2018) i (2020).

p. 72 **C.1*a*** Comencem amb el text de Procle que completa l'A.4 de Pla (2016*b*).[579]

**C.1*a*$_1$** Tots els qui han escrit històries porten l'exposició del desenvolupament de la ciència al present.

En la composició dels *Elements*, Euclides ajuntà els treballs d'Èudox, sistematitzant-los, i els de Teetet, perfeccionant-los. I establí en manera demostrativa les proposicions que els seus predecessors havien determinat d'una manera més laxa.

Visqué en l'època de Ptolemeu I perquè Arquimedes, que va ser posterior a aquest general, l'esmenta. I s'explica que en una ocasió Ptolemeu I li preguntà si no hi havia un camí més planer que el de l'«Ensenyament dels elements de geometria»[580] per a aprendre aquesta ciència, i que Euclides li respongué: «No hi ha cap camí reial en geometria» (*μήφρανςεσα,˜π εἶναι βασιλικήν ἀτραπόν ἐπί γεωμετρίαν*).[581]

Per tant, Euclides és més modern que els deixebles de Plató i més antic que Arquimedes i Eratòstenes perquè, com diu Eratòstenes en algun indret, els dos geòmetres eren contemporanis.

Sembla clar, però, que era partidari de la filosofia de Plató i, per això, exposà, com a resultat dels *Elements*, la construcció de les figures platòniques.[582]

**C.1*a*$_2$** Euclides va escriure altres obres matemàtiques, totes d'una gran precisió i profunditat científiques, com ara l'*Òptica*, la *Catòptrica*, els *Elements de música* i un llibret titulat *De les divisions*. Allò més admirable [en els *Elements*] és l'ordre i la selecció dels teoremes i els problemes considerats «elements», perquè [l'obra] no inclou tots

579. Pla (2016*b*), A.4, p. 373 i següents.

580. Sembla que Euclides el va anomenar *Στοιχείωσις*, però sempre s'ha conegut com a *Στοιχεῖα* —*Elements*—, que és com ho fem nosaltres.

581. Recordem que aquesta anècdota també s'atribueix a Menecme. Pla (2016*b*), p. 323-324.

582. Procle (1873), § 68, edició anglesa, p. 56-58, i, francesa, p. 61-62. De fet, la construcció dels cinc sòlids platònics i la demostració que són els únics possibles són els objectius de les proposicions que van de l'Exiii 13 a l'Exiii 18 i que clouen el tractat. Pla (2020), p. 564-591. Però, pel que fa referència a aquesta afirmació —platònica en boca d'un platònic—, vegeu els comentaris de la pàgina 45 i del § 2.2.6 (pàgina 84 i següent).

els [teoremes] que podria haver recopilat,[583] sinó solament el que és útil per a instruir en els «primers principis de la geometria».[584] Són també dignes d'admiració les maneres diverses de raonar [que Euclides hi empra], tant quan parteix de les causes com quan ho fa dels signes,[585] sempre incontestables, exactes i adequats a la Ciència. I, finalment, són admirables els mètodes: el dialèctic, és a dir, el que distingeix els gèneres i les descobertes, el que defineix els conceptes essencials;[586] el demostratiu,[587] el del trànsit dels principis a allò que es busca, i l'analític, que retorna de les coses buscades als principis.[588] També mostra les menes diferents de recíprocs, i els distingeix convenientment segons que estableixin la reciprocitat de totes les coses amb totes les coses, de totes les coses amb una part o d'una part amb una part.

Finalment, en remarquem la continuïtat de les troballes, la distribució i l'ordre de les premisses i les seves conseqüències, i el talent[589] amb el qual presenta cada un d'aquests recíprocs. No és cert que, si afegim o traiem quelcom, ens allunyem —encara que sigui sense adonar-nos-en— de la ciència i ens endinsem en el camí de l'error i la ignorància?[590]

**C.1*b*** Una certa informació aconseguida de Pappos. En la seva opinió, Euclides era molt respectuós amb els qui l'havien precedit en la descoberta matemàtica. p. 72

583. Procle diu: *λέγειν*, 'recollir, aplegar'.
584. Procle usa *στοιχειόω*, 'principi', en el sentit d'«element».
585. Procle (1873), 206.15, edició anglesa, p. 161-162, i, francesa, p. 183, en el sentit d'Aristòtil (1987), llibre I, capítol 10, 70C.1-3.
586. Diu: *ἐν τιῖς οὐσιώδεσι λόγος*, «les raons en essència».
587. Diu: *ἀποδεικτικος*, 'apodíctic', en el sentit de «convincent» que, en el cas de la geometria, és «demostratiu».
588. No cal insistir en el fet que els *Elements* són essencialment sintètics i no participen del caràcter analític que trobem en altres obres euclidianes, com ara *Dades*, *Fenòmens* i *Porismes*.
589. Diu: *δύναμις*, 'art, talent'.
590. Procle (1873), § 68-70, edició anglesa, p. 56-58, i, francesa, p. 62-63.

**C.1*b*$_1$** Apol·loni passà molt de temps a Alexandria, on aprengué amb els deixebles d'Euclides i assolí una disposició d'esperit no desproveïda d'experiència.[591]

**C.1*b*$_2$** Apol·loni afirma, en el llibre tercer, que el problema de les tres o les quatre rectes no l'havia analitzat ningú del tot, ni Euclides ni ningú, perquè no es podia resoldre amb els coneixements que es tenien sobre còniques en la seva l'època. Per això, declara que era impossible tractar-lo de manera completa sense recórrer a resultats que Apol·loni s'havia vist obligat a establir per endavant. En canvi, Euclides, considerant que Aristeu el Vell era mereixedor d'elogis per allò que havia publicat sobre còniques, sense pretendre tornar a començar des del principi, mostrant-se lleial i mirant amb simpatia, com s'ha de fer, tots els qui havien aconseguit enriquir la ciència matemàtica amb més o menys fortuna, sense retreure'ls res, amb tota correcció i lliure de vanitat envers si mateix, demostrà tot allò que pogué sobre el lloc amb l'ajut de les *Còniques* d'Aristeu, però sense atribuir-se el fet d'haver resolt [el lloc] completament. En aquell moment, se li hauria pogut recriminar, però ara no ho podem fer, atès que ningú no retreu a Apol·loni haver deixat moltes altres qüestions sense resoldre.[592]

p. 72 **C.1*c*** Una informació sobre la vida d'Euclides deguda als àrabs.

**C.1*c*$_1$** Euclides, fill de Nàucrates i net de Zenarc,[593] considerat l'Autor de la Geometria, és un filòsof de l'antiguitat, de nacionalitat grega, amb domicili a Damasc i nascut a Tir. Gran coneixedor de la ciència de la geometria, va publicar un treball excel·lent, d'una enorme utilitat, que va titular *Fonaments* o *Elements de geometria*, una matèria que no disposava de cap tractat general abans de les aportacions gre-

591. Pappos (1932), VII 678, 10-12, edició francesa, volum II, p. 507.

592. Pappos (1932), VII 676, 25-678, 6, edició francesa, volum II, p. 507. Aquest text lliga amb el del frontispici d'aquest volum (pàgina 1 i 2). Vegeu també D.2.1$d_1$ (pàgines 283-287).

593. S'explica, a vegades, que era fill de Nàucrates i fill [o potser net] de Berenice, però també s'ha dit que Berenice és un nom genèric per a designar les reines i princeses de la dinastia làgida —la dinastia ptolemaica del 323 al 30 aC—, entre d'altres la germana de Ptolemeu I. Vegeu Heath (1921), volum I, p. 355, i Vitrac (1990), p. 15.

gues.[594] Des d'aleshores ningú no ha fet camí sense seguir les seves petges i, francament, d'aleshores ençà tothom segueix el que ell establí com a doctrina. Després d'ell, els grecs, romans i àrabs n'han estudiat l'obra i s'han proposat il·lustrar-la amb comentaris, escolis i anotacions.[595] Tampoc no han faltat els qui l'han abreujada. Per aquesta raó, els filòsofs grecs han col·locat, a la llinda de la porta de llurs escoles, aquest avís força conegut:[596] «Qui no hagi estudiat i comprès els *Elements* d'Euclides que no entri.»[597]

# C.2 Els conceptes matemàtics en l'obra d'Euclides

## C.2.1 Les influències i el valor de l'obra d'Euclides

### C.2.1*a* L'anècdota del deixeble

El deixeble desitja obtenir guanys immediats d'allò que aprèn. p. 75

**C.2.1*a*₁** Un jove que començava a estudiar geometria amb Euclides, un cop hagué llegit la primera proposició, preguntà: «Què en trec d'aprendre tot això?» Euclides cridà un esclau i li digué: «Dona-li tres òbols ja que no en té prou d'aprendre. Necessita, a més, treure'n un benefici econòmic.»[598]

**C.2.1*a*₂** Recordem, sobretot, allò que constitueix un estudi laboriós i que enllaça amb tota la filosofia. Hem d'emular els pitagòrics que estaven familiaritzats amb l'al·legoria: «Una figura i un pas, i no una figura i un triòbol».[599] Qui vol cultivar la geometria ha de saber

594. Una afirmació categòrica sobre la inexistència de tractats de geometria abans dels grecs.

595. Una constatació del fet que, després d'Euclides, la geometria es basa en els *Elements*.

596. Un plagi de la inscripció de l'Acadèmia de Plató. Pla (2016*b*), nota 527, p. 267.

597. Casiri (1760), volum I, p. 339.

598. Estobeu (1575), edició d'A. Meineke, volum IV, p. 205. Vegeu la citació de la pàgina 1.

599. El *triòbol* (τριώβολος) era una moneda grega de plata que valia

que s'ha d'aixecar per damunt d'un teorema per passar a un altre i elevar així l'ànima cap a les altures, que no ha de baixar mai a les coses sensibles ni fer-ne l'ús que habitualment en fan els mortals i que no ha d'oblidar que l'evolució és el més interessant.[600]

p. 72
### C.2.1*b* Possible influència de l'Acadèmia de Plató en els *Elements* d'Euclides

**C.2.1*b*$_1$** La fama d'Euclides es deu principalment als *Elements*, que elaborà en tretze llibres i que han exercit més influència en el pensament humà que cap altre text, llevat de la Bíblia. Per aquesta raó, en l'antiguitat, se'l coneixia com *Ὁ Στοιχειωτής*, 'l'autor dels *Elements*', o, simplement, *Ὁ Γεωμέτρης*, 'el geòmetra'. Abans d'Euclides s'havien escrit ja altres *Elements* —cal remarcar els d'Hipòcrates de Quios, de Lleó i de Teudi de Magnèsia—, però els d'Euclides els van sobrepassar de tal manera que dels altres només en coneixem les referències que en fan Eudem i Procle.[601]

## C.2.2 Els conceptes matemàtics en l'obra d'Euclides

p. 77
### C.2.2*a* L'anàlisi i la síntesi segons Procle

**C.2.2*a*$_1$** El camp de l'anàlisi, estimat fill Hermòdor, tal com l'entenc, és la matèria particular de la qual disposen els qui, un cop adquirits els elements simples, desitgen conèixer els problemes que els caracteritzen.

Aquesta matèria l'han tractada, seguint els camins de l'anàlisi i de la síntesi, homes com Euclides, Arquimedes i Aristeu el Vell.

L'anàlisi és el camí que comença en allò que es busca, que hom suposa conegut, i que assoleix, mitjançant les conseqüències que es dedueixen [d'aquest coneixement], la síntesi d'allò que havia considerat conegut.

---

tres òbols o mig dracma. Pla (2016*b*), § 1.4.5, p. 15.

600. Procle (1873), § 84, edició anglesa, p. 69, i, francesa, p. 75.

601. Gillispie (ed.) (1970), p. 126.

Suposa aconseguit, de manera efectiva, allò que es busca, i aleshores considera allò que se'n deriva i que, per tant, ho precedeix,[602] fins que, retornant sobre els passos donats, arriba a una qüestió coneguda o a una que pertany a l'ordre dels principis. Aquest camí rep el nom de *anàlisi* perquè inverteix l'ordre de la solució. La síntesi, en canvi, procedeix a l'inrevés. Enuncia [com hipotèticament cert] allò que es busca —allò que l'anàlisi donava com a conegut—, seguidament col·loca les conseqüències i les causes en l'ordre natural, i les entrelliga fins que arriba a construir[603] allò que es busca. Aquest mètode de procedir és la *síntesi*.

Hi ha dues menes d'anàlisi: la pròpia de la investigació,[604] que s'anomena *teorètica* ($\vartheta\epsilon\omega\rho\eta\tau\iota\kappa\acute{o}\nu$), i la que s'aplica a trobar allò que es proposa ($\pi o\rho\iota\sigma\tau\iota\kappa\acute{o}\nu$) i que s'anomena *problemàtica* ($\pi\rho\acute{o}\beta\lambda\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\nu$).

En l'anàlisi teorètica es considera establert i verdader el que es busca i, recolzant-se en les conseqüències que es dedueixen i que s'accepten com a verdaderes, i d'acord amb les hipòtesis, s'arriba a una qüestió ja establerta. Si aquesta qüestió és verdadera, també ho és allò que es busca, i la demostració s'obté fent el procés invers al que s'ha seguit en aquesta anàlisi. I, si és falsa, també serà fals allò que es busca.

En l'anàlisi problemàtica se suposa coneguda la proposició i, tenint en compte les conseqüències deduïdes i que es tenen per verdaderes, s'arriba a una qüestió que, si es pot realitzar o ja s'ha adquirit abans —allò que els matemàtics anomenen *dades* ($\delta\epsilon\delta o\mu\acute{\epsilon}\nu\alpha$)—, també permetrà dur a terme la proposició. I la demostració serà, com abans, inversa de l'anàlisi. I, si s'arriba a una qüestió impossible, també ho serà el problema.

Això és allò a què ens referim amb [els termes] *anàlisi* i *síntesi*.[605]

602. El precedeix en l'ordre del coneixement, com palesa la síntesi.

603. Atenció! Aquí el terme *construir* s'agafa en sentit ampli, designa tant la construcció d'un ens geomètric com l'elaboració d'una demostració. Vegeu, més endavant, l'apartat C.2.2*h*, pàgines 225-226.

604. Viète l'anomenarà *zeetètica* ($\zeta\eta\tau\eta\tau\iota\kappa\acute{o}\nu$).

605. Pappos (1932), llibre vii, edició francesa, volum ii, p. 477-478. En castellà, Vera (1970), volum ii, p. 991-992. Aquests conceptes els reprendrà Viète a l'*Isagoge*. Viète (1591), p. 13.

p. 78

## C.2.2*b* Els axiomes i els postulats en Procle

**C.2.2*b*$_1$** Cal, d'entrada, com ja hem indicat abans, distingir entre els principis i les seves conseqüències. Per fer-ho, Euclides especifica els principis comuns de la ciència al començament de cada un dels llibres dels *Elements*.

Seguidament, divideix els principis en principis comuns, postulats i axiomes, ja que són coses diferents.[606] Un axioma no és pas el mateix que un principi comú o un postulat, com ja va determinar el diví Aristòtil.[607] Quan una cosa admesa com a principi és creïble per si mateixa, és un axioma —com ara, que les coses iguals a una mateixa cosa són iguals entre si.[608] Però, quan es diu que una cosa dona fe de si mateixa, i s'accepta sense tenir-ne el concepte, aquesta cosa és una hipòtesi.[609] Així acordem, sense que ho instrueixi una noció comuna, que el cercle és una figura de tal naturalesa i, quan hom ho afirma, ho acceptem sense demostració.[610] Finalment, quan una cosa no és coneguda ni acceptada sinó assumida pel deixeble, d'acord amb Aristòtil, és un postulat —com ara que tots els angles rectes són iguals. Ara bé, qui afirma que no és possible acceptar un postulat determinat l'ha de provar.[611] Així, segons Aristòtil, es distingeixen els postulats de les hipòtesis. De vegades, tots s'anomenen *hipòtesis*, de la mateixa manera que els estoics anomenen *axiomes* els postulats. I, per això, segons els estoics, les hipòtesis són també assercions, però, segons altres filòsofs, els axiomes són també hipòtesis.[612]

606. Procle classifica les *κοναὶ ἀρχαί* en *ὑποθέσεις*, *αἰτήματα* i *αξιώματα*. En canvi, Euclides distingeix *ὅροι*, *αἰτήματα* i *κοναὶ ἔννοιαι*.

607. Aristòtil (1987), 76 a31-77 a44.

608. Fixem-nos que, per Euclides, és una noció comuna.

609. Hi ha acord a acceptar-la.

610. En Euclides són les definicions.

611. En clara referència al postulat P 5, molt discutit, i que Ptolemeu i Procle (Procle (1873), 191, 23 i següents) creien que s'havia demostrat com una proposició més i, com veurem en *Grècia IV*, van intentar-ho.

612. Procle (1873), 76-77 5, edició anglesa, p. 62-63; francesa, p. 68-69, i, castellana, a Vera (1970), volum II, 1161-1162.

**C.2.2*b*$_2$** Els principis geomètrics es divideixen en tres classes —hipòtesis, postulats i axiomes— la diferència de les quals ja hem explicat abans. Ara pretenem dissertar, d'una manera particular i precisa, sobre els postulats i els axiomes, com ja hem fet sobre les hipòtesis.[613] Els axiomes i els postulats no tenen com a objectiu fonamentar demostracions ni proporcionar seguretats geomètriques. Només pretenen ser acceptats i convertir-se en principis de les coses que els segueixen. Difereixen els uns dels altres en la manera establerta en els teoremes i problemes.

Igual que en els teoremes es volen establir i conèixer propietats, i en els problemes construir quelcom, en els axiomes s'admeten coses evidents per si mateixes, que poden ser captades i admeses fins i tot per intel·ligències sense cultivar. En els postulats, en canvi, es demana que s'acceptin coses «euporístiques»,[614] que no demanen cap esforç a l'esperit ni necessiten cap artifici o construcció. Els axiomes constitueixen, en canvi, un coneixement evident que no es pot demostrar, quelcom que és admès sense la construcció que distingeix els postulats dels axiomes, de la mateixa manera que el coneixement basat en la demostració i l'acceptació de les coses buscades, juntament amb la seva construcció,[615] distingeix els teoremes dels problemes, perquè cal que els principis superin en senzillesa, indemostrabilitat i credibilitat tot allò que en flueix.[616]

### C.2.2*c* La definició segons Plató i Aristòtil p. 79

**C.2.2*c*$_1$**

SÒCRATES. Escolta, doncs, un somni a canvi d'un somni. A mi també em va semblar sentir dir a algú que els primers diguem-ne elements, dels quals ens componem, nosaltres i les altres coses, no tenen

613. Heiberg prefereix anomenar les hipòtesis *ὅροι*, 'definicions', i les nocions comunes *κοναὶ ἔννοιαι*, 'axiomes'. Vegeu PROCLE (1873), edició anglesa, nota 178, p. 178.

614. Diu: *εὐπόριστος*, 'fàcils d'entendre'.

615. Novament, la necessitat de la construcció, quelcom primordial en la mentalitat grega.

616. PROCLE (1873), 178-179 10, edició anglesa, p. 140-141; francesa, p. 157-158, i, castellana, a VERA (1970), volum II, 1169-1170.

explicació, perquè només podem anomenar cada cosa en si però és impossible predicar-ne res més, ni què és ni què no és, ja que, en fer-ho, s'hi afegiria l'entitat o la negació, i no s'hi pot afegir absolutament res si allò que es pretén és solament anomenar-la.

[...] Però és impossible acceptar que quelcom dels primers elements sigui expressat mitjançant una explicació, ja que només els podem anomenar,[617] només tenen nom. Però tot allò que es compon d'aquests elements és complex, i per això els noms també són complexos i es converteixen en una explicació: l'essència de l'explicació és l'enllaç de noms. Així, els elements són inexplicables però perceptibles; els complexos, al contrari, són expressables, cognoscibles i susceptibles d'opinió. En conseqüència, sempre que algú considera verdadera una opinió sense explicació sobre una cosa, la seva ànima està en possessió de la veritat però ell no la sap, perquè qui no pot proporcionar ni manllevar una explicació d'una cosa la ignora. Però qui, a més, en té l'explicació, ho pot fer tot i està totalment disposat a saber. Et sembla que aquest somni té sentit així expressat?, o l'he d'explicitar d'una altra manera?

TEETET. Exactament així.

SÒCRATES. Ara, doncs, hi estàs d'acord i estableixes que el saber és l'opinió verdadera acompanyada d'explicació?

TEETET. Hi estic totalment d'acord.

SÒCRATES. És possible, Teetet, que ara, en aquest instant, hàgim descobert allò que han buscat molts homes savis des de fa temps, fins arribar a envellir sense trobar-ho?

TEETET. A mi, Sòcrates, el que acabem de dir em sembla molt encertat.

SÒCRATES. I és lògic que la cosa sigui així, perquè quin saber és possible sense una explicació i una opinió verdaderes? De tota manera, una de les coses que he afirmat no em plau.

TEETET. Quina?

SÒCRATES. La que sembla l'afirmació més subtil: que els elements són incognoscibles, mentre que els enllaços són intel·ligibles genèricament.

TEETET. Potser et sembla que això no és correcte?

617. En el sentit de *dir-los*, *expressar-los*.

Sòcrates. En tot cas, cal esbrinar-ho. Tenim, com a ostatges, els exemples que han servit per a formular aquesta tesi.[618]

**C.2.2$c_2$** Així doncs, no és clar que les qüestions que s'indaguen consisteixen en la recerca del terme mitjà. Diguem ara com es demostra el *que és*, i quin és el mode de la remissió ($\alpha\nu\alpha\gamma\tilde{o}\gamma\acute{\epsilon}$).[619] Què és la definició i de quines coses n'és [definició]. [...] És el mateix el coneixement que s'obté per definició que el que s'obté per demostració, o és impossible que sigui el mateix? Sembla que la definició fa referència a allò «que [l'objecte] és», i tot «què és» és universal i predicatiu. En canvi, de raonaments n'hi ha que són privatius i no universals.[620]

[...] La definició ho és d'allò «que és» i de l'entitat. La demostració, en canvi, sembla que pressuposi i doni per establert el «què és». Així, per exemple, les matemàtiques [pressuposen] què és l'entitat i què és l'imparell. [...] A més, una cosa és demostrar «què és [un objecte]» i l'altra, ben diferent, «que [un objecte] és». Així doncs, la definició indica què és tal cosa; la demostració, en canvi, que tal cosa és o no és en relació amb d'altres. [...]

Queda, doncs, ben establert que ni hi ha definició de tot allò que admet una demostració, ni tampoc no hi ha demostració de tot allò que admet una definició. A més, en general, no és admissible que ambdues es donin del mateix objecte.[621]

## C.2.2*d* Els diorismes en Procle p. 81

**C.2.2$d_1$** Proposició I (problema I). *Construïu un triangle equilàter de costat donat.*

Tota ciència, considerada en la seva totalitat, té dues parts: l'aplicació a proposicions immediates [a partir de les premisses] i l'extensió de l'aplicació, de manera sistemàtica, a aquells objectes que poden ser demostrats o construïts a partir d'aquests principis o, en ge-

618. Plató (1995*b*), 201 e-202 a-e, edició catalana, p. 146-147.

619. Aquest terme s'aplica a la reducció de la definició a la demostració, o bé com a principi de la demostració o bé com a conclusió.

620. En referència a la taxonomia de les proposicions que ha establert.

621. Aristòtil (1987), 90 a 35-90 b5, 91 a 1-91 a 12, edició castellana, p. 395-396 i 397-398.

neral, que en són conseqüència. En geometria, aquesta segona part se subdivideix també en dues: la resolució de problemes i l'establiment de teoremes. Anomenem *problemes*[622] les proposicions que tenen com a objecte aconseguir, posar de manifest o construir les coses que encara no són, i *teoremes* les proposicions que pretenen concebre, reconèixer i demostrar que quelcom s'esdevé o no. En efecte, l'objectiu dels problemes és proposar creacions, posicions, aplicacions,[623] descripcions, circumscripcions, ajustaments, contactes i totes les qüestions d'aquesta mena. Els teoremes, en canvi, s'esforcen a expressar les propietats, allò que és inherent als objectes geomètrics, i a convèncer [de la seva veritat] per mitjà de les demostracions.

Així, siguin quins siguin els objectes que s'estiguin tractant, la geometria els té tots en compte, però tractant els uns com a problemes i els altres com a teoremes. En efecte, busca allò que una cosa és i ho fa de dues maneres: cercant la raó i el concepte, o cercant la substància d'allò que es proposa. Afirmo que [la geometria] procedeix d'aquesta manera. Per exemple, quan hom cerca què és un segment homeomèric,[624] procura trobar-ne una definició, és a dir, «un segment és homeomèric quan cada una de les seves parts s'ajusta a cada una de les seves parts», o establir la forma que és exclusivament del segment rectilini, de la circumferència d'un cercle o de l'espiral cilíndrica. [La geometria] mira aleshores si els segments existeixen tal com han estat definits. I això ho fa, d'una manera particular, en els diorismes,[625] que destrien si els objectes que volem determinar són possibles o impossibles, i, quan són possibles, de quantes i de quines maneres ho són.

622. Vegeu l'ítem relatiu als problemes i teoremes (§ 3.2.11, pàgines 95-96) i els textos que hi estan relacionats (C.2.2$h_1$, pàgines 225-226).

623. Diu: παραβολή, l'aplicació d'una àrea en la totalitat d'un segment. Vegeu l'aplicació d'àrees en la matemàtica pitagòrica. Pla (2016*b*), p. 144-150.

624. Un *segment homeomèric*, ὁμιομερής, és aquell que «és semblant en totes les seves parts». Segons Gemine, solament n'hi ha tres: el rectilini, la circumferència del cercle i l'espiral cilíndrica. Que aquesta darrera ho és ho va establir Apol·loni. Vegeu Procle (1873), 105, 5; 112, 1-113, 3, i 201, 13. Edició anglesa, p. 85-86, 91-92 i 158, i, francesa, p. 95, 101-102 i 139-140. Podem trobar-ne una exposició detallada a Acerbi (2010).

625. Diu: διορισμός.

En definitiva, la geometria cerca la qualitat[626] de l'objecte, examina les propietats intrínseques[627] del triangle, el cercle i els segments paral·lels; pretén determinar de quina mena de coses es tracta.

Molta gent pensa que la geometria no es preocupa d'investigar la causa, és a dir, no es preocupa del «per què?» de les coses. Anfinomi és d'aquesta opinió, una opinió que, tanmateix, havia mantingut per primera vegada Aristòtil.[628] «Aquesta pregunta es troba dins la geometria», afirma Gemine. O és que potser no forma part de la tasca del geòmetra preguntar-se: per què és possible inscriure en una circumferència una infinitat de polígons regulars i, en canvi, no ho és inscriure en una esfera una infinitat de poliedres que tinguin totes les cares, les arestes i els angles iguals?[629]

### C.2.2*e* Els conceptes de «divisió» en l'obra d'Euclides p. 84

**C.2.2$e_1$** Les potencialitats de la ciència matemàtica es manifesten doblement. Unes plantegen un gran nombre de principis per endavant i fan possibles camins diversos d'especulació, d'altres reuneixen molts camins que fan possibles les hipòtesis particulars. En efecte, ja que la matemàtica prioritza principis com la unitat i la pluralitat, allò que és finit i allò que és infinit, i que les coses que se sotmeten a la comprensió estan dotades d'un rang intermedi entre les formes indivisibles i les que són totalment divisibles. Creiem que les potencialitats que són aptes per a comprendre la ciència completa d'aquestes coses es mostren, amb raó, sota aquesta dualitat. Les unes opten per unificar i aplegar la pluralitat. Les altres són capaces de diferenciar les coses

---

626. Diu: *τὸ ὁποῖόν*, que en l'àmbit de l'escolàstica significava «qualitat o naturalesa d'una cosa». De fet, pregunta: quina mena de cosa és això?

627. Diu: *τὰ καθ' αὑτὰ συμβεβηκότα*.

628. Es fa difícil acceptar aquesta opinió, ja que, Aristòtil (1987), 85 b 23 i següents, insisteix que, en l'objectiu, les demostracions són raonaments que estableixen les causes, i usa *αἴτια* o *διὰ τί*, que és la mateixa expressió que adopta Gemine. De fet, l'existència dels cinc únics poliedres regulars té una certa analogia amb l'enrajolament del terra amb polígons regulars. Pla (2016*b*), ítem *c*, p. 139 i 142, i el text A.6.13.2$b_3$, p. 431.

629. Procle (1873), 200, 13-202, 10, edició anglesa, p. 157-158, i, francesa, p. 178-180.

simples i les diverses, les generals i les particulars, i les idees primàries i les secundàries. I les converteixen en conseqüències dels principis perquè, iniciant-se en les altures, la matemàtica s'estén fins a les execucions sensibles, s'apropa a la naturalesa i demostra moltes coses vinculades a la física. I, de la mateixa manera, partint de baix de tot, s'enfila, en un cert sentit, fins al coneixement intel·ligent i al de les coses primeres. Per aquesta raó, entre els seus èxits, hi trobem la totalitat de la teoria mecànica, l'òptica, la catòptrica i moltes altres teories implicades en les coses sensibles, sobre les quals actua. Això és així perquè en les ascensions assoleix el coneixement unitari i immaterial que porta els judicis parcials a la perfecció. D'aquesta manera el coneixement guanya en poder discursiu, tot assimilant les seves formes i els seus gèneres a les substàncies d'aquests coneixements, i assoleix la veritat sobre els déus i la contemplació de l'ésser. N'hi ha prou amb aquesta justificació.[630]

p. 84

## C.2.2*f* La taxonomia del terme *element* en Procle

**C.2.2*f*₁** I, com que són moltes les coses que se'ns presenten com adscrites als principis científics, com si n'haguessin derivat, però que, partint dels mateixos principis, ens fan caure en l'error i enganyen els esperits superficials, Euclides ens aporta mètodes perspicaços i prudents que permeten, als principiants, reconèixer els paralogismes i evitar les fal·làcies, en l'obra titulada *Dels raonaments fal·laços*.[631] Hi enumera, de manera separada, les diverses menes d'errors, exercita la intel·ligència mitjançant teoremes d'índole diversa, oposa el verdader al fals i refuta l'error amb l'harmonia de la demostració. Aquesta obra té un objectiu catàrtic de purificació i d'exercitació de la intel·ligència, mentre que els *Elements* són una guia segura i perfecta de la ciència geomètrica.

Si se'ns demana l'objecte de l'obra, haurem de respondre que hem de distingir entre el que Euclides proposa i investiga i el que fa referència a tot allò que hi és present. Si, d'una banda, considerem la finali-

630. Procle (1873), 19, 5-20, edició anglesa, p. 16-17, i, francesa, p. 15-16.

631. Diu: $\psi\epsilon\upsilon\delta\acute{\alpha}\rho\iota\alpha$, derivat de $\psi\epsilon\upsilon\delta\acute{\eta}\varsigma$, 'fals'.

tat de l'obra, veiem que fa referència a les figures de l'univers. Comença amb les figures simples i acaba amb la varietat i complexitat de la seva coordinació. Les estableix separadament,[632] mostra la manera d'inscriure-les en una esfera i fa palesa les relacions que mantenen entre si. Aquesta és la raó que ha portat alguns[633] a afirmar que la finalitat de cada un dels llibres és el coneixement del Món i a posar l'èmfasi en la utilitat que té per a la contemplació de l'univers.

Ara bé, si ens fixem en la funció didàctica, hem d'afirmar que l'objectiu [de l'obra] és ensenyar els elements[634] i iniciar[635] l'aprenent en l'estudi complet de la geometria, perquè aquells que s'estrenen amb els *Elements* esdevindran capacitats per a conèixer altres branques de la ciència. En canvi, sense aquest convenciment, és totalment impossible capir la veritat que [el seu coneixement] comporta i assolir el d'altres branques. En aquesta obra s'apleguen de manera ordenada i convenient els teoremes que ens semblen primitius, simples i molt propers als principis. I les demostracions de teoremes ulteriors utilitzen els d'aquesta obra com a coneguts i s'hi basen. Així doncs, sembla que Arquimedes, en *De l'esfera i el cilindre*, i Apol·loni i tota la resta [de geòmetres] empren com a principis les coses que s'hi han establert.[636]

L'objectiu és, doncs, instruir amb els «elements» aquells que comencen[637] i il·lustrar les coordinacions que determinen les figures del Món. Però la designació de l'obra —*Ensenyament dels elements* o *Elements*,[638] que deriva de l'anterior— es basa en alguna raó? Si ens hi fixem, veurem que hi ha geòmetres que anomenen els teoremes *elements*,[639] d'altres *elementals*[640] i uns darrers que no els donen cap nom particular.

632. Mostra com construir-les.
633. Diu: *τρόποι*.
634. Diu: *στοιχείωσις*.
635. Diu: *τελείωσις*.
636. Vegeu la nota 595 (pàgina 209).
637. Diu: *στοιχειόω*.
638. Vegeu la nota 580 (pàgina 206).
639. Diu: *Στοιχεῖα*.
640. Diu: *στοιχειώδη*.

Els «elements» són els teoremes que serveixen de base a altres i per mitjà dels quals resolem les dificultats que aquests ens plantegen. De la mateixa manera que en la composició literària hi ha principis fonamentals, senzills i indivisibles, que anomenem *elements*,[641] i amb els quals formem paraules i discursos, també hi ha una mena de teoremes —que anomenem *elements*— que van al capdavant de tota la geometria, fan de principi dels teoremes que s'estableixen ulteriorment i serveixen per a fornir les demostracions de molts casos.[642]

Els teoremes elementals s'estenen simplement damunt d'altres, són senzills i elegants, però tenen el caràcter d'elements perquè el seu coneixement no és pertinent en tota la ciència. Per exemple, un fet elemental és que els [segments] perpendiculars que van dels vèrtexs d'un triangle al costat oposat es tallen en un punt.[643] Així, qualsevol teorema el coneixement del qual no s'estengui a[l coneixement de] molts altres o que no sigui elegant cau fora dels teoremes elementals.

Segons Menecme, el terme s'usa en dos sentits. Aquell en el qual allò que es construeix fa servir el que s'ha construït, en el sentit que, per Euclides, el primer «element» és element del segon «element», i el quart del cinquè.[644] Això és així perquè hi ha coses que reben el nom d'«element d'altres coses», ja que la construcció de les segones depèn de les primeres. Per exemple, és a partir d'«Els angles externs d'una figura poligonal rectilínia sumen quatre angles rectes»[645] que podem establir quantes vegades dos angles rectes sumen els angles interiors de l'esmentada figura. I, recíprocament, això serveix per a demostrar allò. Una proposició d'aquesta mena s'assimila a un lema.[646]

641. Un dels usos de la paraula *Στοιχεῖα* era la designació de les lletres de l'alfabet grec.

642. En són *σύμπτομα*: 'accident o cas particular'.

643. Tanmateix, els *Elements* no contenen aquest teorema.

644. Així, EI 1 —«construir un triangle equilàter de costat donat»— és el primer element i ho és del segon element, EI 2 —«construir un segment donat en un punt donat», i EI 4 —«el criteri CAC d'igualtat de triangles»— és l'element en el qual es basa el cinquè element, EI 5 —«en els triangles isòsceles els angles de la base són iguals entre si i, si es prolonguen els costats iguals, els angles que queden sota la base també ho són».

645. És la proposició EI 32.

646. Diu: *λῆμμα*. Procle, en l'explicació que dona d'EI 1, proporciona

D'altra banda, s'anomena *element* allò més simple possible amb què es resol tot el que és compost. En aquest sentit, cada element no és element de tot. Ho són, doncs, les coses més primitives mitjançant les quals s'estableix la conclusió, com s'esdevé amb els axiomes, que són elements dels teoremes. Aquest és, en definitiva, el significat que els dona Euclides en els *Elements* quan es tracta de qüestions de geometria plana i d'estereometria, i també el que els donen molts altres autors que han escrit *Elements* d'aritmètica i astronomia.

Tanmateix, és difícil triar i ordenar, de manera adequada a cada ciència, els elements damunt els quals s'estintola la resta. Hi ha qui ho ha fet establint-ne molts i hi ha qui ho ha fet agafant-ne pocs. Uns donen demostracions molt breus, uns altres s'estenen en especulacions infinites. Uns empren el mètode de l'impossible, uns altres la proporció. I n'hi ha que prenen precaucions en contra de l'abandonament dels principis. Per fi, i d'una manera general, s'han imaginat moltes menes de tractats elementals per a cada un d'aquests casos particulars.

Cal, és clar, que una obra d'aquest tipus estigui lliure de tot allò que és superflu. Altrament, seria un obstacle per a l'aprenentatge. Cal elegir allò que uneix i coordina de manera útil per a la ciència. Hem de ser absolutament clars i alhora concisos perquè no fer-ho ens pertorba l'enteniment i ens dificulta el coneixement. D'altra banda, hem de facilitar la comprensió dels teoremes en la seva forma general perquè descompondre una doctrina en temes particulars en fa més difícil la captació.

És fàcil adonar-se que els *Elements* d'Euclides avantatgen tots els altres perquè contribueixen a contemplar les figures primordials, a anar de les coses senzilles a les complexes i a establir l'especulació basant-se en «nocions comunes» que clarifiquen i ordenen.[647]

---

les definicions d'uns quants termes usats en geometria, com ara: *demostració*, *lema*, *cas*, *porisma*, *objecció* i *reducció*, C.2.2$h_1$ (pàgines 225-226). Dona un exemple d'ús de lema, n'introdueix i n'estableix uns quants i, més endavant, mostra de quina manera s'ha de considerar EI 7, un lema d'EI 8. PROCLE (1873), 211, 4; 216, 1 i següents, i 264, 15. Edició anglesa, p. 60, 165 i 205-206, i, francesa, p. 186-187, 190-191 i 227.

647. PROCLE (1873), 69 1-74 10. Edició castellana, VERA (1970), vo-

### C.2.2*g* Les figures

p. 86 Segons Procle,[648] les figures són «ideals» i, segons Plató, «límit» o «terme».

**C.2.2*g*₁** Així, les figures immaterials no estan desproveïdes d'existència. Això no obstant, uns afirmen que l'existència s'esdevé en la matèria i d'altres que ho fa en la imaginació i en l'abstracció. D'altra banda, fins a quin punt les figures poden gaudir d'exactitud, bellesa i ordre en l'abstracció?, ja que, si existissin com ho fan les coses sensibles, no tindrien una exactitud incontestable i pura. Però si, en canvi, es decantessin cap allò que és exacte, ordenat i perfecte, de quina font beurien aquestes qualitats? O bé les rebrien de les coses sensibles —però aquestes qualitats no es troben pas en aquestes coses—, o bé de les intel·ligibles —però, en les intel·ligibles, aquestes propietats són molt més perfectes. Ara bé, allò que resulta més absurd és afirmar que les reben dels qui no les tenen. [...] Així doncs, abans de les figures sensibles, hi ha conceptes amb impuls propi, intel·lectuals i divins de les figures. Allò que impressiona són les figures sensibles i el fet que nosaltres mateixos forgem conceptes que són figures d'unes altres figures. Per aquesta raó, tenim coneixement del que forgem: les figures sensibles mitjançant els exemplars, i les figures intel·ligibles i divines mitjançant les imatges.[649]

**C.2.2*g*₂** La figura i la forma són els conceptes d'aquesta quantitat o dels seus alineaments, ja que determinen la forma afegint-hi els trets i aquest o aquell límit simple o compost. I, com que el concepte ofereix la doble ascensió d'allò que és finit i d'allò que és infinit en les formes particulars, aporta a les coses que abraça, com ara el concepte d'angle, un únic límit i una forma simple en el finit, i, en canvi, límits i formes

lum II, p. 1157-1161; anglesa, p. 57-61, i, francesa, p. 62-67.

648. Procle reflexiona d'una manera extensa sobre el concepte «figura» en analitzar les definicions Di 13 i Di 14. Procle (1873), 136, 15-146, 20, edició anglesa, p. 109-117, i, francesa, p. 123-130.

649. Procle (1873), 139, 15-140, 10, edició anglesa, p. 111-112, i, francesa, p. 125-126.

múltiples en l'infinit. Per això, tot allò que és figurat adopta un límit o diversos.[650]

**C.2.2*g*$_3$**

Sòcrates. Suposem que, prosseguint el curs d'allò que deia, exclamés: «Sempre s'arriba a una pluralitat, i no demano això. Perquè, si aquesta pluralitat la designes amb un nom, aleshores has de sostenir que no hi ha cap dels objectes [que cauen dins el nom] que no sigui una figura, àdhuc quan s'oposen entre si. Què és allò que comprèn el rodó i el rectilini i que anomenes *figura*, mentre afirmes que el rodó no és pas més figura[651] que el rectilini?» O no dius això?
Menó. Efectivament.
Sòcrates. I, quan ho dius, no afirmes que el rodó no és pas més rodó que el rectilini, ni que el rectilini és més rectilini que el rodó?
Menó. Certament.
Sòcrates. Digue'm: què és això que anomenes *figura*? Si, a qui et demanés sobre la forma [de la figura] o el color, li responguessis: «No entenc què vols ni què em preguntes», potser, sorprès, et respondria: «No comprens que intento cercar allò que és idèntic en totes aquestes coses?» O, Menó, potser tampoc no sabries respondre a qui et preguntés: «Què hi ha d'idèntic en el rodó, el rectilini i altres objectes que s'anomenen *figures*?» Prova de contestar-li i et servirà d'exercici per a la resposta relativa a la virtut.[652]

**C.2.2*g*$_4$**

Sòcrates. Està bé. Mirem d'escatir què s'entén per *figura*. A veure què et sembla això. Per mi, de les coses existents, la figura és allò que sempre acompanya el color.[653] Et sembla suficient aquesta definició?

650. Procle (1873), 142, 10-143, 10, edició anglesa, p. 114, i, francesa, p. 127-128.

651. Recordem que, segons Plató (1962) 93 b-d, edició catalana, p. 112-113, podem dir que l'essència no admet el més i el menys.

652. Plató (1956), 74 d 3-75 a 5, edició catalana, p. 42-43.

653. Abans, en el diàleg, Sòcrates havia usat la pluralitat i, àdhuc, la contraposició del color en el mateix sentit que ara ho fa amb la figura: la unicitat del nom. Ara lliga tots dos conceptes.

O cal que en cerquem una altra? Perquè, per mi, una definició semblant a la definició de virtut seria adequada.
MENÓ. Però, Sòcrates, aquesta definició és ben beneita.
SÒCRATES. Què vols dir?
MENÓ. Si t'he entès bé, *figura* és allò que sempre acompanya el color.[654] D'acord. Però, si algú ignorés què és el color i aquest concepte li causés tanta perplexitat com el de figura, què et penses que [amb això que dius] li hauries respost?
SÒCRATES. Jo? Li hauria respost la veritat. I, si l'oponent era un d'aquests experts en l'art de contradir[655] i disputar públicament, li diria: «Aquesta és la meva resposta. Si no és correcta, et correspon a tu prendre la paraula i refutar-me». Però, quan els que discuteixen són amics, com ara tu i jo, cal respondre amb més suavitat i d'acord amb la dialèctica. I la dialèctica està més d'acord no només a respondre la veritat sinó a usar en la resposta els termes que el teu interlocutor comprèn. Per això, miraré de respondre't amb aquestes paraules. Digues: hi ha alguna cosa que anomenis *terme* (*πάντα*)? Entenc aquest mot en el sentit de *límit* (*περάς*) o *extrem* (*ἔσχατος*) perquè signifiquen el mateix. Probablement, Pròdic[656] dissentiria del que diem però tu, n'estic ben convençut, conceps una cosa com limitada o acabada. Parlo d'això. No és gens complicat.
MENÓ. Ho faig i entenc això que dius.
SÒCRATES. No anomenes algunes coses *superfície* i d'altres *sòlid*, com en els problemes de geometria?
MENÓ. Ja ho crec.
SÒCRATES. Doncs ara, amb aquests mots, comprendràs què és allò que anomeno *figura*. Figura és tot allò que limita un sòlid o, més succintament, el límit d'un sòlid.[657]

---

654. Aquí Menó, en *Menó*, s'adiu amb Cràtil, en *Cràtil*, 427 e i 431 c (PLATÓ (1952), edició catalana, p. 104 i 109), on els colors (*χρώματα*) es vinculen als perfils o figures (*σχήματα*), cosa que retrobem en altres diàlegs. Vegeu la nota 1, a PLATÓ (1956), edició catalana, p. 43.

655. Una al·lusió clara als sofistes. PLA (2016*b*), p. 213-214 i 467-471.

656. Sobre les opinions de Pròdic de Queos en boca de Sòcrates, vegeu PLATÓ (1956), edició catalana, nota 1, p. 44.

657. PLATÓ (1956), 75 b 3-76 a 5, edició catalana, p. 43-44.

## C.2.2*h* Els termes vinculats a les proposicions i la classificació: problema/teorema

Alguns termes vinculats a les proposicions, i allò que fa que els p. 91
problemes i els teoremes s'hagin de distingir.

**C.2.2*h*₁** Ara ens fixarem en les coses que estan vinculades [a les proposicions] i establirem què s'entén per *lema* (*λῆμμα*), *cas* (*πτῶσις*), *porisma* (*πόρισμα*), *oposició* (*ἔνστασις*) i *reducció* (*ἀπαγωγή*).

Sovint, el *lema* designa qualsevol proposició acceptada en la demostració (*κατασκευή*)[658] d'una altra proposició per part dels qui declaren que aquesta demostració [concreta] depèn d'un cert nombre de lemes. Ara bé, aquells que són versats en geometria han d'admetre el lema.[659] En efecte, quan admetem en una construcció o demostració quelcom no demostrat però que necessitem, ho anomenem *lema*, allò que hem acceptat. Quan sigui dubtós, serà susceptible de demostració. Naturalment, no pot ser ni un postulat ni un axioma pel fet que es presenta [en el text] com a susceptible de demostració, mentre que els postulats i els axiomes s'accepten sense demostració en virtut de la creença en altres coses acceptades. La manera millor de trobar un lema és una disposició mental adequada. Hi ha geòmetres, com ara Catriste,[660] que ho assoleixen percebent els lemes sense necessitat de mètode. Tanmateix, el camí més bonic és el que mostra allò que es busca seguint l'anàlisi. Aquest és el mètode que ens han transmès Plató i Leodomant i, seguint-lo, aquest darrer ha aconseguit molts resultats geomètrics. Hi ha un segon mètode, el «distributiu»[661] (*διαιρητικός*), que descompon el gènere proposat en parts, i en el qual el punt de partida de la demostració elimina tot allò que és estrany a l'obtenció d'allò que es busca. És el mètode més estimat per Plató en totes les ciències. Finalment, hi ha el «mètode de reducció a l'impossible», que no estableix allò que es busca d'una manera direc-

658. Aquí Procle usa aquest terme com a sinònim de *demostració* (*ἀπόδειξις*).

659. Usa el mot *πίστις*, 'cregut'.

660. Probablement, contemporani de Procle. És totalment desconegut i aquesta és l'única menció que en tenim.

661. Es refereix a l'anàlisi.

ta, sinó refutant l'oposat,[662] i que accidentalment troba la veritat. Aquesta és la consideració del lema.

El cas, però, fa referència a les maneres diverses de construcció i a la varietat de les posicions quan hom transporta els punts, les línies, els plans o els sòlids, en una paraula, quan hom posa en relleu tota la diversitat de la construcció per mitjà de la descripció. Per això, s'anomena *cas* allò que, de fet, constitueix una transposició (*μετάθεσις*) de la construcció.

El porisma s'atribueix als problemes, com ho fan els porismes publicats per Euclides.[663] Però, d'una manera particular, s'atribueix a un altre teorema que, si bé no s'ha proposat, té una validesa palesa en els teoremes demostrats. Per això, s'anomena *porisma* i aporta un cert guany accessori a la demostració establerta.[664]

D'altra banda, l'oposició evita el raonament tant en el cas de la construcció com en el de la demostració. L'oposició no porta al convenciment que la proposició que es planteja sigui verdadera, sinó que posa de manifest que erra qui l'usa.

Finalment, la reducció consisteix a transmetre la dificultat d'un problema o un teorema a un altre [problema o teorema], de manera que, si [aquest darrer] és conegut o s'ha establert, allò que es busca resulta evident. Així, per exemple, quan es busca duplicar el cub, el problema es transporta a la resolució d'un altre: l'obtenció de dues mitjanes proporcionals. Hom diu que va ser Hipòcrates de Quios el primer que feu la reducció [de la duplicació][665] a aquesta «linealització» (*διάγραμμα*).[666]

662. Fixem-nos que, en aquest context, la hipòtesi de l'absurd actua com a lema.

663. En tenim una descripció detallada en el text de Pappos *Col·lecció matemàtica*. Vegeu la síntesi que n'hem fet a § 4.2.1 (pàgina 120 i següents) i els textos associats D.2.1$a_1$ i D.2.1$a_2$ (pàgines 258-261).

664. En aquest sentit, un porisma és el que ara coneixem com a «corollari».

665. Pla (2016*b*), p. 239-241 i 486-487.

666. Procle (1873), 211-212, 10, edició anglesa, p. 165-167, i, francesa, p. 186-188. L'emfatització dels noms és nostra. Pla (2016*b*), § 3.4.7, ítem 3, p. 239-244.

### C.2.2*i* Les parts d'una proposició p. 96

Procle estableix les parts d'una proposició.

**C.2.2*i*$_1$** Ja hem parlat força sobre les coses que busquem. Però qualsevol problema i qualsevol teorema tindran totes les parts següents: enunciació (*πρότασις*), exposició (*ἔκθεσις*), especificació (*διορισμός*), construcció (*κατασκευή*), demostració (*ἀπόδειξις*) i conclusió (*συμπέρασμα*). L'enunciació expressa la cosa que es dona i allò que se n'espera, ja que una enunciació perfecta conté totes dues parts. L'exposició separa la cosa que s'ha donat i la prepara de cara a allò que es demana. L'especificació explica quina és la cosa buscada, amb claredat i a part. La construcció afegeix a allò que s'ha donat tot allò que cal per a aconseguir allò que es pretén. La demostració estableix les inferències, per mitjà del raonament científic, de tot allò que ja ha estat acceptat. La conclusió torna a l'enunciació per posar en relleu que s'ha assolit allò que es pretenia.

Totes aquestes etapes formen part dels problemes i dels teoremes. Però les més essencials són l'enunciació, la demostració i la conclusió. Cal conèixer allò que cerquem, cal que en mostrem [la validesa o l'existència] per mitjà de les coses intermèdies i cal que tot allò que es pretenia s'assoleixi. No podem ometre cap d'aquestes tres parts. Les altres, en canvi, a vegades s'expliciten i d'altres, quan no representa cap avantatge fer-ho, no. Per exemple, en el problema que demana «un triangle isòsceles en el qual l'angle a la base sigui el doble de l'angle al vèrtex»,[667] no hi ha ni especificació ni exposició. I en molts dels teoremes s'omet la construcció perquè n'hi ha prou amb l'exposició per a demostrar la proposició a partir de les dades sense afegir-hi res més. Quan s'omet l'exposició? Quan l'enunciació de la proposició no conté cap dada. En general, l'enunciació de la proposició expressa allò que es dona i allò que es demana, però no sempre és així. De vegades, solament s'exposa allò que es demana —allò que cal reconèixer i proporcionar—, com en l'exemple que acabem d'esmentar, en el qual no es diu enlloc quina dada es necessita per a poder construir el tri-

667. Es tracta d'EIV 10. Aquesta és, segons constata Procle, la primera vegada que això s'esdevé.

angle isòsceles amb dos angles iguals que valguin el doble del tercer. Solament s'explicita que cal construir-lo. S'accepta l'enunciació de la proposició pel coneixement que es té dels termes que empra, i se sap què és un triangle isòsceles i què signifiquen els termes *igual* i *doble*. D'acord amb Aristòtil, això és propi de qualsevol instrucció intel·lectual.[668]

Res no ens subordina, com s'esdevé en altres problemes, com ara aquell que demana «dividir un segment donat en dues parts iguals».[669] Aquí es dona el segment i s'afegeix que cal dividir-lo en dues parts idèntiques. Hi ha, doncs, especificació separada de l'exposició. Allò que es dona està separat d'allò que es demana. En aquesta ocasió trobem, doncs, els dos elements: l'exposició i l'especificació. Però, quan no es dona res, no hi ha tampoc exposició, ja que l'exposició, depèn d'allò que es dona. [I, quan no es dona res,] l'especificació coincideix amb l'enunciació. En efecte, per tal de definir el problema esmentat, no podríem dir que es demana construir un triangle isòsceles? Però això és precisament allò que diu l'enunciació. [...] Ho veurem moltes altres vegades, en particular en els llibres aritmètics i en el llibre X, quan se'ns demani que «trobem dos segments commensurables [medials] que continguin un [rectangle] medial»,[670] i en altres problemes d'aquesta mena.[671]

p. 101

## C.2.2*j* Demostració directa i indirecta

En els *Elements* s'usen dues menes de demostracions tant en les proposicions com en els problemes: les directes i les que recorren al mètode de reducció a l'absurd.

**C.2.2$j_1$** La demostració [que mena] a l'impossible difereix de la directa —*δεικτικῆς*— en el fet que assumeix allò que vol aniquilar, és a dir,

668. Així comença Aristòtil els *Analítics segons*. Aristòtil (1987), 71 a 1-2, p. 313.

669. Es tracta d'EI 10.

670. EX 24. Pla (2020), p. 246.

671. Procle (1873), 203, 9-205, 10, edició anglesa, p. 159-160, i, francesa, p. 180-182.

a hipòtesi de la falsedat de la conclusió, i la redueix a quelcom que admetem com a fals. Mentre que la demostració directa comença amb premisses verdaderes.[672]

**C.2.2*j*$_2$** Una prova [per reducció a l'absurd] d'aquesta mena és, per exemple, la que estableix la incommensurabilitat de la diagonal, que es fonamenta en el fet que, quan hom suposa la seva commensurabilitat, certs nombres senars són parells.[673]

Serà, però, Alexandre d'Afrodísia, en el comentari a aquest passatge d'Aristòtil, qui n'aclareixi el significat.

**C.2.2*j*$_3$** Suposem que la longitud de la diagonal d'un quadrat de costat $\ell$ es pot expressar com una raó entre dos nombres naturals, i suposem que la fracció és de la forma $\frac{k}{m}$, on $k$ i $m$ són irreductibles, és a dir, primers entre si. Atès que el quadrat de la diagonal és el doble del quadrat del costat, resulta que $2\,\ell^2 = \left(\frac{k}{m}\right)^2 = \frac{k^2}{m^2}$. Si considerem el quadrat de costat la unitat, és a dir, $\ell = 1$, resulta que $2m^2 = k^2$, i, per tant, $k^2$ és parell. Ara bé, com que $k^2$ i $m^2$ són primers entre si, $m^2$ ha de ser senar. Però la meitat del quadrat d'un nombre parell també ho és. Per tant, $m^2 = \frac{k^2}{2}$ és parell, cosa que és absurda.[674]

## C.2.2*k* La raó composta

p. 99

La raó composta que generalitza Di 9 i Di 10 per a raons contínues, segons Simson.

**C.2.2*k*$_1$** Quan tenim un cert nombre de magnituds de la mateixa naturalesa, diem que la primera té, amb la darrera, la raó composta de les raons que la primera té amb la segona, la segona amb la tercera, la tercera amb la quarta, i així fins a la darrera magnitud.

672. Aristòtil (2007), 23, 41 a 25-27, edició castellana, p. 174.

673. Aristòtil (2007), 23, 41 a 25-27, edició castellana, p. 174. Ídem, i 44 b 37-38, p. 214. Pla (2016*b*), p. 353.

674. En el sentit que no pot ser perquè *parell* i *senar* són conceptes excloents. Aristòtil (1988*a*), edició italiana, p. 145-146. Vegeu els textos A.6.13.2$d_3$ i A.6.13.2$d_4$, de Pla (2016*b*), p. 436.

Per exemple, si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ són quatre magnituds del mateix gènere, diem que la primera, $\mathfrak{A}$, té, amb la darrera, $\mathfrak{D}$, la raó composta de la raó de $\mathfrak{A}$ amb $\mathfrak{B}$, de la de $\mathfrak{B}$ amb $\mathfrak{C}$ i de la de $\mathfrak{C}$ amb $\mathfrak{D}$; o que la raó de $\mathfrak{A}$ amb $\mathfrak{D}$ és la composta de $\mathfrak{A}$ amb $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ amb $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{C}$ amb $\mathfrak{D}$.[675]

## p. 20 C.2.2$\ell$ Un text sobre els irracionals del *Teetet* de Plató

### C.2.2$\ell_1$[676]

TEETET. Exposada així, Sòcrates, la cosa sembla fàcil. De tota manera, corres el risc de fer-te la mateixa pregunta que ens vam fer, jo i l'altre Sòcrates, homònim teu.
SÒCRATES. Doncs, què va ser això, Teetet?
TEETET. Pel que fa a les potències, Teodor va fer un dibuix per mostrar que la de tres i la de cinc peus no són commensurables amb la d'un, en longitud,[677] i les va anar triant així, d'una en una, fins a la de disset peus.[678] I es va aturar, fos pel que fos. I se'ns va ocórrer que podíem provar de reunir totes les potències, ja que semblaven il·limitades quant al nombre, sota la denominació d'un mateix terme.
SÒCRATES. I l'heu trobada, una cosa així?
TEETET. Crec que sí, mira-t'ho tu també.
SÒCRATES. Digues.
TEETET. La totalitat dels nombres, l'hem dividit en dos grups: aquells que es poden resoldre en un producte d'igual per igual, que els hem representat amb la figura d'un quadrat i els hem anomenat *quadrats* i *equilàters*.[679]
SÒCRATES. Doncs, molt bé, de debò.

675. SIMSON (1756), edició anglesa, p. 94-95. Vegeu la nota 316 (pàgina 100).
676. PLA (2016*b*), text B.7.8$b_1$, p. 497, que reproduïm i ampliem.
677. De fet, les potències són commensurables, però les seves bases o arrels, no. És a dir, els segments són commensurables en potència i incommensurables en longitud amb el segment d'un peu. Vegeu les definicions DX 1.1 i DX 1.2. PLA (2020), p. 21 i 212.
678. Vegeu la figura 3.23 de PLA (2016*b*), p. 249, i l'explicació que l'acompanya.
679. En l'original: *τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν*.

TEETET. I aquells que menen sempre a una figura amb un costat més llarg que l'altre i que s'intercalen entre els nombres del primer grup, com el tres, el cinc i, en general, qualsevol nombre que no es pugui resoldre en un producte d'igual per igual, sinó que ho faci necessàriament en un producte de superior per inferior, o d'inferior per superior, que els hem representat amb un rectangle i els hem anomenat nombres *rectangulars*.[680]
SÒCRATES. Estupend! I, després, què?
TEETET. Totes les línies que formen un rectangle equilàter,[681] les hem definides com a *longituds*.[682] Totes aquelles constituïdes per un nombre els dos factors del qual són desiguals, les hem definit com a *potències*,[683] perquè no són commensurables amb les primeres si les considerem per la seva longitud, però sí que ho són si considerem les superfícies que, en potència, poden engendrar. I pel que fa als sòlids, hem fet distincions anàlogues.[684]

## C.2.2*m* Un parell de textos de Pappos sobre Ex p. 20

**C.2.2*m*$_1$** Més tard, el gran Apol·loni, amb un dels genis més grans per a les matemàtiques, va afegir alguns gèneres remarcables a les conegudes, després d'aplicar-s'hi laboriosament. Fou, no obstant això, Teetet qui va distingir les *potències* (és a dir, els quadrats) que són commensurables en longitud i les que són incommensurables en longitud. Va dividir les més generals, conegudes com a «segments irracionals», d'acord amb les diferents mitjanes. I va assignar el me-

680. En l'original: *προμήκη ἀριθμόν ἐκαλέσαμεν*.
681. Un quadrat.
682. En grec: *μῆκος*. Són les que tenen arrels racionals.
683. En grec: *δυνάμεις*. Són les que tenen arrels irracionals. Potser el text del *Timeu*, 54 b, ajudarà a comprendre el significat d'aquestes expressions: «L'altura del triangle equilàter val el triple *en dinamis* —en potència— de la meitat del costat.» Si $h$ designa l'alçada i $a$ el costat, resulta que $h^2 = 3\left(\frac{a}{2}\right)^2$. A <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus:text:1999.01.0179>.
684. PLATÓ (1995*b*), 147 c 15-148 b 5, p. 57-58. Les èmfasis són nostres.

dial a la mitjana geomètrica, el binomial a l'aritmètica i l'apòtom a l'harmònica, segons exposa Eudem, el peripatètic.[685]

**C.2.2$m_2$** Però ja hem discutit prou els irracionals. Gràcies a allò que hem dit, podem resoldre qualsevol problema que se'ns plantegi, com ara: «Donats un segment racional i un d'irracional, quin segment n'és mitjana proporcional[686] i quin la tercera proporcional, segons que prenguem el segment racional com el primer o com el segon [terme de la proporció]?»[687] Considerem cada un dels [segments] irracionals, al seu torn, i de manera anàloga. Per exemple, si ens donen un segment racional, un de binomial o un d'apòtom, podem trobar tant el segment que n'és la mitjana proporcional com el que n'és la tercera proporcional. I així amb les altres línies.[688]

Pla (2018), p. 40 i 208

## C.2.2$n$ El complex concepte d'«angle»

També és Procle l'autor que proporciona la complexitat del complex concepte d'«angle» en el món matemàtic grec.

**C.2.2$n_1$** Tots els qui, entre els antics, col·loquen l'angle en la categoria d'allò que és relatiu,[689] el defineixen com a «inclinació[690] de segments o de plans l'un damunt de l'altre». Uns altres l'inclouen entre les qualitats, com ara la de recte o la d'inflexió, i afirmen que és una afecció de l'àrea o del sòlid. I, finalment, uns altres no rebutgen

685. Pappos (1970), llibre i, § 1, p. 2, edició anglesa en línia, p. 63. Vegeu també llibre i, § 9, p. 71-72, i llibre ii, § 17, p. 45, edició anglesa en línia, p. 138. I § 1.2 (pàgines 11-20).

686. La resposta correspon a reformulacions d'Ex 54-59 i Ex 91-96. Pla (2020), p. 298-311 i 364-380.

687. Si prenem el segment racional com a primer terme, la resposta correspon a reformulacions d'Ex 60-65 i Ex 97-102. Pla (2020), p. 312-322 i 381-396. Si el prenem com a segon terme, la resposta la proporciona Pappos (1970), llibre ii, § 22, edició anglesa en línia, p. 146. Vegeu les notes 94 i 95 de Vitrac (1998), p. 70.

688. Pappos (1970), llibre ii, § 35, edició anglesa en línia, p. 165.

689. Si tenim en compte les definicions Di 13 i Di 14, ens trobem que l'angle no està totalment entre fronteres, és a dir, és una figura que no està limitada. I això contradiu Di 14. Pla (2016*b*), p. 78-79.

690. Diu: κλίσις.

que sigui una quantitat i admeten que l'angle és una àrea o un sòlid perquè, situat en les superfícies, és dividit per una línia, i en els sòlids per una àrea. Argumenten que allò que està dividit per un d'aquests elements és una magnitud que no és lineal perquè el segment el divideix un punt. Per tant, aquesta magnitud és una àrea o un sòlid.

Ara bé, si l'angle fos una *magnitud*, atès que totes les magnituds del mateix gènere es relacionen entre si, tots els angles del mateix gènere —és a dir, els que estan a l'àrea— es relacionarien entre si i, per tant, l'angle «corniforme»[691] tindria una relació amb l'angle rectilini.[692] I, com que una cosa que es relaciona amb una altra la pot superar per multiplicació,[693]l'angle corniforme podria arribar a ser més gran que el rectilini. Però això no és possible, ja que s'ha demostrat que aquesta mena d'angle és més petit que qualsevol angle rectilini.

Però, si l'angle és una *qualitat*, com la calor i el fred, per què es pot dividir en parts iguals? Perquè la igualtat i la desigualtat no pertanyen menys als angles que a les magnituds, i la divisibilitat es refereix tant als uns com a les altres d'una manera semblant. Si [la igualtat, la desigualtat i la divisibilitat] són quantitats verdaderes i no pas qualitats, és evident que els angles tampoc no seran qualitats, perquè el més i el menys només són modificacions[694] de la qualitat i, en canvi, la igualtat i la desigualtat no ho són. Per tant, no s'hauria d'afirmar que els angles són desiguals o dissemblants, i que un és més angle i l'altre menys.[695] Aparentment, és clar per tothom que aquesta mena d'afirmacions són incompatibles amb l'existència matemàtica perquè

---

691. Diu: *ἡ κερατοειδὴς γωνία*. Al Renaixement s'anomenava *angle de contacte*.

692. Obre la porta a la complexitat que suposa l'angle de contacte que Euclides defineix a DIII 7 i analitza a EIII 16. PLA (2016*b*), p. 185 i 208-210.

693. Aquí Procle usa el postulat segons el qual, si tenim dues magnituds relacionades —és a dir, que tenen raó—, «un múltiple adequat d'una supera l'altra», que Euclides dona a DV 4. Però Arquimedes l'establia com a postulat V a EC. PLA (2016*a*), p. 266, i *Grècia IIIb*.

694. Diu: *παθός*, en el sentit de canvi o de modificació.

695. En la hipòtesi que refuta que l'angle pertany al gènere de les qualitats.

tots els angles admeten el mateix enunciat, però uns són més angles que els altres.

Si l'angle és una «inclinació» i pertany als fets de relació,[696] tindrem que, si només hi ha una inclinació, només hi haurà un angle i no una quantitat diversa [d'aquests], perquè, si l'angle només és una inclinació entre línies o plans, com podria haver-hi una sola relació i angles diversos? I, si imaginem un con[697] tallat per un pla que passa pel vèrtex, al semicon[698] hi haurà una sola inclinació dels segments del triangle secció i dos angles diferents: un al pla, el del mateix triangle, i l'altre a l'àrea mixta[699] del con, tots dos limitats per les dues línies que hem esmentat.[700] La relació d'aquests darrers no forma, doncs, un angle, però podem afirmar que és una qualitat, una quantitat o una relació. Les figures són qualitats i les raons, relacions entre aquestes. Per tant, l'angle hauria de ser d'un d'aquests tres gèneres.

Aquests eren els dubtes dels geòmetres, encara que Euclides digui que l'angle és una inclinació, i Apol·loni la contracció d'una àrea en un sol punt sota una línia trencada o d'un sòlid sota una àrea trencada, perquè sembla que així defineix també qualsevol angle general.[701] Direm, seguint les petges del nostre preceptor,[702] que l'angle no pertany a cap de les categories suara esmentades,[703] però que, de totes, n'extreu la seva entitat. Per això, dubtaven aquells que es pronunciaven a favor d'una de les opcions.[704]

---

696. Diu: *τῶν πρός τι*.

697. Recordem que el «con» és el sòlid que s'obté quan un triangle rectangle gira al voltant d'un catet fix [Dxi 18]. Pla (2020), p. 423.

698. En el DIEC (2007) trobem *semicilíndric*, *semiesfèric* i *semicònic*.

699. Diu: *μικτός*, perquè el con està generat per dues línies diferents: una recta que gira i una circumferència que dirigeix el moviment.

700. Els dos costats del triangle secció del con.

701. Probablement, d'una obra perduda d'Apol·loni, segons diu Marí en el seu comentari a les *Dades* d'Euclides.

702. Es refereix a Sirià.

703. Ni qualitat, ni quantitat ni relació.

704. Quan analitza la proposició Eiii 16, Clavius dedica un comentari força extens a esbrinar si un angle és una qualitat o una quantitat. Clavius (1591), p. 132-145.

I tot això no només pel que fa a l'angle, sinó també al triangle, perquè aquest té quantitat i, per això, es pot parlar de la seva igualtat o desigualtat. També té qualitat gràcies a la seva figura. N'hi pot haver de semblants o iguals perquè la semblança pertany a una categoria i la igualtat a una altra. L'angle necessita quantitat implícita en la magnitud,[705] qualitat que faci que la seva forma tingui un cert sentit que en garanteixi l'existència, i que les línies que el limiten o els plans[706] que el comprenen estiguin relacionats. Pertany, per tant, a totes les categories i no només a una de sola. És divisible i susceptible d'igualtat i de desigualtat segons la quantitat que hi és inherent. I no admet una relació amb magnituds homogènies pel fet de tenir una magnitud particular que, a vegades, no permet comparar-lo amb un altre, ni admet només inclinació perquè la quantitat que hi ha en l'interval de les línies inclinades en completa l'essència.

Tenint en compte aquestes distincions, desapareixen els dubtes i podem reconèixer que la naturalesa particular de l'angle no consisteix en una contracció de superfícies o de sòlids, com demana Apol·loni —fets, no obstant això, que complementen el seu ésser—, sinó en una àrea que es contrau en un punt i està limitada per línies inclinades, o sota una línia inclinada sobre si mateixa, o en un sòlid que es contrau sota plans inclinats un sobre l'altre, a fi que sigui una quantitat dotada d'una certa qualitat[707] i constituïda per una relació que el defineix, i no pas la quantitat en particular.[708] No consisteix en la qualitat sola, ni tampoc en la relació. Això és el que volíem dir en relació amb la formació dels angles que hem examinat, allò que els és comú sense distingir-ne els gèneres.

Hi ha tres opinions sobre l'angle. Eudem el peripatètic,[709] que ha escrit un llibre sobre aquest assumpte, sosté que l'angle és una quali-

705. Diu: *ὑποκειμένης ἐν τῷ μεγέθει*.

706. Diu: *ἐπίπεδος*. Usa aquest terme, *pla*, en lloc de *ἐπιφάνεια*, 'superfície', que seria més adient.

707. Diu: *πεποιωμένον ποσόν*, expressió presa en el sentit de *ποιός τις*, 'dotat d'una certa qualitat'.

708. Procle s'aparta de l'opinió d'Apol·loni i s'apropa al seu mestre Sirià: l'angle és essencialment una magnitud.

709. Vegeu el § 1.2 (pàgines 11-20).

tat perquè diu que, si n'imaginem la generació, ens adonem que és un «trencament»[710] d'una línia, i que, si la rectitud [d'una línia] és una magnitud,[711] qualitat que faci que la seva forma tingui en cert sentit un «trencament»[712] d'una línia, i, si la rectitud [d'una línia] és una qualitat, el trencament [de la línia] també. Per tant, l'angle que s'engendra en la qualitat és absolutament qualitat.

Euclides i tots aquells que defineixen l'angle com a inclinació el situen en la categoria de relació, mentre que aquells altres que afirmen que és un primer interval[713] sota el punt el consideren una quantitat. Entre aquests darrers, hi ha Plutarc,[714] que engloba Apol·loni en aquesta mateixa opinió, perquè creu necessària l'existència d'un primer interval en la ruptura[715] de les línies o de les superfícies que el limiten. Però, atès que l'interval situat sota el punt és continu, no en pot admetre un de primer perquè tot interval és infinitament divisible.[716]

A tot això, afegim-hi que, si es pogués determinar aquest primer interval d'una manera arbitrària i, a través seu, tiréssim un segment, obtindríem un triangle i no pas un angle.

Per acabar, Carpos d'Antioquia diu que l'angle és una quantitat i l'interval que formen les línies o les superfícies està dimensionat «en un únic sentit».[717] Malgrat tot, l'angle no és una línia perquè no tot allò que està dimensionat «en un únic sentit» ho és. Però, si acceptem que hi ha magnituds diferents de la línia dimensionades «en un únic sentit», assolim el cim de la paradoxa.

710. Diu: *κλίσις*.

711. Diu: *ὑποκειμένης ἐν τῷ μεγέθει*.

712. Diu: *κλίσις*.

713. Diu: *διάστημα*.

714. El personatge que esmenta el text és Plutarc d'Atenes, mestre de Procle i predecessor immediat de Sirià com a director de l'Acadèmia.

715. Diu: *κλίσις*.

716. Aquí, de manera implícita, s'amaga l'arquimedianitat de les magnituds geomètriques i s'exclou l'atomisme. I és precisament aquí, en el món dels angles, on hi ha un angle, l'angle de contacte, que contradiu l'arquimedianitat.

717. Diu: *ἐφ᾽ ἓν διεστὼς τοῦτο*.

Ja n'hi ha prou de parlar d'aquesta qüestió. Enraonem ara dels angles que es troben a les superfícies i als sòlids, i d'aquells que, situats a les superfícies, es troben en superfícies simples o mixtes, perquè l'angle es forma en la superfície cilíndrica, cònica, esfèrica i plana. Entre els angles situats en superfícies simples, uns es troben a les esfèriques i uns altres a les planes, com el cercle zodiacal que, en la intersecció equinoccial, forma dos angles, un a cada banda del vèrtex, perquè les circumferències es tallen i aquests angles coincideixen damunt de la superfície esfèrica.[718]

**C.2.2$\boldsymbol{n}_2$** Angles plans són tots els que el geòmetra defineix quan diu que el seu gènere és la inclinació i el seu lloc el pla, perquè els angles tenen una posició i la seva construcció exigeix que hi hagi almenys dues línies, però no tres, com s'esdevé en els angles sòlids, i que aquestes línies es toquin l'una amb l'altra i, en tocar-se, no estiguin col·locades en la mateixa direcció perquè hi hagi una inclinació que contingui una superfície i no solament una extensió sobre una distància. p. 232 a 238

En primer lloc, segons sembla, aquesta manera de concebre l'angle no permet que es pugui fer amb una sola línia, com passa amb la cissoide i la hipopede,[719] perquè la cissoide és la línia completa i no està feta de parts inclinades l'una sobre l'altra. D'altra banda, la línia sencera i no una de les parts s'anomena *espírica*. Per tant, cada una d'aquestes línies forma un angle amb si mateixa i no pas amb una altra.

Em sembla, en segon lloc, que aquesta concepció inclou l'error de definir l'angle com una inclinació, perquè com pot haver-hi dos angles si només hi ha una inclinació? I com podem dir que els angles

718. Procle (1873), 121, 10-126, 10, edició anglesa, p. 98-102, i, francesa, p. 109-113.

719. És la corba en forma de vuit descrita a Pla (2016*b*), p. 323. Per explicar les retrogradacions que s'observen en el moviment dels planetes —vistos des de la Terra, aparentment retrocedeixen en llur òrbita—, Èudox introdueix la «hipopede» o «lemniscata esfèrica», que és el resultat de la combinació del moviment de les dues esferes més internes del seu model. Damunt seu rota cada cos celeste en correspondència amb el seu període sinòdic. El temps de rotació sobre l'esfera en la qual es troba correspon al període sideral corresponent. Vegeu el problema 1 (pàgina 147).

són iguals o diferents, i totes les altres coses que s'oposen a aquesta doctrina?

Per acabar, sembla, en tercer lloc, que d'una certa mena d'angles, en especial els curvilinis, és superflu dir-ne que no estan en la mateixa direcció. Això no obstant, la definició amb aquesta omissió és perfecta perquè la inclinació de les línies és precisament allò que forma l'angle, i és impossible, per principi, que les línies circulars estiguin situades en una mateixa direcció.[720]

720. PROCLE (1873), 127, 15-128, 18, edició anglesa, p. 103-104, i, francesa, p. 116-117.

# Apèndix D

# Textos d'Euclides, sense els *Elements*

> The proof is by reductio ad absurdum, which Euclid loved so much, is one of a mathematician's finest weapons. It is a far finer gambit than any chess play: a chess player may offer the sacrifice of a pawn or even a piece, but a mathematician offers the game.
>
> GODFREY HAROLD HARDY[721]

Atesa la importància indiscutible que el tractat dels *Elements* (*Στοιχεῖα*) va tenir tant en la matemàtica grega com en la de després, ja n'hem ofert la traducció adaptada sencera.[722]

Ara bé, com hem vist en el capítol 4 (pàgines 105-133), Euclides va escriure altres obres a banda dels *Elements*. Per això, d'acord amb el format que hem adoptat en aquesta *Història de la matemàtica*, dediquem aquest apartat a alguns d'aquests textos.

---

721. «La demostració es fa per "reducció a l'absurd", una forma demostrativa que agradava d'allò més a Euclides i que és una de les millors armes dels matemàtics. És, de llarg, un gambit que supera qualsevol altre: un jugador d'escacs pot oferir el sacrifici d'un peó o fins el d'una peça, però el matemàtic ofereix tota la partida.» HARDY (1940), § 12, edició catalana, p. 93.

722. PLA (2018) i PLA (2020).

# D.1 Una informació genèrica de les obres menors d'Euclides

## D.1.1 Les tres obres de contingut elemental

p. 105 D'aquestes obres, dues són de geometria, *Dades* i *De les divisions*, i una de raonament lògic, *Raonaments falsos* o *Fal·làcies*.

### D.1.1*a* *El tresor de l'anàlisi* de Pappos

**D.1.1$a_1$** Els llibres que pertanyen al camp de l'anàlisi s'ordenen així: *Dades* (*Δεδομένα*), d'Euclides, que consta d'un volum; dos llibres de la *Secció de raó* (*Λόγου ἀποτομή*); dos de les *Seccions de l'espai* (*Κωνίου ἀποτομή*); dos de la *Secció determinada* (*Διωρωσμένη Τομή*) i dos de *Tangències* (*Ἐπαφαί*) (o *Contactes*) d'Apol·loni; *Porismes* (*Πορισμάτων Βιβλία*), en tres llibres, d'Euclides; dos *Sobre les inclinacions* (*Νεύσεις*) d'Apol·loni; dos *Dels llocs plans* (*Τόποι ἐπίπεδοί*) i vuit de *Còniques* (*Κωνικά, ἡ βιβλία*), del mateix autor; d'Aristeu, els cinc llibres d'*Elements dels llocs sòlids* (*Στοιχεία των κωνικών τομώμ*); d'Euclides, a més, dos dels *Llocs en superfícies* (*Τόπων Ἐπιπέδων*); i, finalment, dos *Sobre les mitjanes* (*Περὶ μεσοτήτων*), d'Eratòstenes. Us proporcionem, doncs, resums d'un total de trenta-tres llibres fins a les *Còniques* [d'Apol·loni] per tal que els examineu: llocs, determinacions i casos de cada una d'aquestes qüestions, i lemes que calen [per a comprendre'ls].[723] Em sembla que no m'he deixat res.[724]

### p. 107 D.1.1*b* Les *Dades* segons Pappos

**D.1.1$b_1$** El primer llibre és *Dades*, d'Euclides. Conté noranta teoremes, els vint-i-tres primers dels quals es refereixen a les magnituds en general i els vint-i-quatre següents als segments rectilinis proporcionals no donats en posició.[725] Hi segueixen deu problemes sobre triangles, amb indicació de la classe però no de la posició, set teoremes sobre àrees [de figures] rectilínies sense especificar-ne la posició, i sis sobre paral·lelograms i aplicació d'àrees.

723. Diu: *Τὰ λήμματα τὰ ζητόυμενα*.
724. Pappos (1932), llibre VII, p. 479-480. Vera (1970), volum II, p. 993.
725. Donats solament en magnitud.

El primer dels cinc que segueixen ja s'ha descrit abans i els altres quatre, que tracten de les superfícies dels triangles, estableixen que els quadrats dels costats estan en relació amb les superfícies. Els set següents, fins arribar als setanta-tres, fan referència a dos paral·lelograms i estableixen que la raó entre dos costats és donada però amb certes restriccions. Alguns d'aquests teoremes menen a conclusions anàlogues quan els objectes són triangles.

De les set figures següents, fins a la setanta-nou, dues fan referència a triangles i quatre a un gran nombre de segments proporcionals. Les tres que venen després atenyen a dues línies que limiten una àrea i, per fi, les darreres vuit, fins a la noranta, fan referència a cercles donats solament en magnitud o en magnitud i posició.[726]

### D.1.1*c* Alguns fragments de *Dades* d'Euclides p. 107

Donem les definicions i, tot seguit, algunes dades concretes.[727]

#### D.1.1$c_1$ [Definicions]

1. Les línies,[728] les superfícies i els angles són «donats en magnitud» (*δεδομένα τῷ μεγέθει*) quan és possible fer-ne d'iguals.[729]
2. Una raó és *donada* (*λόγος δεδόσθαι*) quan és possible trobar-ne una altra que hi coincideixi.[730]
3. Les figures rectilínies són *donades en gènere* [o *forma*] (*εἴδει δεδόσθαι*), si cada un dels angles és donat i les raons dels costats, els uns amb els altres, també.[731]
4. Els punts, les línies i els angles són *donats en posició* (*θέσει δεδόσθαι*) quan ocupen sempre el mateix lloc.[732]

---

726. Pappos (1932), llibre VII, p. 479. Vera (1970), volum I, p. 993.
727. Anomenem *dades* els problemes i les proposicions d'aquest llibre.
728. Diu «línies», i això inclou la circumferència i, de retruc, el cercle.
729. És a dir, si, i només si, és igual a un objecte geomètric de la mateixa naturalesa donat per endavant. S'usa en 23 de les 94 dades.
730. És a dir, si, i només si, és igual a una raó donada per endavant. S'usa en 50 de les 94 dades.
731. És a dir, si, i només si, és semblant a una figura rectilínia donada per endavant. Cal haver establert Evi 4. Pla (2018) p. 307-308.
732. És una definició que no té gaire sentit, atès que un objecte geomè-

5. Un cercle és *donat en magnitud* si, i només si, el seu radi també ho és.[733]
6. Un cercle és *donat en posició* si, i només si, el seu centre és donat en posició i el seu radi en magnitud.[734]
7. Els segments dels cercles són *donats en magnitud* quan els angles que contenen i les bases també ho són.[735]
8. Els segments [de cercles] són *donats en posició i en magnitud*, quan els angles que contenen són donats en magnitud i les bases ho són en posició i en magnitud.
9. Una magnitud és una magnitud *donada més gran que una altra* quan, si en sostraiem la donada, el residu és igual a la primera.[736]
10. Una magnitud és una magnitud *donada més petita que una altra* quan, si hi afegim la donada, el resultat és igual a la primera.
11. Una magnitud és *més gran en raó que una altra una magnitud donada* quan la raó entre la diferència i l'altra és donada.[737]
12. Una magnitud és més petita en raó que una altra una magnitud donada quan la raó entre la suma i l'altra és donada.
13. Un segment rectilini és *abaixat* (κατηγμένη) quan és tirat d'un punt donat [en posició] a un segment rectilini [donat] en posició[, que no conté aquest punt,] amb el qual forma un angle donat.[738]

---

tric donat sempre es troba allà on es troba. Tanmateix, en *Dades*, Euclides l'usa des de la dada 25 a la 30, en què li cal alguna mena de moviment. Euclides (2003), edició anglesa, p. 33.

733. De fet, aquesta definició és una manera alternativa d'expressar Diii 1. Pla (2018), p. 183.

734. Vegeu Diii 1 i Eiii 1. Pla (2018), p. 183 i 186-188. Naturalment, hom admet que, si un cercle està donat en posició o en magnitud, la seva circumferència també.

735. Per a aquesta definició i la següent, vegeu Diii 6, Eiii 23 i Eiii 24. Pla (2018), p. 184 i 216-218.

736. Una magnitud $\mathfrak{A}$ és més gran que una altra $\mathfrak{C}$ quan $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, i $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ en la definició 10.

737. La magnitud $\mathfrak{A}$ és més gran en raó que la magnitud $\mathfrak{B}$ la magnitud donada $\mathfrak{C}$, quan la raó $\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$ és una raó [de magnituds] donada. I $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$ correspon a la definició 12.

738. Aquestes tres definicions no s'usen en el cos del text. Euclides (2003), p. 36.

14. Un segment rectilini és *aixecat* (*ἀνηγμένη*) quan és tirat d'un punt donat [en posició] a un segment rectilini [donat] en posició[, que conté aquest punt,] amb el qual forma un angle donat.
15. Un segment rectilini és *paral·lel en posició* (*παρά θέσει*)[739] quan és tirat des d'un punt [donat en posició] a un segment rectilini [donat] en posició de manera que siguin paral·lels.[740]

### D.1.1$c_2$ [Algunes dades]

**D.1.1$c_{2a}$** [Dada 1] *La raó entre dues magnituds donades és donada.* p. 108
Siguin $A$ i $B$ dues magnituds donades [en magnitud].

Aleshores, la raó $\frac{A}{B}$[741] també ho és.

Comprovem-ho.

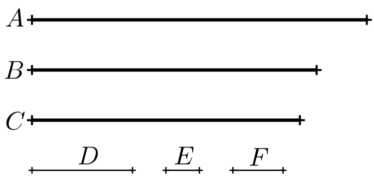


FIGURA D.1. Dada 1

[*Demostració*.] Si la quantitat $A$ és donada [en magnitud], podem determinar una magnitud igual que $A$. [definició 1]

L'anomenem $C$.

I, com que $B$ és donada [en magnitud], també podem determinar una altra magnitud $D$ igual a $B$. [definició 1]

Atès que les quantitats de $A$ i $C$, i $B$ i $D$ són iguals,
$\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$. [Dv 5 o Ev 7]

*Permutando*,[742] obtenim $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. [Ev 16]

Així doncs, la raó $\frac{A}{B}$ és igual a la $\frac{C}{D}$, que hem determinat.[743]
I, per tant, $\frac{A}{B}$ és donada en magnitud. [definició 2]♠[744]

**D.1.1$c_{2b}$** [Dada 2] *Si la raó entre una magnitud donada i una altra és donada, aquesta queda determinada.*[745] p. 108

---

739. Aquí Euclides abreuja el terme *παράλληλος* amb el mot *παρά*.
740. EUCLIDES (2003), edició anglesa, p. 17-36, i, francesa, p. 301-303.
741. En la literatura matemàtica és normal trobar l'expressió $A : B$.
742. Euclides usa la paraula grega *ἐνάλλάξ*.
743. Hem construït els segments $C$ i $D$ i aquests tenen una raó ben determinada. De fet, Euclides admet que dues magnituds sempre tenen una raó.
744. EUCLIDES (2003), edició anglesa, p. 37, i, francesa, p. 304-305.
745. Usarem l'expressió «determinada» amb el sentit de 'donada'.

Suposem que la raó entre les magnituds $A$ i $B$ és donada.

Afirmo que [la magnitud] $B$ queda determinada.

[*Demostració.*] Atès que [la magnitud] $A$ és donada, podem trobar una magnitud igual a $A$. [definició 1]

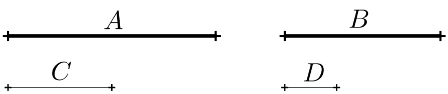



FIGURA D.2. Dada 2

Sigui $C$ aquesta magnitud.

Atès que[, per hipòtesi,] la raó $\frac{A}{B}$ és donada, podem trobar una altra raó igual.

Sigui $\frac{C}{D}$ aquesta raó.[746]

Atès que $A$ és a $B$ com $C$ a $D$,
*permutando*, $A$ és a $C$ com $B$ a $D$. [Ev 16]

Però, com que $A$ és igual a $C$, $B$ i $D$ també són iguals. [Dv 5]

I, en conseqüència, $B$ queda determinada pel fet que és igual a $D$. [definició 1] ♠[747]

p. 108 **D.1.1** $\boldsymbol{c}_{2c}$ [Dada 3] *Si ajuntem una col·lecció [finita] de magnituds donades, la magnitud composta queda determinada.*

Suposem que ajuntem les magnituds donades $AC$ i $BC$.

Afirmo que [la magnitud] $AB$, composta de $AC$ i $CB$, queda determinada.

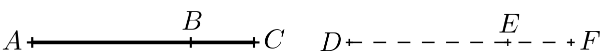



FIGURA D.3. Dada 3

[*Demostració.*] Atès que [la magnitud] $AB$ és donada, és possible considerar-ne una d'igual. [definició 1]

La considerem i és $DE$.

746. En la definició 2 s'afirma que podem determinar una raó igual a una de donada. Ara, però, imposem que un dels termes sigui donat i recorrem al fet següent: «Donades una raó i una magnitud, sempre és possible trobar una altra magnitud de manera que la raó d'aquestes dues sigui igual a la raó donada, és a dir, és possible determinar una quarta proporcional de tres magnituds donades.»

747. EUCLIDES (2003), edició anglesa, p. 39, i, francesa, p. 299.

Anàlogament, atès que [la magnitud] $BC$ és donada,
podem considerar-ne una d'igual. [definició 1]

La considerem i és $EF$.

Aleshores, donat que $AB$ i $BC$ són iguals a $DE$ i $EF$, respectivament,
els totals $AC$ i $DF$ també ho són. [Nc 2]

Per tant, $AC$ queda determinada, ja que hem proporcionat [la magnitud] $DF$ que hi coincideix. [definició 1] ♠[748]

**D.1.1**$\boldsymbol{c}_{2d}$ [Dada 4] *Si d'una magnitud donada en sostraiem una altra també donada, la magnitud romanent queda determinada.* p. 108

Suposem que la magnitud donada $AC$ s'ha sostret de [la magnitud] donada $AB$.

Afirmo que el residu $CB$ queda determinat.

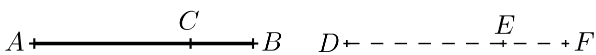



FIGURA D.4. Dada 4

[*Demostració.*] Atès que [la magnitud] $AB$ és donada,
podem considerar-ne una d'igual. [definició 1]

La considerem i és $DF$.

Anàlogament, atès que [la magnitud] $AC$ és donada,
podem considerar-ne una d'igual. [definició 1]

La considerem i és $DE$.

Aleshores, donat que $AB$ i $AC$ són iguals a $DF$ i $DE$, respectivament,
els romanents $BC$ i $EF$ també ho són. [Nc 3]

Per tant, $BC$ queda determinada, ja que hem proporcionat [la magnitud] $EF$ que hi coincideix. [definició 1] ♠[749]

**D.1.1**$\boldsymbol{c}_{2e}$ [Dada 8] *Si coneixem la raó que hi ha entre dues magnituds i una tercera, la raó entre totes tres queda determinada.* p. 109

Siguin $A$, $B$ i $C$ tres magnituds [donades].

---

748. EUCLIDES (2003), edició anglesa, p. 42, i, francesa, p. 302.
749. EUCLIDES (2003), edició anglesa, p. 43-44, i, francesa, p. 303-304.

Afirmo que, si coneixem les raons $\frac{A}{B}$ i $\frac{C}{B}$, la raó entre $A$ i $C$ queda determinada.

[*Demostració.*] Sigui $D$ una magnitud.[750]

Atès que la raó $\frac{A}{B}$ és donada [en magnitud], existeix la raó $\frac{D}{E}$. [definició 2][751]

I, com que [la magnitud] $D$ és donada,
[la magnitud] $E$ queda determinada. [dada 2]

Anàlogament, atès que $\frac{C}{B}$ és donada, determinem $\frac{E}{F}$. [definició 2]

I, com que $E$ és donada,
$F$ queda determinada. [dada 2]

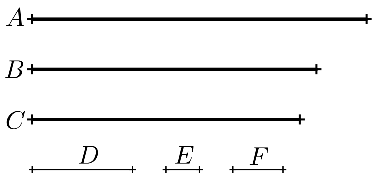


FIGURA D.5. Dada 8

Aleshores, atès que $D$ és donada, la raó entre $D$ i $F$ queda determinada. [dada 1]

Com que $\frac{A}{B} = \frac{D}{E}$ i $\frac{B}{C} = \frac{E}{F}$, resulta que $\frac{A}{B} = \frac{D}{F}$. [Ev 22]

Però la raó $\frac{A}{B}$ és donada i, per tant, la raó $\frac{A}{C}$ també. ♠[752]

p. 108 **D.1.1$c_{2f}$** [Dada 23] *Si la raó entre una totalitat determinada i una altra és donada, la raó entre* [*cada una de*] *les parts* [*de la primera*] *i* [*cada una de*] *les parts* [*de la segona*] *és determinada i* [*aquestes raons de les parts*] *són diferents, aleshores totes* [*les magnituds*] *tenen proporcions determinades amb totes* [*les parts*].[753]

Considerem que la totalitat $AB$ té una raó amb la totalitat $CD$.

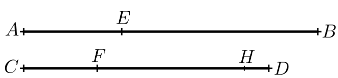


FIGURA D.6. Dada 23

Suposem que les parts $AE$ i $EB$ tenen raons donades amb les parts $CF$ i $FD$, però que aquestes raons són diferents.

---

750. Com observa molt adequadament Taisbak, això és un postulat: «Sempre podem considerar un punt i una magnitud.» EUCLIDES (2003), edició anglesa, p. 25.

751. Vegeu la nota 746 (pàgina 244).

752. EUCLIDES (2003), edició anglesa, p. 51-53, i, francesa, p. 311-312.

753. En les demostracions de les dades que recopilem a continuació recorrem a dades que no hem reproduït però que podem trobar a EUCLIDES (2003). De fet, com hem vist fins ara, les demostracions són simples.

Afirmo que les raons entre les magnituds $AB, AE$ i $EB$ i les magnituds $CD, CF$ i $FD$, també.

[*Demostració.*] Com que la raó $\frac{AE}{CF}$ és donada,
la suposem igual a la $\frac{AB}{CH}$.[754]

Aleshores, la raó $\frac{AB}{CH}$ queda determinada. [definició 2]

Per tant, la raó $\frac{EB}{FH}$ dels romanents $EB$ i $FH$ queda determinada. [dades 19 i 5, i definició 2]

Però la raó $\frac{EB}{FD}$ és donada.

Per tant, també ho és $\frac{FD}{FH}$. [dada 8]

I, *convertendo*, la raó $\frac{FD}{FD-FH}$,
que és la raó $\frac{FD}{DH}$, queda determinada. [dada 5]

I, com que les raons de $AB$ amb cada una de les magnituds $CD$ i $CH$ són donades,
resulta que la raó $\frac{CD}{CH}$ queda determinada. [dada 8]

D'això es desprèn, *convertendo*, que la raó $\frac{CD}{DH}$ és donada. [dada 5]

Però la raó $\frac{HD}{DF}$ ho és.

Per tant, la raó $\frac{CD}{DF}$ també. [dada 8]

I, *convertendo*, la raó $\frac{CF}{FD}$ també és donada. [dada 5]

Ara bé, les raons $\frac{CF}{AE}$ i $\frac{FD}{EB}$ són conegudes.

En conseqüència, les raons de totes les parts amb totes les parts són donades. ♠[755]

**D.1.1$c_{2g}$** [Dada 26] *Si els extrems d'un segment rectilini són donats en posició, el segment rectilini també és donat en posició però, a més, ho és en magnitud.* p. 108

Siguin $A$ i $B$ els extrems d'un segment rectilini donats en posició.

Afirmo que el segment rectilini $AB$ és donat en posició i en magnitud.

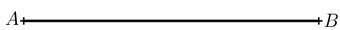



Figura D.7. Dada 26

[*Demostració.*] Si, amb el punt $A$ fix,
la posició del segment $AB$ canvia de posició, el punt $B$ també ho fa.

Per tant, com que el punt $B$ no canvia, el segment $AB$ tampoc no ho fa.

Així, el segment $AB$ és donat en posició i en magnitud. ♠[756]

754. Vegeu la nota 746 (pàgina 244).
755. Euclides (2003), edició anglesa, p. 86-88, i, francesa, p. 335-336.
756. Euclides (2003), edició anglesa, p. 99-100, i, francesa, p. 341. Per

p. 110 **D.1.1**$\boldsymbol{c}_{2h}$ [Dada 28] *Si per un punt donat tirem un segment parallel*[757] *a un segment donat en posició, el segment tirat queda donat en posició.*

Pel punt $A$, donat [en posició], tirem el segment $DAE$ paral·lel al segment $BC$ donat en posició. [Ei 31]

Volem demostrar que $DAE$ queda determinat en posició.

[*Demostració.*] Si el segment $DAE$ no està determinat en posició,[758] atès que el punt $A$ roman en el seu lloc,

la del segment $DAE$ canvia a una altra però mantenint-se paral·lel al segment $BC$.

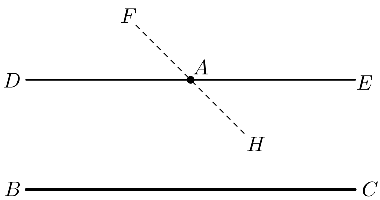


Figura D.8. Data 28

Aquesta posició l'anomenem $FAH$.

Aleshores, el segment $BC$ és paral·lel a $FAH$ i a $DAE$.

Per tant, els segments $DAE$ i $FAH$ són paral·lels. [Ei 30][759]

Però aquests dos segments paral·lels es tallen,

cosa que és absurda. [Di 23]

Per tant, la posició del segment $DAE$ no canvia,

però el segment $DAE$ queda determinat en posició. ♠[760]

p. 111 **D.1.1**$\boldsymbol{c}_{2i}$ [Dada 58] *Si una àrea donada s'aplica a un segment donat amb la deficiència d'una forma donada, aleshores tant la llargada com l'amplada queden determinades.*

---

a una anàlisi acurada dels pressupòsits que s'empren implícitament en aquesta obra, disposem de l'edició anglesa. Això no obstant, val la pena indicar que hem d'admetre P 1 i Nc 4. Pla (2018), p. 82 i 85.

757. Usa παρά, que el context i la figura indiquen que significa 'parallel'. Vegeu la nota 739 (pàgina 243).

758. Hipòtesi de l'absurd.

759. De fet, Euclides es basa en la *unicitat* del segment paral·lel a un segment donat que passa per un punt donat. Pla (2018), p. 129. Podria haver fet un raonament basat en l'enunciat de P 5 (Pla (2018), p. 83), però recorre a Ei 30 (Pla (2018), p. 127-128). Hem de pensar que considera aquest fet —«dos segments paral·lels a un tercer ho són entre si»— molt més intuïtiu.

760. Euclides (2003), edició anglesa, p. 100-101, i, francesa, p. 342.

Hem aplicat una àrea donada ▭ $AC$ a un segment donat $AD$ amb la deficiència de la forma donada ▭ $CD$.

Afirmo que $BC$ i $BD$ queden ben determinats.[761]

[*Construcció.*] Bisequem $AD$. [E I 10]

Obtenim el punt $E$,

i el segment $ED$ queda determinat. [dada 2]

Damunt del segment $ED$ col·loquem una figura ▭ $EF$ semblant a la ▭ $CD$ i col·locada de manera anàloga. [E VI 18]

Hem descrit l'esquema[762] que queda determinat. ♣

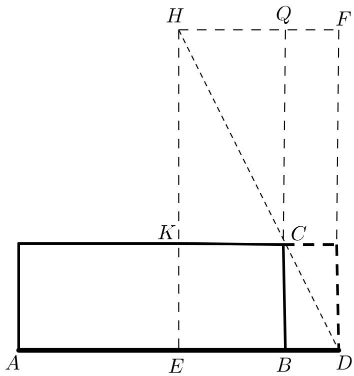


FIGURA D.9. Dada 58

[*Demostració.*] Això fa que la forma de ▭ $EF$ quedi determinada.

I, atès que damunt el segment $ED$ s'ha descrit la forma ▭ $EF$, ▭ $EF$ queda determinada en magnitud. [dada 52]

Però ▭ $EF$ = ▭ $AC$ + ▭ $KQ$. [E VI 27]

D'això en resulta que ▭ $AC$ + ▭ $KQ$ és donat en magnitud.

Però, per hipòtesi, ▭ $AC$ també ho és.

En conseqüència, allò que roman, ▭ $KQ$, també. [dada 4]

D'altra banda, [la figura ▭ $KQ$] està també determinada en forma, ja que és semblant a ▭ $CD$. [E VI 24]

Per tant, els costats de ▭ $QK$ queden determinats [dada 55]

i, en conseqüència, $KC$ queda fixat.

Però $KC$ és igual a $EB$ i, per tant, $EB$ queda ben determinat.

D'altra banda, [el segment] $ED$ és donat

i, per tant, el romanent $BD$ també. [dada 4]

---

761. Observem que, aparentment, Euclides es manté en el context del llibre II dels *Elements* perquè les figures són, de fet, paral·lelograms. Però, en realitat, no és així perquè recorre al llibre VI —quan ja disposa de la teoria de la proporció—, que li permet afinar més.

762. Usa l'expressió *τό σχῆμα* que, en la teoria de l'aplicació d'àrees, significa el gnòmon de la figura. En aquest cas, es tracta del gnòmon ⌝ $EDFQCK[E]$.

I la raó $\frac{BD}{BC}$ igualment.[763]

De tot això en resulta, finalment, que $BC$ queda determinat. ♠[764]

p. 111 **D.1.1$c_{2j}$** [Dada 90] *Si des d'un punt donat tirem una tangent a la circumferència d'un cercle donat en posició, el segment tangent queda ben determinat.*

Suposem que, des d'un punt donat $C$,

tirem una tangent $CA$ a la circumferència $AB$, donada en posició. [EIII 17]

Afirmo que el segment $AC$ queda determinat en posició i en magnitud.

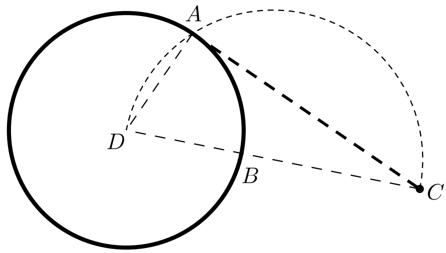



FIGURA D.10. Dada 90

[*Demostració*.] Considerem el centre $D$ del cercle [$\bigcirc(D, DA)$]. [EIII 1]

Tirem els segments $DA$ i $DC$. [P 1]

Atès que els punts $C$ i $D$ són donats,

el segment $CD$ també ho és. [dada 26]

I, a més, sabem que el triangle $\triangle CAD$ és rectangle. [EIII 18]

Per tant, la circumferència de diàmetre $CD$ passa pel punt $A$. [EIII 31]

En conseqüència, el cercle $\bigcirc CAD$ és donat en posició. [definició 6]

I, de retruc, l'arc $\widehat{AB}$ també ho és.

Per tant, el punt $A$ està ben determinat [dada 25]

i $C$ també.

En conseqüència, el segment $AC$ és donat en posició i en magnitud. [dada 26] ♠[765]

p. 112 **D.1.1$c_{2k}$** [Dada 91] *Tenim un punt donat exterior a un cercle donat en posició i tirem una secant a la circumferència del cercle. El rectan-*

763. Fixem-nos que, en recórrer a la raó, l'argument val amb independència de la figura poligonal emprada en el dibuix.

764. EUCLIDES (2003), edició anglesa, p. 154-155, i, francesa, p. 397-398.

765. EUCLIDES (2003), edició anglesa, p. 229, i, francesa, p. 467-468.

*gle que té com a costats el segment complet i el que va del punt a la part convexa de la circumferència està completament determinat.*

Sigui $D$ un punt donat exterior a un cercle $\bigcirc ABC$ donat en posició.

Des del punt $D$ tirem una secant $BD$ a la circumferència.

Afirmo que el rectangle de costats $BD$ i $DC$ és donat.

[*Demostració.*] Des del punt $D$ tirem una tangent $AD$ a la circumferència. [EIII 17]

Sabem que el segment $AD$ està ben determinat. [dada 90]

Per tant, $AD$ i $\square AD$ són donats.[766]

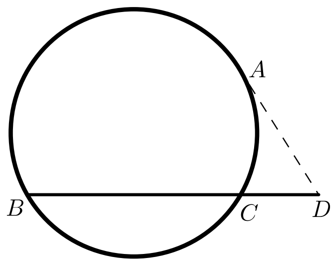


FIGURA D.11. Dada 91

El rectangle $\boxed{\phantom{xx}}\, BCD$ —és a dir, el de costats $BD$ i $DC$— és igual al quadrat $\square AD$. [EIII 36]

Per tant, el rectangle $\boxed{\phantom{xx}}\, BCD$ està totalment determinat. ♠[767]

**D.1.1**$\boldsymbol{c}_{2\ell}$ [Dada 93] *En un cercle donat en magnitud considerem una corda que subtendeix un angle donat. El dimidiem* [*i considerem els punts que la bisectriu determina en la corda i en la circumferència*]*.* a*) La raó entre la suma dels costats* [*de l'angle*] *i la bisectriu és donada.* b*) El rectangle format per la suma esmentada i el segment de bisectriu que va de la corda a la circumferència* [*al costat oposat del vèrtex*] *també és donat.* p. 112

Sigui $\bigcirc ABC$ un cercle donat en magnitud.

Considerem la corda $BC$ que subtendeix l'angle donat $\widehat{BAC}$ [EIV 1] i la bisectriu $AE$ de l'angle $\widehat{BAC}$. [EI 9]

Afirmo que els elements següents estan ben determinats:

*a*) La raó de la suma $BAC\,(:= BA + AC)$ i $AE$.

*b*) El rectangle de costats la suma $BAC$ i el segment $ED$.

[*Demostració.*]

*a*) Unim $BE$. [P 1]

---

766. Euclides suposa que, si un costat $AD$ és donat, el quadrat $\square AD$ també. És una conseqüència de la dada 52.

767. EUCLIDES (2003), edició anglesa, p. 230, i, francesa, p. 470-471.

Atès que el cercle $\bigcirc CAE$ és donat en magnitud
i que la corda $BC$ subtendeix l'angle donat $\widehat{BAC}$,
resulta que la corda $BC$ està ben determinada. [dada 87]

Per la mateixa raó, el segment $BE$ també ho està.

Per tant, la raó $\frac{BC}{BE}$ també. [dada 1]

Ara, el segment $AE$ dimidia l'angle $\widehat{BAC}$.

I això fa que tinguem la igualtat $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$. [Evi 3]

Canviant els termes mitjans —és a dir, *alternando*—, tenim que $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$. [Ev 16]

Per tant, la suma $BAC$ és a la suma $BC$ com $AC$ a $DC$.[768] [Ev 12]

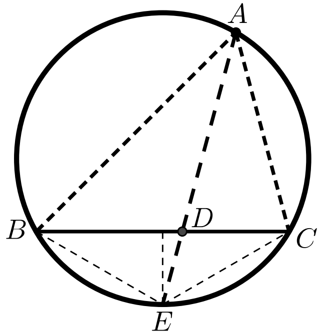


Figura D.12. Dada 93

D'altra banda, tenim que els angles $\widehat{BAD}$ i $\widehat{DAC}$,
i $\widehat{ACD}$ i $\widehat{BED}$ són iguals. [Eiii 21]

Conseqüentment, els angles restants $\widehat{ABE}$ i $\widehat{ADC}$ [dels triangles $\triangle AEB$ i $\triangle ACD$] també ho són. [Ei 32 i Nc 3]

De tot això en resulta que els triangles $\triangle ADC$ i $\triangle ABE$ són equiangles.

Per tant, $\frac{AC}{CD} = \frac{AE}{BE}$. [Evi 4]

Però hem vist que $\frac{AC}{CD} = \frac{AB+AC}{BC}$.

D'això es dedueix que $\frac{AE}{BE} = \frac{AB+AC}{BC}$. [Ev 11]

En conseqüència, *alternando*, $\frac{BAC}{AE} = \frac{BC}{BE}$. [Ev 16]

Ara bé, hem vist que la raó $\frac{BC}{BE}$ està ben determinada.

Per tant, la raó $\frac{BAC}{AE}$ també ho està. ♠

Afirmo que el rectangle de costats $BAC$ i $DE$ està determinat.[769]

*b*) És clar que els triangles $\triangle ADC$ i $\triangle DEB$ són equiangles,
[Eiii 21 i Ei 15][770]

768. De fet, $\frac{AB+AC}{BD+DC} = \frac{BAC}{BC} = \frac{AC}{DC}$.

769. Aquesta frase és una repetició de l'ítem *b* de l'afirmació anterior.

770. Hem vist que els angles $\widehat{ACD}$ i $\widehat{DBE}$ són iguals. Però els $\widehat{DAC}$ i $\widehat{DBE}$ també ho són perquè tots dos subtendeixen l'arc $\overset{\frown}{CE}$. Eiii 21, Pla (2018), p. 214-215. I, els que resten, $\widehat{ADC}$ i $\widehat{BED}$, s'oposen pel vèrtex. Ei 15, Pla (2018), p. 108.

per tant, que $\frac{BE}{DE} = \frac{AC}{CD}$. [EVI 4]

Però hem vist que $\frac{BAC}{BC} = \frac{AC}{CD}$.

Per tant, $\frac{BAC}{BC} = \frac{BE}{DE}$. [EV 11]

En conseqüència, els rectangles de costats $BAC$ i $DE$, i $BC$ i $BE$ són equivalents. [EVI 16]

Però el rectangle de costats $BC$ i $CD$ està ben determinat. [dada 52]

Per tant, el de costats $BAC$ i $DE$ també ho està. ♠ ♠

## D.1.1*d* Alguns fragments de l'obra *De les divisions* p. 113

**D.1.1*d*₁** El cercle, per exemple, i qualsevol altra figura rectilínia es poden dividir conceptualment en parts desiguals.[771] L'autor dels *Elements* dedica l'atenció a aquestes qüestions en *De les divisions*, en què separa les figures donades en parts iguals i desiguals.[772]

**D.1.1$d_2$** Alguns exemples concrets de divisions.

**D.1.1$d_{2a}$** [Divisió 19] *Volem dividir un triangle* $\triangle ABC$ *en dues parts equivalents mitjançant un segment* $ZDH$ *que passa per un punt* $D$ *de l'interior del triangle.*

[*Construcció.*] Pel punt $D$ tirem un [segment] $DE$ paral·lel al costat $BC$. [EI 31]

Apliquem damunt del segment $DE$ una àrea igual a la meitat del rectangle de costats $AB$ i $BC$. [EVI 12]

Sigui $T$ un punt de la prolongació de $AB$ de la banda de $A$, [P 2] de manera que el rectangle de costats $TB$ i $BE$ és equivalent al de costats $AB$ i $BC$.

Damunt de $TB$ apliquem un paral·lelogram que equival al rectangle de costats $BT$ i $BE$ amb la deficiència d'un quadrat. [divisió 18][773]

771. Diu: τῷ λόγῳ.

772. PROCLE (1873), § 144, 22-26, edició anglesa, p. 115, i, francesa, p. 129.

773. Recordem que trobem aquest resultat, en particular, a EII 5, i, en general, a EVI 28.

Aquest rectangle aplicat serà el de costats $BH$ [$:= (TB-HT)$] i $HT$ [que equival al de costats $TB$ i $BE$].

Ara, tirem la recta $HD$ i la prolonguem fins a $Z$. [P 1 i P 2] ♣

Resulta que el triangle $\triangle ABC$ queda dividit en dues parts equivalents: el triangle $\triangle HBZ$ i el quadrilàter $HZCA$.

[*Demostració*]. Els rectangles de costats $TB$ i $BE$, i $TH$ i $HB$ són equivalents.

Per tant, $\frac{TB}{TH} = \frac{HB}{BE}$. [Evi 16]

I, *dividendo*,[774] $\frac{BT}{BH} = \frac{BH}{HE}$. [Dv 16]

Però $\frac{HB}{HE} = \frac{BZ}{ED}$. [Evi 2]

Per tant, $\frac{TB}{BH} = \frac{BZ}{ED}$. [Ev 11]

D'això en resulta que els rectangles de costats $TB$ i $ED$,

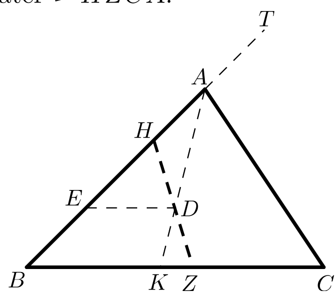



FIGURA D.13. Divisió 19

i $BH$ i $BZ$ són equivalents. [Evi 16]

Però el de costats $TB$ i $ED$ equival a la meitat del de costats $AB$ i $BC$.

I la raó que hi ha entre els rectangles de costats $BH$ i $BZ$,
i $AB$ i $BC$
és la mateixa que la dels triangles $\triangle HBZ$ i $\triangle ABC$,
ja que l'angle en $B$ és comú.[775] [Ei 34 i Evi 15]

D'això en resulta que el triangle $\triangle HBZ$ equival a la meitat del $\triangle ABC$.

Per tant, hem dividit el triangle $\triangle ABC$ en dues parts equivalents, el triangle $\triangle BHZ$ i el quadrilàter $AHZC$.

De manera que, quan apliquem, a $TB$, un paral·lelogram equivalent al rectangle de costats $TB$ i $BE$,
el complement del qual és un quadrat,
obtenim el rectangle de costats $AB$ i $AT$.[776]

De manera anàloga, tirant el segment $AD$ i prolongant-lo fins a $K$, podem demostrar que el triangle $\triangle ABK$ equival a la meitat del triangle $\triangle ABC$.

774. Vegeu Ev 19, porisma. PLA (2018), p. 293.
775. EUCLIDES (1915), p. 31, nota 88.
776. És a dir, els punts $T$ i $A$ coincideixen.

I això és precisament el que volíem establir. ♠[777]

**D.1.1$d_{2b}$** [Divisió 20] *Volem dividir un triangle $\triangle ABC$ amb un segment $TDH$ que passa per un punt $D$ de l'interior del triangle per tal d'obtenir-ne una part ben determinada.*

Suposem que la part fixada és una tercera part del total.

[*Construcció.*] Per $D$ tirem un segment $DE$ paral·lel a $BC$, [EI 31]

i apliquem a $DE$ un rectangle equivalent a una tercera part del rectangle de costats $AB$ i $BC$,

és a dir, considerem el segment $BZ$ que fa que el rectangle de costats $BZ$ i $ED$ equivalgui a una tercera part del de costats $AB$ i $BC$. [EVI 12]

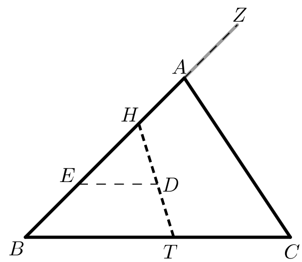



FIGURA D.14. Divisió 20

Al segment $FB$ hi apliquem un rectangle equivalent al de costats $FB$ i $BE$ amb la deficiència d'un quadrat. [divisió 18]

Suposem que el rectangle aplicat és el rectangle de costats $BH$ [$= ZB - HZ$] i $HZ$[, equivalent al rectangle de costats $FB$ i $BE$].

Tirem el segment $HD$ i el prolonguem fins a $T$. [P 1 i P 2]. ♣

[*Demostració.*] Si procedim com ho hem fet en la divisió 19,[778]
podem establir que el triangle $\triangle HTB$ equival a una tercera part del $\triangle ABC$.

I, mitjançant una construcció anàloga,
podem dividir el triangle $\triangle ABC$ amb la raó indicada.[779]

Això és tot el que cal fer. ♠[780]

**D.1.1$d_{2c}$** [Divisió 28] *Volem dividir una figura formada per un arc de circumferència i dos segments que es tallen en un punt en dues parts equivalents.*[781]

777. EUCLIDES (1915), p. 52-54.
778. D.1.1$d_{2a}$, pàgines 253-255.
779. Observem que aquesta demostració val per a tota fracció $\frac{m}{n} < 1$.
780. EUCLIDES (1915), p. 54-55.
781. Vegeu l'exposició de la divisió 28 feta a la pàgina 115.

**D.1.1$\boldsymbol{d}_{2d}$** [Divisió 29] *En un cercle donat, volem tirar dues cordes paral·leles que determinin una àrea donada.*

Suposem que la part fixada és una tercera part del cercle $\bigcirc ABC$.

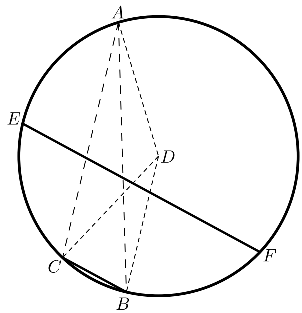


FIGURA D.15. Divisió 29

[*Construcció.*] Considerem el centre $C$ del cercle donat [EIII 1]

i el costat $AC$ del triangle equilàter inscrit en el cercle de centre $D$. [EI 1 o EI IV 2]

Per $D$, tirem els segments $AD$ i $DC$, [P 1]

i el segment $DB$ paral·lel a $AC$. [EI 31]

Tirem el segment $CB$ [P 1]

i considerem el punt $E$ que divideix l'arc $\overset{\frown}{AC}$ en dues parts iguals. [EIII 30]

Ara, per $E$, tirem la corda $EF$ paral·lela al segment $BC$. [EI 31]

Finalment, tirem el segment $AB$. [P 1] ♣

Afirmo que els dos segments paral·lels $EF$ i $CB$ determinen una figura mixtilínia $FBCE$,

que val una tercera part del cercle $\bigcirc ABC$.

[*Demostració.*] Atès que el segment $AC$ és paral·lel a $DB$,

el triangle $\triangle DAC$ equival al triangle $\triangle BAC$. [EI 37]

Afegim el segment circular $\frown AEC$ a cada un.

La figura $\lhd DAEC$ equival a la figura mixtilínia $BAEC$. [Nc 2]

Però el sector circular $\lhd DAEC$ és una tercera part del cercle $\bigcirc ABC$. [per construcció][782]

Per tant, la figura mixtilínia $BAEC$ equival també a una tercera part del cercle. [Nc 1]

A més, com que $EF$ és paral·lel a $CB$,

els arcs $\overset{\frown}{EC}$ i $\overset{\frown}{BF}$ són iguals.[783] [EIII 27]

Però $\overset{\frown}{EC}$ és igual a $\overset{\frown}{EA}$. [per construcció]

Per tant, $\overset{\frown}{EA}$ ho és a $\overset{\frown}{FB}$. [Nc 1]

782. Això és degut al fet que la corda $AC$ és el costat del triangle equilàter inscrit en el cercle.

783. Considerem la corda $CF$ i apliquem EI 29.

Afegim aquests dos arcs iguals a l'arc $\widehat{ECB}$.

Aleshores, l'arc complet $\widehat{AB}$ és igual al complet $\widehat{EF}$. [Nc 2]

En conseqüència, els segments $AB$ i $EF$ són iguals [EIII 27]
i, per tant, el segment circular $\frown AECB$ ho és al segment circular $\frown ECBF$. [EIII 24]

Si sostraiem el segment circular comú $\frown BC$ a tots dos,
els romanents [mixtilinis] $EFBC$ i $BAEC$ són iguals. [Nc 3]

Però hem establert que la figura [mixtilínia] $BAEC$ equival a una tercera part del cercle $\bigcirc ABC$.

Per tant, la figura [mixtilínia] $EFBC$ equival a una tercera part del cercle $\bigcirc ABC$, [Nc 1]
que és el que volíem demostrar. ♠[784]

## D.1.1*e* Procle esmenta *Pseudaria* p. 105

Procle considera que és una obra d'Euclides més petita.[785]

**D.1.1*e*$_1$** Hi ha moltes qüestions que deriven, aparentment, dels principis científics i hi estintolen la seva veritat. En realitat, això provoca que els més inexperts i més superficials puguin caure en l'error. Euclides ha deixat procediments prudents —i molt perspicaços— per a aquestes situacions. Si tots aquells que s'inicien en l'estudi [de la ciència] els tenen en compte, es podran exercitar a prendre consciència dels paralogismes[786] i, evitant-los, aconseguir la correcció [del raona-

784. EUCLIDES (1915), p. 66-67. En una nota (p. 67), Wepcke diu: «Si volem determinar una quarta [una quinta o qualsevol altra part] del cercle mitjançant segments paral·lels, cal tirar el costat d'un quadrat [d'un pentàgon, etc. regulars] inscrit en el cercle i tirar dos segments del centre als extrems dels costats corresponents com hem fet en la demostració anterior. La resta de la demostració és anàloga.» Ara bé, l'expressió *una fracció arbitrària*, en lloc de l'expressió *una tercera part*, no és satisfactòria. El problema no seria resoluble amb regle i compàs, llevat que el polígon regular tingués un nombre $n$ de costats de la forma $n = 2^p\left(2^{2^{r_1}}+1\right)\dots\left(2^{2^{r_s}}+1\right)$, amb $p, r_1, \dots, r_s$ enters positius o nuls, diferents, i $2^{2^{r_i}}+1, i = 1, \dots, s$, primers diferents. GAUSS (1801), edició catalana, p. 643-644.

785. Aquest text és la continuació de C.1$a_2$ (pàgines 206-207).

786. En llatí *paralogismus*, que deriva del mot grec antic *παραλογισμός*, compost de *παρα* —'contrari a'— i *λογισμός* —'raonament'.

ment]. El text que ensenya tot això és *Fal·làcies* o *Raonaments falsos* (*Περὶ Ψευδαρών*), que conté, ordenadament i separadament, diverses estratègies per a evitar els raonaments falsos.[787] En cada cas, ofereix exercicis concrets que permeten copsar el contingut de diversos teoremes, situar la veritat al costat de l'errada, adaptar les refutacions de l'error que ens presenta i seduir-nos [cap al raonament correcte]. A diferència dels *Elements*, una exposició impecable i completa de la ciència del quefer geomètric, aquest és un text gimnàstic i catàrtic.[788]

## D.2 Les obres de geometria superior

### D.2.1 *Porismes*, *Llocs en superfícies* i *Còniques*[789]

p. 91 i 120

#### D.2.1*a* Procle ens apropa al concepte de porisma

En *El tresor de l'anàlisi* de la *Col·lecció matemàtica*, Pappos proporciona una visió força completa dels continguts dels *Porismes* d'Euclides. I, uns segles més tard, Procle esmenta l'obra de passada.[790] Aquest fet s'acosta al concepte de porisma (*πόρισμα*) només en dues ocasions, la segona de les quals es correspon a la que empra Euclides en els *Elements* després de comentar EI 15.[791]

**D.2.1*a*$_1$** S'anomena *porisma* un problema semblant a aquells que Euclides tracta en *Porismes*, però també qualsevol teorema que, malgrat no haver estat proposat [de manera explícita], es manifesta en virtut d'un altre teorema ja demostrat.[792] Aquesta és la raó per la qual ano-

787. Diu: *τροπόι*.

788. PROCLE (1873), § 70-71, edició anglesa, p. 58, i, francesa, p. 63-64.

789. D'aquest darrer en tornarem a parlar en el volum següent, en fer referència a les còniques en el context de les aportacions d'Apol·loni.

790. Per al paper dels porismes euclidians en la comprensió de les propietats projectives, vegeu ÁLVAREZ (2012).

791. Aquesta proposició estableix la igualtat dels angles que s'oposen pel vèrtex. EI 15, a PLA (2018), p. 108.

792. És el que avui anomenem, de manera genèrica, *corol·lari*.

menem *porismes* aquells resultats que, d'alguna manera, constitueixen un guany accessori en la demostració científica.[793]

**D.2.1*a*$_2$** PORISMA. [De la proposició] se'n dedueix immediatament que, quan dues rectes es tallen, els quatre angles [que determinen] fan quatre rectes. p. 120

El *porisma* és un nom geomètric amb doble significat. D'una banda, fa referència als teoremes que, considerats conjuntament amb les demostracions d'altres teoremes, proporcionen certs avantatges als investigadors.[794] D'una altra, és una invenció exigida pel que es busca, i no solament una producció o una simple contemplació.[795] Així, per exemple, el fet que els angles de la base d'un triangle isòsceles siguin iguals és quelcom que s'ha de tenir en compte.[796] Només així s'assoleix el coneixement de certs fets reals. En canvi, dividir un angle en dues parts iguals, fer un triangle o ajuntar [segments, angles, figures, etc.] són processos que necessiten certes operacions [de construcció]. Determinar el centre d'un cercle donat, la mesura comuna de dues magnituds donades o qualsevol altra qüestió d'aquesta mena se situa entre els problemes i els teoremes.[797] Per aquest motiu, no hi ha només contemplació ni mera construcció, sinó que hi entra en joc la «invenció», perquè es necessita mostrar-la als ulls, fer-la aparent.[798] Aquests són els porismes que Euclides va publicar en una obra de tres llibres.

D'aquesta mena de porismes no en parlarem.[799] En canvi, parlarem dels que trobem en els *Elements*:[800] teoremes que, juntament amb les

793. PROCLE (1873), § 212, edició anglesa, p. 166, i, francesa, p. 188.

794. Seria el porisma com a corol·lari.

795. Seria el sentit euclidià de *porisma*.

796. El teorema es reconeix i aleshores es considera una propietat que realment és. No es tracta, doncs, d'un porisma en sentit estricte.

797. Procle col·loca els porismes en el sentit euclidià com la determinació de resultats necessaris per a establir un teorema o per a resoldre un problema. Per això, diu que: «es troben enmig [dels problemes i els teoremes]».

798. L'èmfasi és nostre.

799. Vegeu D.2.1$a_3$. I, a la nota 369 (pàgina 121), podeu trobar una reconstrucció. I, succintament, a HEATH (1921), volum I, p. 431-438.

800. Amb referència als porismes corol·lari.

demostracions, il·luminen altres teoremes, malgrat que no han estat objecte de recerca per si mateixos, com [hem vist en] allò que acabem d'enunciar. És a dir, que, quan dos segments es tallen, els quatre angles que determinen fan quatre rectes. Efectivament, quan hem dit: «Siguin dos segments $AB, CD$ que es tallen pel punt $E$.[801] Atès que $AB$ cau damunt de $CD$, formen angles adjacents que junts també fan dues rectes. I, anàlogament, el segment $CD$, que cau damunt del segment $AB$,[802] determina angles adjacents que, «junts, en fan dos de rectes», hem establert alhora que els quatre angles determinats pels dos segments fan, junts, dos angles rectes.

El porisma és, doncs, un teorema que la demostració d'un altre teorema o problema posa clarament de manifest sense esforç. I fa l'efecte que els porismes se'ns fan palesos com si fos per atzar, ja que se'ns mostren sense que els hàgim ni proposat ni buscat. Per això els considerem guanys. Potser els experts en l'art matemàtica els han donat aquest nom per mostrar, als inexperts astorats, que aquests guanys [inesperats] són, de fet, dons divins i no pas el que semblen, perquè els produeix quelcom que es troba dins seu i resulten de la profunda potència de l'esperit. Quan els apliquem a la geometria, afegim les abundoses riqueses a les recerques precedents i posem de manifest l'inexhaurible riquesa de l'univers dels teoremes.[803]

[...] De porismes, n'hi ha de geomètrics i d'aritmètics. El que hem analitzat és geomètric, però el que trobem al final del teorema segon del llibre VII és aritmètic.[804] Cal que els distingim d'acord amb els resultats dels quals procedeixen. Uns provenen de problemes i els altres de teoremes. El que ara ens ocupa dimana d'un teorema, però el que segueix la proposició segona del llibre VII ho fa[805] d'un problema.

801. Vegeu la figura EI 15 (PLA (2018) p. 108).

802. És EI 13, aplicat dues vegades. PLA (2018) p. 105-106.

803. Hi ha una mena de vida interna en el si de la geometria que el nostre esperit aconsegueix captar. Aquest és el do diví, segons Procle.

804. EVII 2 (PLA (2020) p. 94-96) estableix l'existència del màxim comú divisor de dos nombres naturals. D'això en resulta trivialment —n'és un porisma— que: «Si un nombre mesura dos nombres, mesura necessàriament el seu màxim comú divisor.»

805. El text diu: *ἐν τῷ δευτερῳ βιβλίῳ*.

Els porismes es poden distingir també pel mètode de demostració: alguns s'estableixen per demostració directa; d'altres, en canvi, per reducció a l'impossible. El que hem analitzat aquí és directe, però el que segueix la proposició primera del llibre III[806] es fa evident per l'absurd.

[...] En mostrar-nos que l'espai que envolta un punt determinat es distribueix en angles que [en conjunt] valen quatre angles rectes, el porisma que hem analitzat proporciona el punt de partida del sorprenent teorema que indica que els únics polígons que permeten omplir completament la regió que hi ha al voltant d'un punt determinat[807] són el triangle equilàter, el quadrat i l'hexàgon regular.[808]

[...] Aquest teorema és pitagòric.[809]

**D.2.1*a*$_3$** Després dels *Contactes* [d'Apol·loni][810] venen els *Porismes* [d'Euclides]. Els *Contactes* consten de tres llibres que proporcionen la col·lecció més extensa de maneres de resoldre problemes importants. Són porismes de tal naturalesa que és difícil avaluar la quantitat de gèneres que presenten.[811] Totes aquestes menes de porismes no pertanyen ni al gènere dels teoremes ni al dels problemes. De fet, presenten una forma intermèdia entre aquests darrers. Per aquesta raó, entre els geòmetres que solament atenen la forma de la proposició, uns creuen que els porismes són del gènere dels teoremes, mentre que d'altres que ho són del dels problemes. Tanmateix, resulta clarament de les definicions que els antics coneixien la diferència d'aquestes tres

806. És el problema que estableix la manera de determinar el centre d'un cercle. PLA (2018), p. 186-188. Se'n deriva: «Si, en un cercle, un segment talla perpendicularment una corda pel punt mitjà, el centre es troba damunt d'aquest segment secant.» HEIBERG i MENGE (1883-1916), volum I, p. 166, segment 14, i p. 168, línies 12-15.

807. Dit d'una altra manera, *pavimentar* el terra.

808. Seguidament en dona la demostració.

809. PROCLE (1873), § 301-305, edició anglesa, p. 236-238, i, francesa, p. 258-261. Pel que fa referència a la darrera afirmació, vegeu PLA (2016*b*), ítem *c* i exercici 67, p. 142. I també el text A.1.2$a_1$ (pàgines 156-158).

810. També conegut com a *Tangències*.

811. Hem suprimit les parts que estan entre claudàtors a PAPPOS (1932) i que Chasles manté perquè, en opinió de Hultsch, són parts afegides.

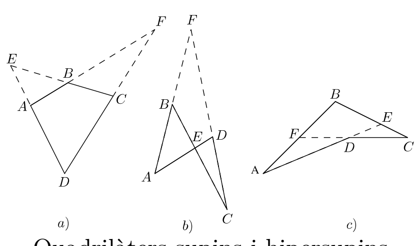
menes d'objectes [geomètrics], perquè van establir que un «teorema» és una proposició que pretén demostrar el que proposa, que un «problema» n'és una que intenta construir l'objecte [geomètric] que es demana i un «porisma», una que mira d'aconseguir-ho.[812] Els porismes estableixen, a més, les proposicions amb concisió i sobreentenen multitud de qüestions a partir de la seva aparença. D'això en resulta que molts geòmetres només els copsen d'una manera parcial i ignoren les indicacions més indispensables que subministren. És rar que una sola proposició pugui incloure un grapat de porismes perquè Euclides no en proporciona gaires de cada gènere, només alguns a títol d'exemple a l'inici del primer llibre, i la majoria són semblants entre si perquè pertanyen al gènere dels llocs, força abundant. I, com que hem observat que és possible englobar-los tots en una única proposició, l'hem enunciat de la manera següent: «Considerem tres punts [dos en cas de paral·lelisme] donats per endavant,[813] situats en un mateix segment rectilini d'una figura convexa,[814] o no convexa.[815] Si els punts restants, excepte un, estan lligats a segments donats en po-

812. Com palesa Pappos (1932), volum II, nota 5, p. 486, la traducció d'aquesta definició és delicada. Vegeu també el text entre claudàtors que, segons indica Eecke, és una interpolació de Hultsh, p. 486-487, nota 5. Tanmateix, aquest text conté una definició que lliga els porismes amb els llocs: «El porisma és una proposició a la qual manca una hipòtesi respecte d'un teorema de lloc.»

813. És una interpolació posterior.

814. De fet, es tracta d'un quadrilàter. I el segment proporciona sis punts damunt els costats i les seves prolongacions, com veiem pel context de l'enunciat.

815. En grec, els quatre segments es descriuen com els costats *ὑπτίου ἤ παρυπτίου* (supí o hipersupí) i s'omet el *σχήμα*. Simson aclareix la diferència d'aquests dos termes, amb tres figures: *a*) fa referència a *ὕπτιον*, i *b*) i *c*)




Quadrilàters supins i hipersupins

sició,[816] el punt que queda també ho està a un segment donat en posició».[817]

La proposició que acabem d'exposar fa referència solament a quatre rectes, dues de les quals, com a màxim, passen per un mateix punt. Però molts ignoren que la proposició és igualment vàlida per a qualsevol quantitat de rectes que es proposi. S'enuncia així: «Considerem un cert nombre de segments rectilinis que es tallen entre si sense que mai no n'hi hagi més de dos que passin per un mateix punt. Si tots els punts que es troben en un dels segments estan donats [en posició] i la resta estan lligats a un segment donat en posició, o, més general encara, si un cert nombre de segments es tallen entre si sense que n'hi hagi més de dos que passin per un mateix punt, llavors tots els punts que es troben en un d'aquests segments són donats [en posició] i el nombre de punts restants és un nombre triangular[818] el costat del qual designa els punts que pertanyen a un segment donat en posició, sense que n'hi hagi tres que formin els vèrtexs d'una regió triangular,[819] i els punts que queden es troben necessàriament en un segment donat en posició».[820] No és gaire versemblant que l'autor dels *Elements* desconegués aquest resultat, però solament va voler presentar el principi de tots els seus porismes perquè el que diferencia els porismes no són les hipòtesis, sinó les divergències entre el que cerquen i el que troben.

Heus ací, doncs, la manera d'establir els gèneres del que es vol trobar, segons el llibre I:

---

a *παρύπτιον*. SIMSON (1776), p. 348. Si $A, B$ i $F$ són donats, i els llocs de $C$ i $D$ són segments rectilinis, aleshores el lloc de $E$ també ho és.

816. Un dels punts està lligat a un segment i l'altre a un altre.

817. CHASLES (1860), p. 16. Queda molt més entenedor si s'enuncia en els termes següents: «Considerem un sistema de quatre segments rectilinis que es tallen dos a dos. Si tres dels punts d'intersecció es troben en un segment rectilini donat i la resta menys un en segments donats en posició, aleshores el que queda també es troba damunt un segment donat en posició.»

818. Diu: *τρίγονος ἀριθμός*.

819. És a dir, en la intersecció de tres de les rectes considerades.

820. CHASLES (1860), p. 130-133, ofereix una demostració analítica d'aquest teorema general.

[I] Si de dos punts donats tirem dos segments que tallen un segment donat en posició, de manera que un intercepti, en una recta donada en posició, un segment a partir d'un punt fixat, llavors l'altre segment formarà també, damunt d'una altra recta,[821] un segment que tindrà amb el primer una raó donada.

A partir d'aquí (hom estableix també que):

[II] Tal punt i tal altre es troben en un segment donat en posició.

[III] La raó de tal segment i de tal altre és donada.

[IV] La raó d'un dels segments inicials i d'un dels que s'obtenen és donada.

[V] Tal segment és donat en posició.

[VI] Un segment inicial [o la prolongació] passa per un punt donat.

[VII] Tal segment té una raó donada amb el segment determinat per tal punt i un punt donat. [...][822]

En el llibre II, les hipòtesis són diferents però la majoria dels resultats són anàlegs als del llibre I. Aquests són els més notoris:

[XVI] Que tal superfície o tal superfície més una àrea donada[823] tenen una raó donada amb un segment.

[XVII] Que la raó d'una àrea determinada per uns tals segments i un segment és donada.

[XVIII] Que la raó de l'àrea determinada per la suma d'uns tals segments i la suma d'uns tals segments i un segment és donada. [...][824]

En el llibre III, moltes de les hipòtesis fan referència al semicercle, i algunes al cercle i als segments [circulars]. A més, [Apol·loni] afegeix:

[XXII] Que la raó entre l'àrea determinada per aquests segments i la determinada per aquests altres és donada. [...][825]

[XXIX] Que tal segment és de juxtaposició,[826] o comprèn un angle donat amb un segment que passa [pel segment en juxtaposició o per la seva prolongació] per un punt donat.

821. Usem l'expressió *recta* per tal de clarificar el text.
822. I així fins a quinze enunciats.
823. Podem suposar que les superfícies són rectangles.
824. I així fins a l'enunciat XXI.
825. I així fins a l'enunciat XXVIII.
826. Diu: *παραθέσει*, és a dir, paral·lel a un segment donat en posició.

Els tres llibres dels *Porismes* contenen trenta-vuit lemes i cent setanta-un teoremes.[827]

**D.2.1$\boldsymbol{a}_{4a}$** [Proposició 127][828] *Considerem la figura $ABCDEFG$. Suposem que el segment $AD$ és al $DC$ com el $AF$ al $FG$. Tirem la recta d'unió $HK$. Afirmo que els segments $HK$ i $AC$ són paral·lels.*[829] p. 122

[*Demostració.*] Pel punt $F$ tirem el segment $FL$ paral·lel al $BD$. [EI 31]

Aleshores, atès que $AD$ és a $DC$ com $AF$ a $FG$, [per hipòtesi] *invertendo*, *componendo* i *permutando*,
$CA$ és a $AG$ com $AD$ és a $AF$, [EV 16, EV 17, DV 5 i DV 13][830]
i, a causa del paral·lelisme dels segments $LF$ i $BD$,
com $BA$ és a $AL$. [EVI 2]

En conseqüència, els segments $LG$ i $BC$ són paral·lels. [EVI 2]

I, novament, a causa del paral·lelisme dels segments $LF$ i $BD$,
$EK$ és a $KF$ [com $EB$ a $BL$]. [EVI 2]

I, atès que els segments $LG$ i $BC$ són paral·lels,
$EH$ és a $HG$ com $EB$ a $BL$. [EVI 2]

Per tant, $EH$ és a $HG$ com $EK$ a $KF$. [EV 11]

---

827. PAPPOS (1932), llibre VII, § 3, edició francesa, volum II, p. 485-495, i CHASLES (1860), p. 14-21. A CHASLES (1860), p. 68-71, s'ofereix una descripció simbòlica d'aquests enunciats.

828. PAPPOS (1932), p. 669-671.

829. És el primer lema que fa referència al quadrilàter complet, suposant que la transversal és [un segment] paral·lel a un dels costats del quadrilàter. Els lemes segon, quart, cinquè, sisè i setè (proposicions 128, 130, 131, 132 i 133, respectivament) segueixen aquest lema. PAPPOS (1932), nota 3, p. 669-670.

L'enunciat és molt poc aclaridor i, fins i tot, aparentment imprecís. Analitzem-lo més detingudament.

De fet, tenim un segment $AC$ i, en aquest, els punts $F, G$ i $D$, de manera que $\frac{AD}{DC} = \frac{AF}{FG}$. Considerem un triangle $\triangle ABC$ i un punt $E$ de la prolongació de $BA$ arbitraris. Fem els segments $EF$ i $EG$ i els perllonguem fins que la prolongació de $EG$ talli $BC$ per $H$ i la prolongació de $EF$ $BD$ per $K$. El segment $HK$ és, en tots els casos, paral·lel al $AC$. El fet que la igualtat $\frac{AD}{DC} = \frac{AF}{FG}$ forci el paral·lelisme, amb independència de la resta d'elements, és el que fa que sigui interessant.

830. En símbols: $\frac{AD}{DC} = \frac{AF}{FG}$. D'on: $\frac{DC}{AD} = \frac{FG}{AF}$. I d'això en resulta que $\frac{AD+DC}{AD} = \frac{AF+FG}{AF}$. Per tant, $\frac{AC}{AG} = \frac{AD}{AF}$.

I els segments $HK$ i $AG$ són paral·lels.[831] [EVI 2] ♠

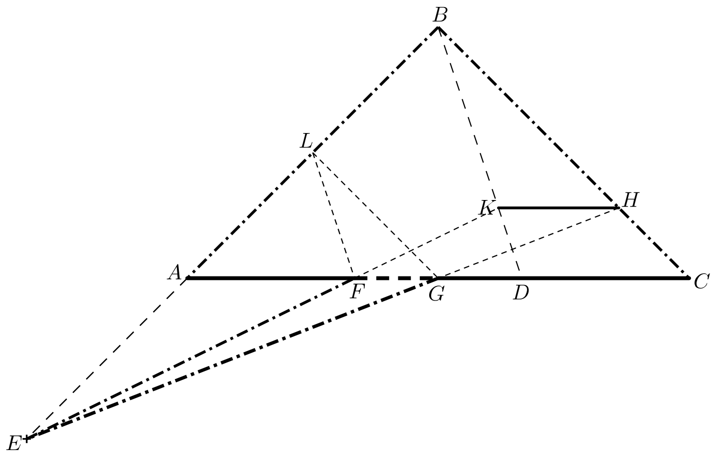



FIGURA D.16. Lema 1 dels *Porismes* d'Euclides

La resta es demostra usant la composició.

Atès que $AD$ és a $DC$ com $AF$ a $FG$,
*invertendo*, $CD$ és a $DA$ com $FG$ a $FA$. [DV 5 i DV 13]

Aleshores, *invertendo*, *componendo* i *convertendo*,
tenim que $AC$ és a $CG$ com $AD$ a $DF$.

[EV 16, EV 17, EV 18, DV 5 i DV 13][832]

Però la raó de $AD$ i $DF$ és la raó composta de les raons de $AB$ i $BE$, i de $EH$ i $HG$.[833]

Per tant, la raó composta de les raons que hi ha entre $AB$ i $BE$, i entre $EK$ i $KF$
és la mateixa que la composta de les raons de $AB$ i $BE$, i $EH$ i $HG$.

---

831. Pel paral·lelisme dels segments $LF$ i $BD$, $\frac{AC}{AG} = \frac{AD}{AF} = \frac{AB}{AL}$. D'això en resulta que els segments $LG$ i $BC$ són paral·lels. Per tant, $\frac{EK}{KF} = \frac{EH}{HG} = \frac{EB}{BL}$, cosa que implica que $KH$ i $AC$ també ho són [EVI 2, iterat].

832. Tenim $\frac{AD}{DC} = \frac{AF}{FG}$. Per tant, $\frac{DC}{AD} = \frac{FG}{AF}$. I, aleshores, $\frac{DC+AD}{AD} = \frac{FG+AF}{AF}$. O sigui que $\frac{AC}{AD} = \frac{AG}{AF}$ i, de retruc, $\frac{AC}{AG} = \frac{AD}{AF}$. Per tant, $\frac{AC}{AC-AG} = \frac{AD}{AD-AF}$, que és, com diu el text, $\frac{AC}{CG} = \frac{AD}{DF}$.

833. Si tenim en compte el paral·lelisme dels segments $BD$ i $LF$, resulta que $\frac{AD}{DF} = \frac{AB}{BL} \underset{\text{EVI 1}}{=} \frac{AB \times BE}{BE \times BL}$. I el dels segments $BH$ i $LG$ proporciona $\frac{BE}{BL} = \frac{EH}{HG}$. De tot això, en resulta el que estableix el text: $\frac{AD}{DF} = \frac{AB \times EH}{BE \times HG}$. Vegeu el § 3.2.13 (pàgines 99–101) i la nota 318 (pàgina 100).

Si eliminem, de l'una i de l'altra, la raó de $AB$ i $BE$,[834] resulta que la raó que hi ha entre $EK$ i $KF$ és la mateixa que hi ha entre $EH$ i $HG$.

Per tant, $HK$ és paral·lel a $AC$. [Evi 2] ♠[835]

**D.2.1**$\boldsymbol{a}_{4b}$ [Proposició 129][836] *Tallem transversalment els segments $AB, CA$ i $DA$ amb els segments $FE$ i $FD$.*[837] *Afirmo que el rectangle format pels segments $FB$ i $DC$ és al format pels segments $FD$ i $BC$ com el format pels segments $FE$ i $HG$ al format pels segments $FH$ i $GE$.*[838] p. 122

[*Demostració.*] Pel punt $F$ tirem el segment $KL$ paral·lel al segment $GCA$. [Ei 31]

Els segments $DA$ i $AB$ el tallen pels punts $K$ i $L$. [P 5][839]

---

834. D'altra banda, tenim que $\frac{AC}{CG} = \frac{AB}{BL} = \frac{AB\times BE}{BE\times BL}$. I, pel paral·lelisme dels segments $BK$ i $LF$, $\frac{EK}{KF} = \frac{BE}{BL}$. Per tant, $\frac{AC}{CG} = \frac{AB\times EK}{BE\times KF}$. I de la nota anterior en resulta, finalment, que $\frac{AB\times EK}{BE\times KF} = \frac{AB\times EH}{BE\times HG}$. I, de retruc, que $\frac{EK}{KF} = \frac{EH}{HG}$. Aquí s'usa que, si, en la raó composta de dues raons, una de les raons d'una és igual a una raó de l'altra, les altres dues també són iguals, cosa que no s'ha establert ni s'ha postulat mai abans. Vegeu la nota 318 (pàgina 100).

835. Pappos (1932), edició francesa, volum ii, p. 669-671. Fixem-nos que la demostració no depèn de la posició dels costats $BA$ i $BC$ del triangle $\triangle ABC$, ni tampoc de la situació del punt $E$ en la prolongació del costat $AB$. En canvi, ho fa de la posició relativa dels punts $C, F$ i $G$, ja que pot passar que $AC > AG$ i $AD > AF$ i això comporta que en lloc d'aplicar el *componendo* s'hagi d'aplicar el *dividendo*. Feu una figura que correspongui a aquesta possibilitat. Vegeu també l'exercici 19 (pàgina 124).

836. Pappos (1932), p. 672-675.

837. Com veurem en parlar dels postulats dels *Elements* d'Euclides, quan diguem «el segment $AB$ talla el segment $CD$» entendrem que el segment $AB$ talla el $CD$ per un punt de $CD$ o per una prolongació «finita» seva.

838. És aconsellable reescriure el text amb símbols, com hem fet en el text D.2.1$a_{4a}$ (pàgines 265-267). Com en el cas anterior, la figura varia, però ara depèn de quin sigui l'origen de les dues transversals. Vegeu l'ítem $a$ del problema 7 (pàgina 152).

839. O bé, per l'absurd, com a porisma d'Ei 30.

D'altra banda, pel punt $L$ tirem un segment $LM$ paral·lel al $DA$ [Ei 31]
que talla el segment $EF$ [o la seva prolongació] pel punt $M$. [P 5]

Aleshores, atès que el segment $EF$ és al $FL$
com el $EG$ al $GA$, [Evi 2][840]
i que el segment $FL$ és al $FM$
com el $AG$ al $GH$, [Evi 2][841]
llavors, per identitat, resulta que el segment $EF$ és al $FM$
com el $EG$ al $GH$.
[Ev 22 i Nc 1][842]

En conseqüència, tenim que
(∗) el rectangle format pels segments $FE$ i $HG$ equival al format pels segments $EG$ i $FM$. [Evi 17]

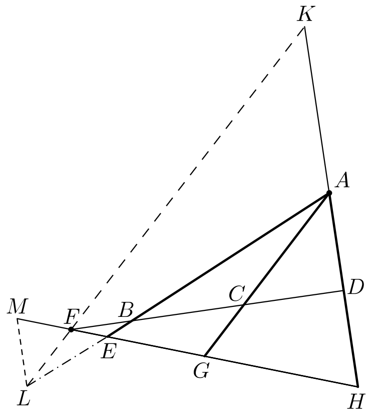


Figura D.17. Lema 3 dels *Porismes* d'Euclides

Considerem ara un altre rectangle format pels segments $EG$ i $FH$.

Resulta que el format pels segments $EG$ i $FM$
és al format pels segments $EG$ i $FH$ [Evi 1]
—és a dir, el segment $FM$ és al $FH$ o el $LF$ al segment $FK$—[843]
com el rectangle format pels segments $EF$ i $HG$ és al rectangle format pels segments $EG$ i $HF$. [Per (∗) i substitució]

Per les mateixes raons,
el rectangle format pels segments $FD$ i $BC$
és al format pels segments $FB$ i $CD$ com el segment $KF$ al $FL$.

*Invertendo*, el rectangle format pels segments $FB$ i $CD$ és al format pels segments $FD$ i $BC$ com el segment $LF$ al $FK$. [Dv 5 i Dv 13]

---

840. Usem els triangles $\triangle ELF$ i $\triangle EAG$.

841. Usem els triangles semblants $\triangle MLF$ i $\triangle HFK$.

842. Aquí Euclides usa la «composició» en el sentit de producte i empra Nc 1 en el cas: «Si dues raons són iguals a unes altres dues, la composta de les dues primeres és igual a la composta de les dues segones.» En concret: $\frac{EF}{FM} \underset{\text{Ev 22}}{=} \frac{EF}{FL} \times \frac{FL}{FM} = \frac{EG}{GA} \times \frac{GA}{GH} \underset{\text{Ev 22}}{=} \frac{EG}{GH}$.

843. Usem els triangles $\triangle FLM$ i $\triangle FKH$.

D'això en resulta que el rectangle format pels segments $EF$ i $HG$ és al format pels segments $EG$ i $HF$ com el segment $LF$ al $FK$.[844]

Per tant, el rectangle format pels segments $FB$ i $CD$ és al format pels segments $FD$ i $BC$
com el format pels segments $FE$ i $GH$ al format pels segments $EG$ i $HF$.[845]

Pel que fa a la resta, el procediment usa la «raó composta».[846]

La raó dels rectangles formats pels segments $FE$ i $GH$, i $FH$ i $EG$ es compon de les raons formades, pels segments $FE$ i $EG$, i $GH$ i $HF$, respectivament,
i el segment $FL$ és al $GA$ com el $FE$ al $EG$,
mentre que el segment $GA$ és al $FK$ com el $GH$ al $HF$.

De tot això es dedueix que
la raó dels rectangles formats per [les parelles de] segments $FE, GH$, i $FH, EG$
es compon de les raons que formen [les parelles de] segments $LF, GA$, i $GA, FK$.

Per tant, la raó que es compon de les raons dels segments $FL$ i $GA$, i $GA$ i $FK$ és igual a la raó dels segments $FL$ i $FK$.

Per tant, el segment $FL$ és al $FK$
com el rectangle format pels segments $EF$ i $HG$ al format pels segments $FH$ i $GE$.

Per les mateixes raons, el segment $FK$ és al $FL$
com el rectangle format pels segments $FD$ i $BC$ al format pels segments $FB$ i $CD$.

---

844. Vegeu l'ítem *a* del problema 7 (pàgina 152).

845. *a*) Usem $\frac{FK}{AC} \times \frac{AC}{FL} = \frac{FK \times AC}{FL \times AC} = \frac{FK}{FL}$ [on, com podem observar, apareix Evi 23, «Els rectangles equiangles són com la raó composta dels costats», i Ev 22]; *b*) usem les parelles de triangles semblants $\triangle FDK$, $\triangle CDA$ i $\triangle FBL, \triangle ABC$; *c*) componem raons i apliquem Evi 23, i *d*) apliquem la inversió. Usant aquests ítems, obtenim el resultat desitjat.

846. En síntesi, els paràgrafs següents expliciten que: $\frac{EF \times GH}{FH \times EG} = \frac{EF}{EG} \times \frac{GH}{FH}$. Usant el paral·lelisme de $AG$ i $FL$, i de $FK$ i $AG$, tenim, respectivament, que $\frac{FL}{AG} = \frac{EF}{EG}$ i que $\frac{AG}{FK} = \frac{GH}{FH}$. Componem raons i apliquem Evi 23. Resulta que $\frac{EF \times GH}{FH \times EG} = \frac{FL}{FK}$. De manera anàloga, $\frac{BF \times CD}{DF \times BC} = \frac{FL}{FK}$. Ara usem Ev 13 i acabem.

*Invertendo*, el segment $FL$ és al $FK$
com el rectangle format pels segments $FB$ i $CD$ al format pels segments $FD$ i $BC$. [Dv 5 i Dv 13]

I[, com hem vist, el segment $FL$ és al segment $FK$]
com el rectangle format pels segments $FE$ i $GH$ al format pels segments $FH$ i $GE$,
i el format pels segments $FB$ i $CD$ al format pels segments $FD$ i $BC$ [com el format pels segments $FE$ i $GH$ al format pels segments $FH$ i $GE$]. ♠

p. 122 **D.2.1*a*$_{4c}$** [Proposició 138][847] *Vist tot això, suposem que els segments $AB$ i $CD$ són paral·lels i estan units pels segments $AD, AG$, $BC$ i $BG$.*[848] *Tirem els segments $ED$ i $EC$.*[849] *Aleshores trobem que els punts $H, M$ i $K$ estan alineats.*[850]

[*Demostració.*][851] Atès que $\triangle\, DAG$ és un triangle,
que el segment $AE$ és paral·lel a $DG$
i que el segment $EC$ és un segment transversal que talla el $DG$ pel punt $C$,
llavors, pel lema precedent, el rectangle de costats $CE$ i $HF$ és al de costats $CH$ i $FE$ com el segment $DG$ al $GC$.

Anàlogament, atès que $\triangle\, CBG$ és un triangle,
els segments $BE$ i $CD$ són paral·lels,
i el segment $DE$ talla transversalment el $CGD$ pel punt $D$;
llavors el rectangle de costats $DE$ i $LK$ és al de costats $DK$ i $LE$ com el segment $CG$ al $GD$.

847. Pappos (1932), p. 685-687. És el lema 12.

848. Suposem que $AD$ i $BC$ es tallen per $M$.

849. On suposem que el punt $E$ pertany a l'interval $AB$, $ED$ i talla $BG$ pel punt $K$, i que $EC$ talla $AG$ pel punt $H$.

850. Chasles considera que és el teorema de l'hexàgon inscrit en dos segments rectilinis: tres vèrtexs en un segment i els altres tres en un altre [paral·lel al primer]. Aquest teorema d'Euclides anticipa, doncs, el teorema místic de Blaise Pascal, totalment projectiu.

851. Ometrem explicitar les afirmacions. Vegeu el problema 7 (pàgina 152).

Per això, *invertendo*, el rectangle de costats $DK$ i $LE$ és al de costats $DE$ i $LK$ com el segment $DG$ al $CG$. [Dv 5 i Dv 13]

Per tant, el rectangle de costats $CE$ i $HF$ és al de costats $DK$ i $LE$ com el segment $DG$ al $GC$.

En conseqüència, el rectangle de costats $DK$ i $LE$ és al de costats $DE$ i $KL$ com el de costats $CE$ i $HF$ al de costats $GH$ i $FE$.

[Proposició 136][852]

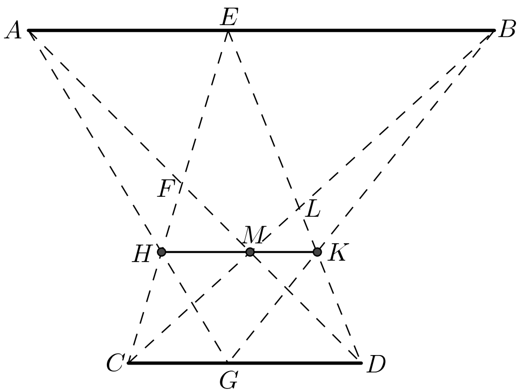



FIGURA D.18. Lema 12 dels *Porismes* d'Euclides

Per aquesta raó, atès que els segments $EC$ i $ED$ tallen transversalment els segments $CML$ i $DMF$,
i que el rectangle de costats $DK$ i $EL$ és al de costats $DE$ i $LK$ com el de costats $CE$ i $HF$ al de costats $CH$ i $FE$,
llavors el segment que passa pels punts $H, M$ i $K$ és un segment rectilini,
com hem vist abans. ♠

## D.2.1*b* Pappos ens apropa als *Llocs en superfícies* d'Euclides p. 122

**D.2.1$b_1$** Anomeno *teoremes de llocs* els que tracten d'una mateixa propietat en tot el lloc,
i, simplement, *lloc* la posició d'una línia o superfície que satisfà una mateixa propietat arreu.

Alguns teoremes de lloc es construeixen sobre línies i uns altres sobre superfícies.

A més, les línies poden ser planes
—es generen en un pla, com ara la recta—

852. Remet a la proposició 136. Vegeu l'exercici 23 (pàgina 125).

o sòlides —es generen a partir de la secció d'una figura sòlida,[853] com ara l'hèlix cilíndrica o les seccions còniques.[854]

En definitiva, els llocs, entesos com a línies, poden ser plans o sòlids.[855]

### D.2.1*c* El teorema d'Aristeu segons Pappos

p. 128 Pappos, en *Llocs en superfícies* d'Euclides, explicita i demostra el teorema d'Aristeu. Ho fa en els cinc lemes que oferim a continuació *in extenso*.

p. 128 **D.2.1*c*$_1$** Lema 1. [Proposició 234] *Considerem dos segments: $AB$* [*donat en posició*] *i $CD$ paral·lel a un altre també donat en posició.*

*Suposem que la raó que hi ha entre el rectangle de costats $AD$ i $DB$ i el quadrat de costat $CD$ també és donada.*

*Afirmo que*: *a) El punt $C$ es troba en una secció cònica.*
*b) Si el segment $AB$ no és donat en posició i els punts $A$ i $B$ tampoc però* [*la raó*] *es troba en els segments $AE$ i $BE$ donats en posició, aleshores el punt $C$ que hem descrit abans*[*, que és al pla determinat pels segments $AE$ i $EB$,*] *és una superfície donada en posició.*

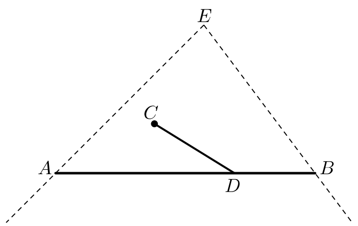


Figura D.19. Lema 1 dels *Llocs en superfícies* d'Euclides

I això ja ha estat establert.[856] ♠

853. Un cos tridimensional.

854. Aquest text és confirmat per Eutoci (vegeu la nota 14, pàgina 5) i per Pappos. Pappos (1932), llibre i, xxxiii i xxxvi, edició francesa, volum i, p. 197 i 206-207. Tanmateix, entre l'un i l'altre hi ha una diferència: per al primer, un lloc sòlid és una *superfície*; per al segon, una *línia en una superfície*. Thomas (1939), volum i, nota *a*, p. 492, i nota *a*, p 348.

855. Pappos (1932), edició anglesa, p. 310-311.

856. Pappos (1932), edició francesa, volum ii, p. 792-793. Pel que fa a l'ambigüitat d'aquest enunciat, podeu consultar Thomas (1939), volum i, nota *b*, p. 493. En concret, Zeuthen (1886), p. 423-430, afirma que Euclides va establir la validesa dels dos casos següents: (1) $AB$ és constant en magnitud i $AE$ i $EB$, en lloc de tallar-se, són paral·lels, i (2) $AE$ i $BE$ es tallen, i $AB$ es desplaça paral·lelament a si mateix i, per tant, varia en

**D.2.1*c*$_2$** Lema 2. [Proposició 235] *Tenim un punt $C$ i un segment $AB$ del mateix pla donats en posició.* p. 128

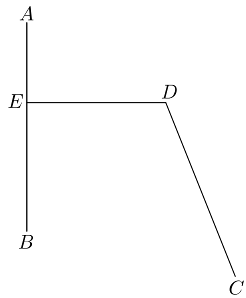



FIGURA D.20. Lema 2 dels *Llocs en superfícies* d'Euclides

[*Des d'un punt $D$,*] *Tirem el segment $DC$, i el segment $DE$ perpendicular al segment $AB$.*

*Afirmo que, si la raó entre $DC$ i $DE$ és fixa, el punt $D$ pertany a una cònica donada en posició.*[857]

Cal demostrar que una part de la línia constitueix el lloc.

I podem fer-ho tal com veiem en el lema següent.[858]

**D.2.1*c*$_3$** Lema 3. [Proposició 236] *Siguin $A$ i $B$ dos punts donats i, pel punt $C$, tirem la perpendicular $CD$* [*al segment $AB$*] *que satisfà la relació següent: el quadrat de $AD$ és als quadrats dels segments $CD$ i $DB$* [*junts*] *segons una raó donada. Afirmo que, tant si la raó és d'igual a igual, com si és de gran a petit o de petit a gran,*[859] *el punt $C$ pertany a una cònica.*

La raó que hi ha entre el quadrat de $AD$ i els quadrats de $BD$ i $DC$ junts és la del quadrat de costat $ED$ i el de costat $DB$.

En primer lloc, analitzem el cas en el qual la raó és d'igual a igual.

---

longitud. En el primer cas, el punt $C$, que es mou en un cos, pertany a una secció cònica, i, en el segon, a un con.

857. És la definició d'una cònica en termes de la propietat focus-directriu: $AB$ és la «directriu» i $C$ el «focus». I la raó que hi ha entre $CD$ i $DE$ és l'«excentricitat» de la cònica. Pappos demostra els tres casos reduint-los a la forma axial —vegeu el § 1.1.3 (pàgines 9-11). S'ha conjecturat que Euclides els va presentar sense la demostració perquè ja l'havia establert Aristeu. Com ja hem dit abans (ítem *b*, pàgina 6), Apol·loni no esmenta la propietat focus-directriu.

858. PAPPOS (1932), edició francesa, volum II, p. 793-794.

859. És a dir, la raó $\lambda$ és $\lambda \lesseqqgtr 1$. Ara, en la demostració d'aquesta proposició, suposa que $\lambda = 1$ i estableix que el lloc és una paràbola. En la següent, analitza els altres dos casos: si $\lambda < 1$, obté una el·lipse, i, si $\lambda > 1$, una hipèrbola.

Hom suposa que les demostracions són de Pappos i no pas d'Euclides o Aristeu.

[*Demostració.*]

*a*) [*Anàlisi.*] El quadrat de costat $AD$ equival als quadrats de costat $BD$ i $DC$ junts.

Per tant, els segments $ED$ i $DB$ són iguals.[860]

En conseqüència, el rectangle de costats $BA$ i $AE$ equival al quadrat de costat $CD$.[861]

Considerem el punt $F$ que biseca el segment $AB$ [EI 10] i, per tant, queda ben determinat.

Veurem que el segment $AE$ és el doble del $FD$.[862]

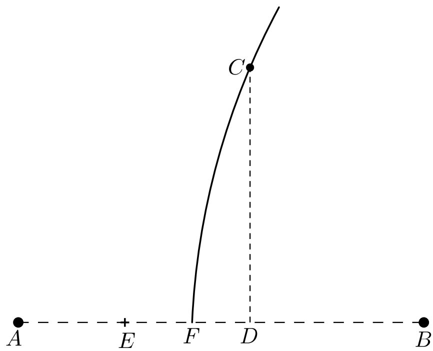


FIGURA D.21. Lema 3 dels *Llocs en superfícies* d'Euclides

En conseqüència, el rectangle de costats $BA$ i $AE$ equival al doble del rectangle de costats $BA$ i $FD$.[863]

Però el doble de $AB$ és un segment ben determinat.

En definitiva, el rectangle format per aquest segment ben determinat i per $FD$ equival al quadrat de costat $DC$.[864]

Per tant, el punt $C$ pertany a una paràbola que passa per $F$.

♠

*b*) [*Síntesi.*] La síntesi del lloc es fa així.

Considerem dos punts $A$ i $B$,

i la raó d'igual a igual.

Dimidiem $AB$ per $F$. [EI 10]

Anomenem $R$ el doble de $AB$. [EI 2 o EIV 15]

860. Per la hipòtesi i per DV 5, implica que $ED^2 = DB^2$. Per tant, $ED = DB$. PLA (2018), problema 52, $f_1$, p. 67.

861. Això és així ja que el rectangle de costats $BA$ i $AE$ i el quadrat de costat $ED$, junts, equivalen al quadrat de costat $AD$ [EII 6], o sigui, que el rectangle de costats $BA$ i $AE$ i el quadrat de costat $ED$, junts, equivalen als quadrats de costats $CD$ i $DB$, junts [per hipòtesi].

862. Atès que $AE$ és el residu de $AB$ sobre $EB$, que és el residu del doble de $BF$ sobre el doble de $BD$ [per construcció i per hipòtesi].

863. I, per tant, el darrer rectangle equival al quadrat de costat $CD$.

864. Hem fet una aplicació d'àrees exacta, és a dir, en paràbola.

Atès que el segment $FB$, amb l'extrem al punt $F$, és donat en posició,
i que $R$ ho és en magnitud,
llavors podem tirar una paràbola $\smile\!\!/\,HF$ d'eix el segment $FB$,
[AI, proposició 52][865]
de manera que, si hi considerem un punt $C$
i tirem la perpendicular $CD$ [pel punt $D$], [EI 11]
el rectangle de costats $R$ i $FD$ equival al quadrat de costat $DC$.

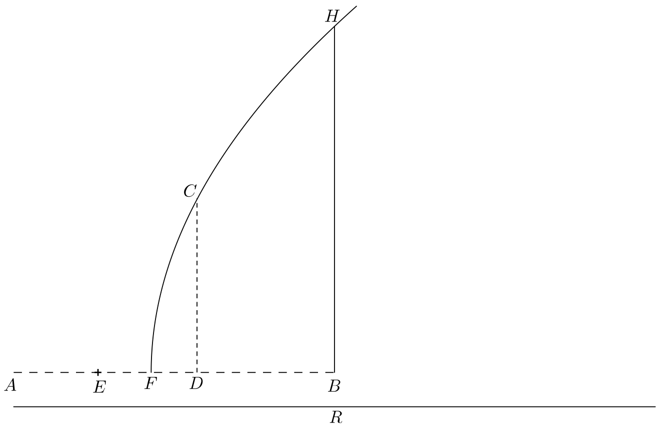



Figura D. 22. Síntesi del lema 3 dels *Llocs en superfícies* d'Euclides

Tirem el segment $BH$ perpendicular a $AB$.

Afirmo que l'arc $\overset{\frown}{CH}$ és un arc de la paràbola [que forma el lloc].

Pel punt $C$, tirem la perpendicular $CD$. [EI 11]

Prenem el segment $DE$ igual al $BD$. [EI 2 o EI 3]

Atès que el segment $AB$ és igual al doble del $BF$
i el $EB$ al doble del $BD$,
resulta que el residu $AE$[, que és el segment que obtenim quan traiem de $AB$ $EB$,] [EI 3]
és igual al doble del segment $FD$.[866]

865. Usarem A seguit del número del llibre per a referir-nos al corresponent volum de les *Còniques* d'Apol·loni.

866. En concret, $AE = AB - EB = 2\,BF - 2\,BD = 2\,(BF - BD) = 2\,FD$.

Per tant, el rectangle de costats $AB$ i $AE$ equival al de costats el doble de $AB$ i $FD$, [EVI 1]
i, de retruc, al quadrat de costat $DC$. [per construcció]

Al rectangle hi afegim el quadrat de costat $ED$,
i al de costat $DC$ el de costat $DB$.[867] [Nc 2]

Per tant, el quadrat de costat $AD$ equival als quadrats de costats $CD$ i $BD$ junts. [EII 6] ♠

En definitiva, la corba $\smile FCH$ és el lloc. ♠[868]

**D.2.1** $\boldsymbol{c_4}$ Lema 4 [Proposició 237] *De bell nou, siguin A i B dos punts donats i, pel punt C, tirem la perpendicular CD* [*al segment AB*] *que satisfà la relació següent: el quadrat de costat AD és als quadrats dels segments CD i DB* [*junts*] *segons una raó de:* a$_1$*)* [*segment*] *de gran a petit, en primer lloc, i* a$_2$*)* [*segment*] *de petit a gran, en segon lloc. Afirmo que el punt C pertany a una secció cònica que és una el·lipse en el primer cas i una hipèrbola en el segon.*[869]

[*Demostració.*]

[*Anàlisi.*] *a*) El quadrat de costat $AD$ és als quadrats dels segments $CD$ i $DB$ [junts]
com el quadrat de costat $ED$ és al de costat $DB$, essent $E$ un punt del segment $AB$.[870]

Aleshores:

$a_1$) En el primer cas, el segment $BD$ és més petit que el $DE$.

Fem $DF$ igual a $ED$. [EI 2 o EI 3]

Atès que la raó que hi ha entre el quadrat de costat $AD$ i els quadrats de costats $CD$ i $DB$ junts és donada,
i que és igual a la raó que hi ha entre els quadrats de costats $ED$ i $AB$,

867. En concret, $AB \times AE = 2\,AB \times FD = DC^2$. I, de retruc, $AB \times AE + DE^2 = DC^2 + BD^2$. Recordem PLA (2018), problema 52, $f_1$, p. 67.

868. PAPPOS (1932), p. 796.

869. El text grec conté forats i errors que van ser corregits per Commandino. THOMAS (1939), volum I, nota *a*, p. 499

870. Com que els quadrats dels segments $CD$ i $DB$ [junts] són més grans que el de costat $DB$, el quadrat de costat $AD$ és més gran que el de costat $CD$ [DV 5].

resulta que la raó que hi ha entre el rectangle de costats $FA$ i $AE$ i el quadrat de costat $AC$ també és donada.[871]

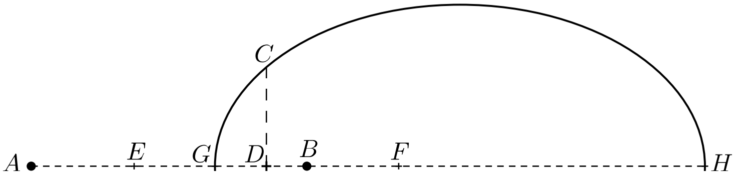



FIGURA D.23. Lema 4 dels *Llocs en superfícies* d'Euclides, primer cas

Però la raó dels segments $DE$ i $DB$ és donada.[872]

Per tant, la raó de $BF$ i $DB$ també ho és. [EV 7][873]

Determinem el punt $H$ [en la prolongació de $AB$] de manera que $AB$ és a $BH$ com $BF$ a $DB$. [EVI 12]

Per tant, la raó entre el segment $AB$ i el segment $BH$ queda determinada.[874]

Aleshores, la raó entre $AF$ i $DH$ és donada.[875]

Agafem el punt $G$ [del segment $AB$] de manera que $AG$ és a $BG$ com $ED$ a $DB$. [EVI 10]

Per tant, *componendo*, la raó entre $AB$ i $BG$ és donada. [EV 18]

I la raó de $AE$ i $GD$ també.[876]

---

871. Atès que $\frac{AD^2}{BD^2+DC^2} = \frac{ED^2}{BD^2}$, resulta que $\frac{AD^2-ED^2}{BD^2+DC^2-BD^2} = \frac{ED^2}{BD^2}$ i, per tant, $\frac{AD^2-ED^2}{BD^2+DC^2-BD^2}$ està ben determinat. El punt $D$ dimidia el segment $EF$. Hi ajuntem el segment $AE$ [EI 2]. Aleshores tenim que $FA \times AE = AD^2 - ED^2$ [EII 6]. Per tant, $\frac{FA \times AE}{DC^2}$ [EV 7].

872. La raó $\frac{AD^2}{CD^2+DB^2}$ és donada i és igual a $\frac{ED^2}{DB^2}$. Per tant, $\frac{ED^2}{DB^2}$ també és donada i, de retruc, $\frac{ED}{DB}$ també. Aquí usa que si una raó doble és donada, la simple i la definició 2 de *Dades* també ho són —un ús que reiterarem però que no esmentarem més.

873. En efecte, $a_1$, en el primer cas, $\frac{DF}{BF}$, i, de retruc, $\frac{DF}{DB}$ són donats, i $a_2$, en el segon cas, la raó entre $\frac{DF}{DB}$ o, *invertendo*, $\frac{DB}{DF}$, també. Per tant, $\frac{DB}{BF}$ o, *invertendo*, $\frac{BF}{BD}$ són donades [DV 5, DV 13 i definició 2 de *Dades*].

874. Vegeu l'última part de la nota 872.

875. En el primer cas, $\frac{AB+BF}{BH+DB}$. En el segon cas, $\frac{AB-BF}{BH-DB}$.

876. Per construcció, $\frac{AG}{BG} = \frac{ED}{BD}$ i, *componendo* [EV 18], $\frac{AG+BG}{BG} = \frac{ED+BD}{BD}$, o sigui, $\frac{AB}{BG} = \frac{EB}{BD}$. Per tant, *dividendo* i *alternando*, $\frac{AB-EB}{BG-DB} = \frac{AE}{GD}$ és donada [EV 17 i EV 16].

Però, com hem vist, la raó que hi ha entre $AF$ i $DH$ és coneguda.

Per tant, la raó que hi ha entre $AE \times AF$ i $GD \times DH$ també ho és. [raó composta][877]

I hem vist que la raó que hi ha entre el rectangle de costats $FA$ i $AE$ i el quadrat de costat $DC$ també és donada.

Ara bé, els punts $D, E$ i $F$ estan ben determinats. [per construcció]

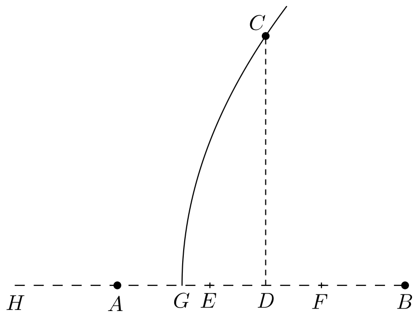



FIGURA D.24. Lema 4 dels *Llocs en superfícies* d'Euclides, segon cas

I, com que $AB$ és a $BH$ com $BF$ a $DB$, i $AG$ a $BG$ com $ED$ a $DB$, els punts $H$ i $G$ queden ben determinats. [Ev 10 i Ev 12]

En definitiva:

1) $a_1$, en el primer cas, $HG$ és el diàmetre d'una el·lipse.

2) $a_2$, en el segon cas, és el diàmetre d'una hipèrbola.

I, per tant, el punt $C$ pertany, en el primer cas, a una el·lipse i, en el segon cas, a una hipèrbola. ♠[878]

877. Aquí usem que, si dues raons són donades, la composta queda ben determinada. Aquest fet, tanmateix, no el trobem pas en *Dades*, si bé és natural si tenim en compte Evi 22.

878. La raó $\frac{ED^2}{DB^2}[> 1]$ és donada i, per tant, la raó $\frac{ED}{DB}$ també. Fem $DF = ED$. Per tant, la raó $\frac{DF}{DB}$ és donada [Ev 7]. En el primer cas, la raó $\frac{DF}{BF}$ també ho és [dada 5]. Per tant, la raó $\frac{FB}{DB}$ també ho és [dada 8]. En el segon cas, la raó $\frac{ED^2}{DB^2}[< 1]$, ja que $\frac{DF}{DB}$. Per tant, la raó $\frac{DB}{DF}$ també ho és [Dv 13]. Per tant, $\frac{DB}{BF}$ també [dada 5] i, de retruc, $\frac{FB}{DB}$ també [Ev 18 i Dv 13]. Aleshores, en el primer cas, $\frac{AB+BF}{BH+DB}$ o $\frac{AF}{DH}$ queda ben determinat i, en el segon cas, $\frac{AB-BF}{BH-DB}$ o $\frac{AF}{DH}$ també. Fem la raó $\frac{AG}{BG}$ igual a la $\frac{ED}{DB}$. Aleshores, la raó $\frac{AB}{DB}$ és donada [dada 6]. Per construcció, $\frac{AG}{BG} = \frac{ED}{DB}$, tenim que $\frac{AG+BG}{BG} = \frac{ED+DB}{DB}$ o $\frac{AB}{BG} = \frac{EB}{DB}$ [Ev 12]. Però, com hem vist, $\frac{ED}{DB}$ és donada. Per tant, $\frac{EB}{DB}$ [Ev 18], $\frac{AB}{DG}$ [Ev 11], i $\frac{AB-BE}{BH-DB}$ o $\frac{AE}{DH}$, també [Ev 17 i Ev 16]. Però hem vist que la raó $\frac{AF}{DH}$ és donada. Per tant, $\frac{AE\times AF}{GH\times DH}$ queda ben determinada [raó composta]. Aleshores, la raó composta $\frac{AE\times AF}{DC^2}$, també [nota 871, pàgina 277]. I, de retruc, la raó $\frac{GD\times DH}{DC^2}$ també [dada 8].

[*Síntesi.*] *b*) El lloc admet la síntesi següent:

Siguin $A$ i $B$ dos punts donats.

Suposem que la raó que hi ha entre els quadrats de costats els segments $PT$ i $TS$

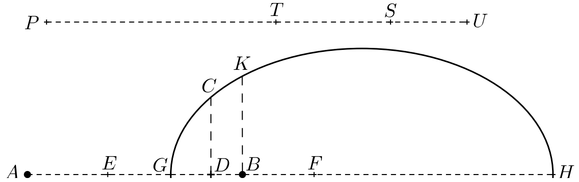



FIGURA D.25. Lema 4 dels *Llocs en superfícies* d'Euclides, síntesi del primer cas

és la d'una magnitud gran i una de petita, en el primer cas,
i entre una de petita i una de gran, en el segon.

Considerem el segment $TU$ igual al $PT$, [EI 2 o EI 3]
de manera que el segment $AB$ sigui al $BH$ com el $US$ al $ST$
i de manera que el segment $AG$ sigui al $GB$ com el $PT$ al $TS$.

Tirem l'el·lipse d'eix $GH$, en el primer cas,
i una hipèrbola, a l'entorn d'aquest eix, en el segon.

Ara, damunt de cadascuna, prenem el punt $C$
i tirem la perpendicular $CD$, [EI 12]
de manera que la raó entre el rectangle de costats $GD$ i $DH$ i el quadrat de costat $AC$
sigui igual a la raó composta de les que hi ha entre els segments $TS$ i $SU$, entre els $TS$ i $SP$, i la raó donada,
que és la dels quadrats dels segments $PT$ i $TS$.

Tirem la perpendicular $BK$. [EI 11]

L'arc $\overset{\frown}{GK}$ satisfà la condició[879] i la raó donada,
que és la dels quadrats dels segments $PT$ i $TS$.

---

Aquesta expressió constant caracteritza la cònica. Pel que fa a les dades, vegeu el problema 8 (pàgines 152-153) i els textos corresponents al § D.1.1$c_2$ (pàgina 243).

Per hipòtesi [i, per les dades 30 i 25], el punt $D$ queda determinat i els punts $E$ i $F$ hi queden per construcció. I, per construcció, $\frac{AB}{BH} = \frac{BF}{DB}$ està ben determinat. I, de retruc, $\frac{AG}{BG} = \frac{ED}{DB}$ també. Això fa que els punts $H$ i $G$ siguin punts ben determinats. En definitiva, en el primer cas, el punt $C$ pertany a una el·lipse d'eix gran $HG$, i, en el segon cas, a una hipèrbola de diàmetre transversal $HG$.

879. El text grec diu: *ποιεῖ τὸ ἐπίταγμα*, «realitza la (condició) imposada» de constituir el lloc del punt $C$.

En efecte. tirem la perpendicular $CD$ [a l'eix]. [EI 12]

Ho fem de manera que el segment $FB$ és al $BD$ com el $AB$ al $BH$,
que el segment $ED$ és al $DB$ com el segment $AG$ al $GB$,
i que el segment $AH$ és al $AF$ com el $HB$ al $BA$,
és a dir, com el segment $TS$ al $SU$.

De manera que el segment $GD$ és al $AE$ com el $TS$ al $SP$.[880]

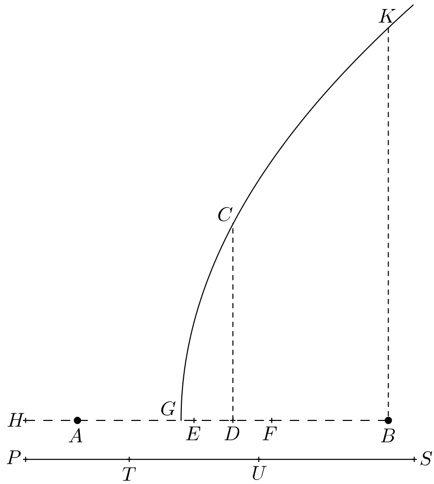


FIGURA D.26. Lema 4 dels *Llocs en superfícies* d'Euclides, síntesi del segon cas

Així doncs, la raó que hi ha entre el rectangle de costats $GD$ i $DH$ i el de costats $FA$ i $AE$
es compon de la de $TS$ i $SU$ i de la de $TS$ i $SP$.

Aleshores, tenim que la raó que hi ha entre el rectangle de costats $GD$ i $DH$ i el quadrat de costat $DC$
és la raó que es compon de les raons que hi ha entre $TS$ i $SU$, i $TS$ i $SP$, i de la raó donada.

I, també, tenim que la raó que hi ha entre el rectangle de costats $GD$ i $DH$ i el quadrat de costat $DC$ és igual a la raó que es compon de les que hi ha entre $TS$ i $SU$, entre $TS$ i $SP$, i la donada,
que la donada és la del quadrat de costat $PT$ i el de costat $TS$,
i que la del rectangle de costats $GD$ i $DH$ i el quadrat de costat $DC$ és la composta de les raons que hi ha entre el rectangle de costats $FA$ i $AE$ i el de costats $FA$ i $AE$,
i entre el rectangle de costats $FA$ i $AE$ i el quadrat de costat $DC$,
i, finalment, que la raó que hi ha entre entre el rectangle de costats $GD$ i $DH$ i el de costats $FA$ i $AE$
és la raó composta de les que hi ha entre $TS$ i $SU$ i entre $TS$ i $SP$.

880. Això ho hem vist a l'anàlisi.

D'això en resulta que el rectangle de costats $FA$ i $AE$ és al quadrat de costat $DC$ com el quadrat de la recta $PT$ al de costat $TS$,
és a dir, com el quadrat de costat $ED$ al de costat $DB$,
i tots amb tots.[881]

En definitiva, el quadrat del segment $PT$ és al de costat $TS$
—que és la raó donada—
com el quadrat de costat $AD$ als quadrats de costats $CD$ i $DB$, junts,
de manera que la línia $\overset{\frown}{GK}$
—que és un arc de la secció—
forma el lloc.[882] ♠

**D.2.1*c*$_5$** Lema 5 [Proposició 238] Un cop hem establert tot això, podem retornar a la proposició inicial.[883] *Sigui $AB$ un segment donat en posició. Considerem un punt $C$ del mateix pla. Tirem el segment $DC$ i*[*, pel punt $D$,*] *la perpendicular $DE$, de manera que la raó* [*donada*] *sigui la dels segments $CD$ i $DE$. Afirmo que el punt $D$ pertany a* a*) una secció cònica, que és una paràbola quan la raó és entre dues magnituds iguals;* b*) una el·lipse, quan és d'una magnitud més petita a una de més gran, i* c*) una hipèrbola, quan és d'una magnitud més gran a una de més petita.*[884]

[*Demostració.*] *a*)

$a_1$) [*Anàlisi.*] En efecte, suposem, d'entrada, que la raó és d'igual a igual, és a dir, que els segments $CD$ i $DE$ són iguals.

Veiem que el punt $D$ pertany a una paràbola.

Pel punt $C$, tirem la perpendicular $CF$ al segment $AB$. [Ei 11][885]

---

881. Diu: *καὶ πάντα πρὸς πάντα*, és a dir, «tots els antecedents a tots els consegüents».

882. Pappos (1932), edició francesa, p. 796-800.

Atesa la complexitat del text, n'exposem una lectura més simbolitzada en el problema 9 (pàgina 153).

883. Pappos (1932), edició francesa, p. 792-793.

884. Heus aquí una propietat notable de caracterització de les còniques i una de les més rellevants de l'extensa obra de Pappos.

885. Aquest segment queda ben determinat [dada 30].

Pel punt $D$, tirem el segment $DH$ paral·lel a $AB$. [EI 31]

Atès que els quadrats de costat $ED$ i $DC$ són iguals,
que els segments $ED$ i $FH$ també ho són

i que el quadrat de costat $CD$ equival als quadrats de costats $DH$ i $HC$ junts, [EI 47]
resulta que el quadrat de costat $FH$ equival als quadrats de costats $DH$ i $HC$ junts. [Nc 1]

Ara bé, el segment $FC$ és donat en posició,
i els punts $F$ i $C$ també.

Per tant, el punt $D$ pertany a una paràbola. [lema 3]
I això és el que volíem demostrar.

♠[886]

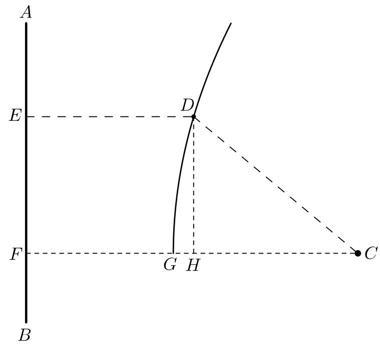


FIGURA D.27. Lema 5 dels *Llocs en superfícies* d'Euclides

$a_2$) [*Síntesi.*] Siguin $AB$ i $C$ el segment i el punt donats en posició.

Tirem la perpendicular $CF$. [EI 11]

Atès que el segment $CF$ i, de retruc, els punts $C$ i $F$, estan donats en posició,
trobem la paràbola ◡ $DG$ següent:

Si prenem un dels seus punts, per exemple $D$,
i tirem la perpendicular $DH$, [EI 10]
llavors el quadrat del segment $FH$ equival als quadrats de costats $DH$ i $HC$, junts.

Afirmo que la corba $\overset{\frown}{DG}$ constitueix un lloc,
és a dir, que, si tirem el segment $DC$ [P 1]
i la perpendicular $DE$, [EI 11]
els segments $CD$ i $DE$ són iguals.

886. La raó $\frac{DC}{DE} = 1$, és a dir, $DC = DE$ [Dv 5]. Per tant, $DC^2 = DE^2 = FH^2$ [ítem $f_1$ del problema 52, PLA (2018), p. 67]. Aleshores, $DC^2 = DH^2 + HC^2$ i, de retruc, EI 47 i Nc 2. Així doncs, el segment $CF$ és donat en posició i, per tant, els punts $C$ i $F$ també. Pel lema 3, el punt $D$ pertany a una paràbola.

Tirem la perpendicular $DH$. [EI 11]

Aleshores, com que es tracta d'una paràbola,
el quadrat del segment $FH$ equival als quadrats de costats $DH$ i $HC$, junts.

Però els segments $ED$ i $FH$ són iguals,
i el quadrat del segment $DC$ equival als quadrats de costats $DH$ i $HC$. [EI 47]

Per tant, els quadrats de costat $DC$ i $DE$ són iguals. [Nc 1]

En conseqüència, els segments $CD$ i $DE$ també ho són.

I, en definitiva, la corba $\overset{\frown}{DG}$ també. ♠[887] ♠

## D.2.1*d* Les còniques abans d'Apol·loni

En referir-se als vuit llibres de *Còniques* d'Apol·loni, Pappos ofereix una certa informació sobre l'estat de l'estudi d'aquests llocs abans de l'obra magna i definitiva d'aquest prohom del segle III aC. p. 129

I Euclides, a més dels textos dels *Llocs en superfícies*, en fa un esment en la introducció de *Fenòmens*.

**D.2.1$d_1$** Apol·loni ens ha transmès vuit llibres sobre còniques, que completen els quatre d'Euclides.

Aristeu, autor dels cinc llibres sobre «llocs sòlids», quan tracta les còniques, les distingeix i anomena [com ho havien fet tots els que l'havien precedit][888]
segons que la secció es realitzi en un con recte acutangle, rectangle o obtusangle.[889]

---

887. A partir d'aquí, hi ha una llacuna en tots els manuscrits que ens han arribat. Hom suposa que contenia la síntesi de l'el·lipse i la hipèrbola. Commandino n'ha refet el text que, segons conjectura, és el que hi havia. Vegeu Pappos (1932), edició francesa, nota 1, p. 802-803.

888. Segons Hultsch és una frase afegida. Pappos (1932), edició francesa, volum II, p. 503, nota 3.

889. Hom creu que els «cons rectes» són els únics que van considerar Aristeu i Euclides.

Aquesta especificació de les còniques és la que trobem en les obres d'Arquimedes, anteriors a les d'Apol·loni. Vegeu Arquimedes (2016), edició francesa d'Eecke, volum I, *Introducció*, p. XXXV i p. 137-140.

Però, com que aquestes tres corbes sorgeixen dels tres cons quan es tallen de manera diferent,[890]
sembla que Apol·loni es va preocupar d'esbrinar per què els seus predecessors les havien anomenat, de manera atzarosa, *secció del con acutangle*, *secció del con rectangle* i *secció del con obtusangle*.[891]

La secció del con acutangle és una secció que també es pot aconseguir amb un con rectangle i un d'obtusangle,
la secció del con rectangle és una secció que també es pot aconseguir amb un con acutangle i un d'obtusangle
i la secció del con obtusangle és una secció que també es pot aconseguir amb un con acutangle i un de rectangle.[892]

I, després d'haver modificat els noms,
anomena *el·lipse* la secció del con acutangle,
*paràbola* la del con rectangle
i *hipèrbola* la del con obtusangle.

I denomina així cadascuna d'aquestes seccions segons una propietat particular.

En efecte, en la secció del con acutangle, hi ha una certa àrea que s'aplica a un cert segment[893] deficient[894] d'un tetràgon;[895]
en la del con obtusangle, l'àrea excedeix[896] un tetràgon,

A *Grècia IIIc*, veurem amb detall com introdueix les còniques i completarem aquest text. Hi trobarem C.1$b_2$ (pàgina 208).

890. Aquesta frase ens sembla curiosa perquè entenem que tant Aristeu com Euclides tallaven el con amb un pla perpendicular a l'aresta i, per tant, la secció cònica quedava ben determinada. Alguns autors indiquen aquest fet en una frase afegida. Vegeu Pappos (1932), edició francesa, volum II, nota 4, p. 505.

891. Aquests són els noms que donaven a les còniques abans que tinguessin els que han perdurat.

892. En parlar de l'obra d'Apol·loni, aclarirem el significat d'aquestes expressions.

893. És el que coneixem com el «paràmetre» de la cònica.

894. *ελλεῖπον γίνεται*, que dona el nom de *ἔλλειψις*.

895. Usa l'expressió *τετράγωνος* que, en els *Elements*, designa el quadrat per a referir-se a un rectangle.

896. *ὑπερβάλλει*, que dona *ὑπερβολή*.

i, en el cas del con rectangle, l'àrea no és ni deficient ni excedent.[897]

En la introducció del llibre I, Apol·loni ofereix un resum del contingut dels vuit llibres que havia escrit sobre les seccions còniques:[898]

«El primer llibre fa referència a la generació de les tres seccions i les [seccions] oposades,[899]
i a les seves propietats principals,
exposades, però, d'una manera més general que la usada pels qui m'han precedit.

El segon llibre concerneix les propietats del diàmetre i dels eixos de les seccions[, les seccions oposades], les asímptotes,
i altres qüestions d'ús general necessàries per a les determinacions.

El tercer llibre conté molts teoremes curiosos i útils per a la construcció dels llocs sòlids[900] i per a les determinacions.

Molts d'aquests magnífics teoremes són nous.

És en relació amb aquests teoremes que faig notar que, en Euclides,[901]
el lloc de les tres o les quatre rectes no està gaire construït,
només ho està d'una manera accidental i no gaire afortunada
perquè no és possible fer-la d'una manera completa sense les meves descobertes complementàries.

El quart llibre analitza de quantes maneres es poden tallar les seccions còniques entre si i amb la circumferència.

Conté, a més, una qüestió que no havia estat tractada pels meus antecessors.

Saber per quants punts una secció cònica talla una circumferència, i per quants les seccions oposades tallen les seccions oposades.[902]

---

897. *παραβαλλόμενον*, que dona *παραβολή*.

898. Aquesta introducció es reprodueix en el text A.5.1*a* de *Grècia III c*.

899. *καὶ τῶν ʼντικειμένων*, en referència a les branques oposades de la hipèrbola.

900. *τῶν στερεῶν τόπων*.

901. En clara referència a *Còniques* —també conegut com a *Llocs sòlids*— d'Euclides, un llibre perdut com el d'Aristeu, que l'havia precedit.

902. Aquí Pappos no reprodueix exactament el text d'Apol·loni en el qual es demana, com sembla natural, per quants punts una circumferència talla una cònica o una secció oposada.

Els altres llibres són molt més rics.

Hi ha, d'una banda i d'una manera ben desenvolupada, qüestions consagrades als màxims i als mínims.[903]

D'una altra, les qüestions que fan referència a les seccions de con iguals i semblants,
i que condueixen als teoremes concernents a les determinacions.

I, a l'últim, tot el que fa referència als problemes de determinació de còniques.»

Fins aquí el que explica Apol·loni.

Ara bé, el lloc de les tres o les quatre rectes que, com diu en el tercer llibre, no havia estat tractat totalment per Euclides,
no l'hauria pogut resoldre ni ell ni cap altre amb els coneixements sobres les còniques que es tenia abans de l'època d'Euclides.

Això ho deixa ben clar el mateix Apol·loni, quan diu que era del tot impossible resoldre'l completament sense tenir com a requisits previs els resultats que s'havia vist obligat a demostrar personalment.[904]

Euclides considerava Aristeu digne d'elogi per les seves contribucions a l'estudi de les còniques
i no va intentar ni sobrepassar-lo ni refer-ne l'obra.

I, com ha de ser, l'imaginava afable amb tots els que són capaços d'enriquir la matemàtica,
mai ofensiu, sempre correcte i desproveït de vanitat.

Euclides ha escrit tot el que ha pogut sobre les *Còniques* d'Aristeu, sense pretendre haver arribat al final de la demostració.

Si ho hagués fet, l'hauríem hagut de censurar.

Però ara, tal com estan les coses, ja no ho podem fer,
perquè el mateix Apol·loni, que ha deixat moltes qüestions incompletes sobre les còniques,
no ha hagut mai de donar explicacions.

Ha pogut afegir noves qüestions sobre aquest lloc,

903. És a dir, quins són els segments més curts i més llargs que podem tirar d'un punt a una secció cònica.

904. És a dir, com a «elements».

perquè les aportacions que havia fet Euclides li van colpir la imaginació
i perquè va dedicar força temps als deixebles d'aquest que eren a Alexandria,
dels quals va adquirir una disposició d'esperit no desproveïda d'experiència.[905]

Vegem ara en què consisteix aquest lloc de les tres i les quatre rectes,
la teoria del qual Apol·loni està tan orgullós d'haver eixamplat,
tot i reconèixer el deute que té amb l'autor original.

Des d'un cert punt tirem segments, segons angles donats, a tres segments rectilinis donats en posició [o a les seves prolongacions],[906]
de manera que la raó que hi ha entre el rectangle de dos dels segments i el quadrat de l'altre és una raó donada.

Aleshores, afirmo que el punt pertany a un lloc sòlid donat en posició,
és a dir, a una de les tres còniques.

Però si, des del punt, tirem els segments segons angles donats, a quatre segments donats [o a les seves prolongacions],
de manera que la raó del rectangle de dos d'aquests amb la dels altres dos és donada,
llavors el punt també pertany a una secció del con donada en posició.[907]

Ara bé, si tirem els segments segons angles donats, a més de quatre rectes, el lloc és desconegut
i l'anomenem simplement *línia*,
perquè no hem fet la síntesi de cap d'aquestes línies,
ni tan sols de la primera que, un cop establert que és útil,
sembla la més notable de totes.[908]

---

905. Tot aquest paràgraf és considerat un afegitó d'un escoliasta força coneixedor de la història de la matemàtica.

906. «A tres línies rectes».

907. És conegut que, si pel punt tirem segments a només dos segments [o les seves prolongacions], el lloc és un segment. Vegeu el problema 10 (pàgina 153).

908. Pappos (1932), edició francesa, volum II, p. 503-508.

**D.2.1*d*₂** Si tallem un con o un cilindre per un pla no paral·lel a la base, la secció que en resulta és una secció d'un con acutangle que és, de fet, una el·lipse.[909]

## D.3 Presentació succinta de les obres d'òptica

p. 131 ### D.3.1 L'*Òptica* (*Ὀπτικά*)

#### D.3.1*a* El mecanisme de la visió

El mecanisme de la visió com una fusió (*συναύγεια*) de dues radiacions és el que exposa Plató en el *Timeu*.

**D.3.1*a*₁** Els primers òrgans que [els déus] van construir van ser els ulls «portadors de llum». Els van fixar per les raons següents. Van disposar que es produís un cos fet d'un foc que no tenia el poder de cremar, només aportava la claror suau de cada dia. Aleshores, van fer que el foc puríssim que hi ha en nosaltres, germà de l'altre foc, fluís a través dels ulls. Van afaiçonar l'ull espès, en particular a la part central, llis i compacte, per tal que impedís el pas de qualsevol material d'una certa densitat i solament pogués travessar-lo aquell foc pur. Així, quan la llum del dia envolta el flux visual, s'esdevé que el semblant es troba amb el semblant i, combinant-se, es constitueix, per afinitat, un cos únic en la «línia directriu» dels ulls, ja que, sigui on sigui l'indret en el qual incideixi el flux que ve de dins, es troba amb el que prové dels objectes externs. Arreu es forma un conjunt que presenta propietats semblants a causa de la similitud. Quan toca una cosa o és tocat per la cosa, transmet els moviments que provoca per tot el cos fins a l'ànima i produeix la sensació que ens fa dir que veiem quelcom.[910]

---

909. Euclides (2000*c*), p. 267; Thomas (1939), volum I, p. 491.
910. Plató (2000), 45 b 2-d4 8, edició catalana, p. 92. Els èmfasis són nostres.

### D.3.1*b* Les definicions postulat i algunes proposicions

Les definicions postulat de l'*Òptica* (*Ὀπτικά*), un parell o tres de proposicions i, en particular, la proposició vuitena. p. 131-132

**D.3.1$b_1$ Definicions[-postulats-lemes]** (*Ὅροι*) p. 131

1. Els segments que ixen de l'ull es propaguen [en divergència] en un espai de grans magnituds.[911]
2. La figura que determinen els raigs visuals és un con que té el vèrtex a l'ull i la base als extrems de l'objecte que observem.[912]
3. Els objectes en els quals incideixen els raigs els podem veure, però no veiem aquells en els quals no ho fan.
4. Els objectes que veiem des d'un angle més gran semblen més grans, els que veiem des d'un angle més petit, més petits, i els que veiem des d'angles iguals, iguals.
5. Els objectes que veiem des d'angles més elevats ens semblen més elevats, i els que veiem des d'angles més baixos, més baixos.
6. De manera semblant, veiem més a la dreta [o a l'esquerra] els objectes que observem des d'angles més a la dreta [o a l'esquerra].
7. Els objectes que observem des d'un nombre més gran d'angles els veiem amb més claredat.[913]

### D.3.1$b_2$ Algunes proposicions

**D.3.1$b_{2a}$** Proposició 1. *Cap dels objectes que veiem el veiem del tot alhora.* p. 131

---

911. L'expressió *μεγεθῶν μεγάλων* ('grans magnituds') no fa referència a l'*indefinit*.

912. Aquestes dues primeres definicions postulat les podem sintetitzar amb les paraules següents: «En la concepció euclidiana, els raigs visuals tenen l'ull com a font i es propaguen segons segments rectilinis que divergeixen a fi de cobrir, dins d'un cert angle, la magnitud que s'observa.» Euclides (2000*a*), edició francesa, p. 1, nota 2. Cal, però, entendre que els raigs es propaguen fent una certa «divergència» entre si i, per tant, deixant certes regions sense observar. Entenem que aquesta apreciació és necessària per a comprendre, per exemple, la demostració de la proposició 1.

913. Euclides (2000*a*), edició castellana, p. 135-136.

[*Demostració.*] Siguin $AD$ l'objecte que veiem i $B$ l'ull a partir del qual incideixen els raigs visuals $BA, BP, BK$ i $BD$.

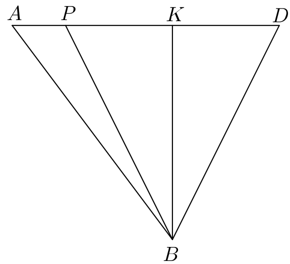



FIGURA D.28. Proposició 1 de l'*Òptica* d'Euclides

Així, atès que els raigs visuals incidents han estat prolongats al llarg d'un espai, no incidiran contínuament sobre $AD$.

De manera que, a $AD$, es produiran espais damunt els quals no incidiran raigs visuals. [definició 1]

Per tant, $AD$ no el veiem sencer al mateix temps.

Però sembla que el veiem tot alhora gràcies al fet que *els raigs visuals es traslladen amb rapidesa.*[914]

p. 132 **D.3.1*b*$_{2b}$** Proposició 8. *Les magnituds iguals i paral·leles situades a distàncies diferents de l'ull no es veuen proporcionalment a les distàncies.*[915]

[*Demostració.*] Siguin $AB$ i $CD$ dues magnituds [iguals] situades a distàncies diferents de l'ull $E$.

Afirmo que no es dona, com podria semblar,[916] que $BE$ és a $ED$ com $CD$ a $AB$.

914. EUCLIDES (2000*a*), edició castellana, p. 136. L'èmfasi és nostre. És una demostració una mica difícil d'entendre. És curiós observar que, encara que admet que els raigs es traslladen, no s'adona que els punts «més allunyats» de l'ull es veuen més tard que no pas els «més propers». Per EI 47, sap que els segments $BP$ són «més llargs» com més allunyats es troben del peu de la perpendicular $K$ que va del punt $B$ al segment $AD$.

Val la pena observar que, d'acord amb la darrera expressió, la visió no és instantània.

915. Aquesta proposició estableix geomètricament la desigualtat trigonomètrica següent: «Si $\alpha < \beta < \frac{1}{2}\pi$, aleshores $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$». La retrobem en l'obra d'Aristarc. Vegeu la nota 1001 (pàgina 318) i l'exercici al qual remet, i també l'*Arenari* d'Arquimedes, com veurem a PLA (2020).

A HEATH (1921), volum I, p. 442, la desigualtat està equivocada, però a HEATH (1913), 366, és correcta.

916. És curiosa aquesta afirmació, tan allunyada de la veritat d'una manera tan categòrica. L'hem d'entendre com una frase emfàtica o didàc-

En efecte, considerem els raigs incidents $AE$ i $EC$.[917] [P 1]

Amb centre al punt $E$ i radi $EG$,
tirem un arc de circumferència $HGF$. [P 3]

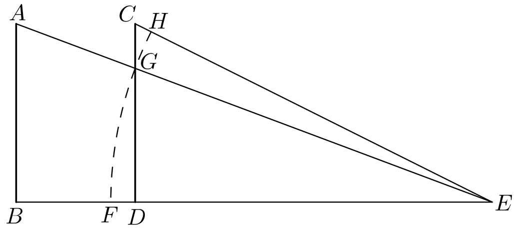



FIGURA D.29. Proposició 8 de l'*Òptica* d'Euclides

Aleshores, atès que el triangle $\triangle EGC$ és més gran que el sector $\lhd EGH$,
i que el triangle $\triangle EGD$ és més petit que el sector $\lhd EGF$,[918]
resulta que la raó entre el triangle $\triangle EGC$ i el sector $\lhd EGH$ és més gran que la del triangle $\triangle EGD$ i el sector $\lhd EGF$. [Dv 7]

*Permutando*, la raó entre el triangle $\triangle EGC$ i el $\triangle EGD$ és més gran que la del sector $\lhd EGH$ i el sector $\lhd EGF$.[919]

I, per la composició aplicada a cada raó,[920]
la raó entre els triangles $\triangle ECD$ i $\triangle EGD$ és més gran que la raó que hi ha entre els sectors $\lhd EHF$ i $\lhd EGF$.

Ara bé, el segment [rectilini] $DC$ és al segment [rectilini] $DG$
com el triangle $\triangle EDC$ al $\triangle EGD$. [Evi 1]

Però els segments [rectilinis] $CD$ i $AB$ són iguals,
i $AB$ és a $GD$ com $BE$ a $ED$. [Evi 2].

Per tant, la raó entre $BE$ i $ED$ és més gran que la del sector $\lhd EHF$ i el $\lhd EGF$. [Ev 11 i substitució]

Però[, en un cercle,] un sector és a un sector com l'angle a l'angle.[921]

---

tica. Ens sembla que aquest text és molt adequat per a l'aprenentatge de la lectura dels textos clàssics, tant pel contingut com pels procediments.

917. Suposem que $EB$ és més gran que $ED$. Tirem la perpendicular $CD$ de $C$ a $EB$ [Ei 12]. La perpendicular talla $EA$ pel punt $G$ [P 5]. En aquest cas, cal que l'angle $\widehat{AEB}$ sigui més petit que un angle recte.

918. Aquí s'aplica el fet que una figura està inclosa dins d'una altra.

919. En la desigualtat de raons, usa una propietat que solament s'ha establert en el cas de la igualtat: la permutació [Ev 16].

920. Vegeu la nota anterior però ara amb referència a [Ev 17].

921. Evi 28 i Evi 29 estableixen que, en un mateix cercle, els arcs i els angles [centrals] són iguals. Però enlloc fa referència a la proporcionalitat dels sectors amb els angles.

Per tant, el sector $\triangleleft EHF$ és al sector $\triangleleft EGF$ com l'angle $\widehat{HEF}$ a l'angle $\widehat{GEF}$.

En definitiva, la raó entre els [segments rectilinis] $BE$ i $ED$ és més gran que la raó entre els angles $\widehat{HEF}$ i $\widehat{GEF}$.

I $CD$ es veu des de l'angle corresponent $\widehat{HEF}$,
mentre que $AB$ es veu des del corresponent $\widehat{GEF}$.

Així doncs, no veiem magnituds iguals en proporció a les distàncies.

♠

p. 132 **D.3.1*b*$_{2c}$** Proposició 22. *Si col·loquem un arc de circumferència d'un cercle al pla de l'ull, el veiem com un segment rectilini.*

[*Demostració*.][922] Siguin $\overset{\frown}{BC}$ l'arc de circumferència d'un cercle i $D$ l'ull.

Suposem que l'ull a partir del qual incideixen els raigs visuals $DB, DG$ i $DC$ es troba al mateix pla que l'arc de circumferència $\overset{\frown}{BC}$.

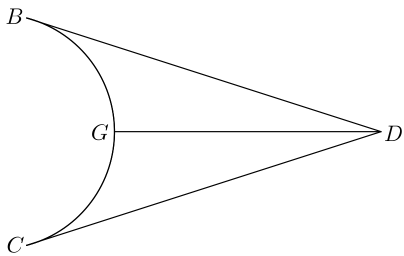



Figura D.30. Proposició 22 de l'*Òptica* d'Euclides

Aleshores, atès que cap dels objectes vistos el veiem del tot al mateix temps, [proposició 1] $\overset{\frown}{BG}$ és un segment rectilini, i $\overset{\frown}{GC}$ també.[923]

Per consegüent, tot l'arc de circumferència semblarà un segment rectilini. ♠

p. 132 **D.3.1*b*$_{2d}$** Proposició 24. *Quan apropem l'ull a l'esfera, el que veiem es veu més petit però sembla més gran.*

Considerem una esfera de centre $A$.

Sigui $B$ l'ull.

Tirem el segment $AB$ [P 1]
i un cercle de diàmetre $AB$.[924] [P 3]

922. Aquesta demostració és la tercera de les proposicions que ofereix Euclides.

923. Els veiem com si fossin segments rectilinis.

924. A l'espai, no està determinat. En considerem un de concret que determina un pla. Treballem en aquest pla.

$BG$ és un segment rectilini i $GC$ també.

Sigui $B$ l'ull.

Tirem el segment $AB$ [P 1]

i un cercle de diàmetre $AB$.[925] [P 3]

$BG$ és un segment rectilini i $GC$ també.

Pel punt $A$, tirem el segment $EF$ perpendicular a $AB$

a ambdós costats de $AB$. [EI 11][926]

Prolonguem el pla indicat.

Talla l'esfera de centre $A$ segons un cercle màxim $\bigcirc CEFD$.[927]

Tirem els segments $CA$, $AD$, $DB, BC$ i $CD$. [P 1]

Els angles amb vèrtexs als punts $C$ i $D$ són rectes. [EIII 31$a$]

Per tant, $BC$ i $BD$ —que són raigs— es toquen i, des de l'ull $B$ veiem la part $\overset{\frown}{CD}$ de l'esfera.

Canviem l'ull al punt $G$, més proper a l'esfera.

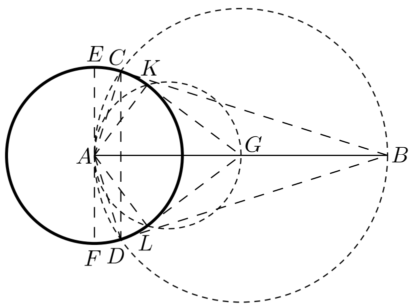



FIGURA D.31. Proposició 24 de l'*Òptica* d'Euclides

Tirem $GA$, [P 1]

i els segments $GK, KA, AL$ i $LG$. [P 1]

L'ull $G$ veu la part $\overset{\frown}{KL}$ de l'esfera,

mentre que, com hem dit abans, des de l'ull $B$ veiem $\overset{\frown}{CD}$.

I [l'arc] $\overset{\frown}{KL}$ és més curt que el $\overset{\frown}{CD}$.

Per tant, quan apropem l'ull el que veiem és més petit

però sembla més gran, perquè l'angle corresponent [a l'ull $G$] $\widehat{KGL}$ és més gran que el corresponent [a l'ull $B$] $\widehat{CBD}$. ♠

925. A l'espai, no està determinat. En considerem un de concret que determina un pla. Treballem en aquest pla.

926. Al pla indicat a la nota anterior.

927. Això és degut al fet que el pla passa per un radi de l'esfera.

p. 131
## D.3.2 La *Catòptrica* (*Κατοπτρικός*)

p. 132
### D.3.2*a* Una definició geomètrica del *Parmènides* de Plató

**D.3.2*a*$_1$**

—De manera que, si no té ni principi ni fi, l'U és il·limitat.[928]

—Sí, no podria ser altrament.

—Per tant, no té figura, ja que no participa ni d'allò que és rodó ni d'allò que és recte.

—I això?

—Rodó és allò que té uns límits que equidisten del centre arreu.

—D'acord.

—I recte és allò que té el mig alineat amb els extrems.[929]

p. 132
### D.3.2*b* Alguns fragments

**D.3.2*b*$_1$ Definicions[-postulats-lemes]** (*Ὅροι*)[930]

1. El raig visual és un segment rectilini en el sentit que les parts intermèdies estan totes en línia amb els extrems.[931]

2. Tots els objectes que veiem són visibles mitjançant segments rectilinis.

3. [Llei de la reflexió.] Si col·loquem un mirall en un pla i considerem una certa altura perpendicular al pla del mirall, resulta que hi ha proporcionalitat entre els segments que hi ha entre l'espectador i el mirall, entre el mirall i l'altura, i entre l'altura perpendicular de nosaltres i l'altura perpendicular al pla.[932]

---

928. *Ἄπειρον*, en el sentit negatiu de 'no-limitat'. Cornford (1939), edició castellana, p. 185.

929. Plató (1992), 182 d 8-e 8, edició catalana, p. 75. Molt interessant, aquesta referència als extrems del que és recte. Cal pensar-ho com un segment rectilini.

930. Euclides (2000*b*), edició castellana, p. 211-212, i, francesa, p. 99.

931. Aquesta definició de segment rectilini no és la que trobem a la definició Di 4 dels *Elements* d'Euclides, sinó que és la que trobem en el *Parmènides* de Plató [D.3.2*a*$_1$]. Tanmateix, es manté la finitud del segment recte. Compareu-lo amb Di 4.

932. Aquest postulat és bàsic per a poder establir la primera part de la demostració de la proposició 1, de fet, la igualtat que s'hi donarà.

4. Si, en un mirall pla, ocupem el peu de la perpendicular de l'objecte que observem [al mirall], no el veiem.[933]
5. En el cas dels miralls convexos, no veiem l'objecte observat si s'ocupa el lloc en el qual el raig passa pel segment que va de l'objecte al centre de l'esfera. I això val igual per als còncaus.[934]
6. Si dipositem quelcom en un vas, ens situem a una distància en la qual ja no veiem l'objecte i posem aigua al vas, el veurem des d'aquella mateixa distància.[935]

### D.3.2$b_2$ Les proposicions primera, segona i cinquena

**D.3.2$b_{2a}$** [Proposició 1. Llei de la reflexió.] *Als miralls plans, convexos i còncaus els raigs visuals es reflecteixen amb angles iguals.*[936]

*a*) Sigui $B$ l'ull i $AC$ el mirall pla.

Considerem el raig $BK$ que va de l'ull [al mirall] i es reflecteix a l'objecte $D$.

Afirmo que l'angle $\hat{\Phi}$ és igual a l'angle $\hat{\Theta}$.

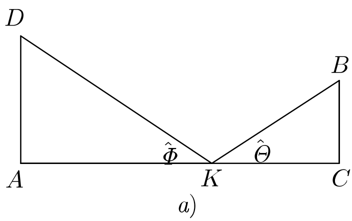



FIGURA D.32. Proposició 1*a* de la *Catòptrica* d'Euclides

Tirem els segments $BC$ i $DA$ perpendiculars al mirall. [EI 12]

Aleshores, $BC$ és a $CK$ com $DA$ a $AK$. [definició 3][937]

D'això en resulta que els triangles $\triangle BCK$ i $\triangle DAK$ són semblants. [EVI 2, EI 29 i EVI 6]

---

Podem pensar que és una conseqüència del moviment de la visió en $KD$ i $KB$ amb la mateixa velocitat constant.

933. Per a poder-lo veure, cal que la perpendicular es reflecteixi al mirall pla, cosa que no pot passar si n'ocupem el peu.

934. Cal entendre: miralls determinats per arcs de circumferència.

935. És una llei de caràcter experimental. De fet, correspon al fenomen de la refracció que, en el si del món grec, no serà estudiat fins a Ptolemeu, pel que sabem.

936. En grec, els fenòmens de la «reflexió» i del raig «reflectit» es denominen amb el mateix nom: *ανάκλασις*. Ara, en aquest text, apareix el verb: *ἀνακλάω*. Literalment, diu: «Ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων ἐνόπτρων καὶ κυρτῶν καὶ κοίλων αἱ ὄψεις ἐν ἴσαις γωνίαις ἀνακλῶνται». En concret, «l'angle d'incidència i l'angle de reflexió són iguals».

937. Vegeu la nota 932 (pàgines 294-295).

Per tant, els angles $\hat{\Phi}$ i $\hat{\Theta}$ són iguals. [EVI 5] ♠

*b*) Sigui $DKC$ un mirall convex
i $BK$ el raig visual que es reflecteix a [l'objecte] $A$.

Afirmo que l'angle suma de $\hat{\Gamma}$ i $\hat{\Phi}$ és igual a l'angle suma de $\hat{\Delta}$ i $\hat{\Theta}$.[938]

Col·loco el mirall pla $NM$ [tangent] al mirall còncau.

Resulta que l'angle $\hat{\Gamma}$ és igual a l'angle $\hat{\Delta}$, i l'angle $\hat{\Theta}$ a l'angle $\hat{\Phi}$, [per l'ítem *a*]
ja que el segment $MN$ és tangent.

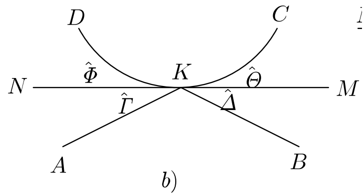



FIGURA D.33. Proposició 1*b* de la *Catòptrica* d'Euclides

Per tant, l'angle suma $\hat{\Gamma}$ i $\hat{\Theta}$ és igual a l'angle suma $\hat{\Delta}$ i $\hat{\Phi}$. [Nc 2] ♠

*c*) Sigui $DKC$ un mirall còncau.

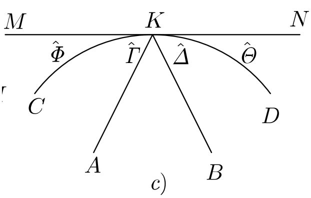



FIGURA D.34. Proposició 1*c* de la *Catòptrica* d'Euclides

Suposem que $BK$ és el raig visual que es reflecteix a [l'objecte] $A$.

Afirmo que els angles $\hat{\Gamma}$ i $\hat{\Delta}$ són iguals.

Col·loco el mirall pla $NM$ [tangent] al mirall còncau.

Resulta que l'angle suma $\hat{\Gamma}$ i $\hat{\Phi}$ és igual a l'angle suma $\hat{\Delta}$ i $\hat{\Theta}$, [*a*]
i l'angle $\hat{\Theta}$ al $\hat{\Phi}$[, ja que el segment $MN$ és tangent]. [nota 902]

Per tant, l'angle $\hat{\Gamma}$ és igual al $\hat{\Delta}$. ♠ ♠

938. En els textos de geometria grega, no és gaire normal donar un nom específic als angles. És més normal designar-los usant el vèrtex i dos punts, un de cada costat, i, de vegades, esmentant només el vèrtex. En canvi, en aquest text, els angles es designen amb un nom propi. Llegim: *Λέγω, ὅτι ἴεν ἐστὶν ἡ Γ,Φ γωνία τῇ Δ, Θ*. ACERBI (2007), p. 2202. També volem fer notar l'aparició de l'angle de contacte [EIII 16, PLA (2018), p. 40] —(en forma de corn) (*κερατοειδής*), segons la classificació de Procle [C.2.2*n*, pàgina 232]. Com podem veure a EIII 16 (PLA (2018), p. 206), és una *rara avis* en la geometria dels *Elements* d'Euclides. Això no obstant, aquest text suggereix la necessitat de tenir-lo en compte.

**D.3.2*b*$_{2b}$** Proposició 2. *Un raig que incideix en un mirall, sigui del tipus que sigui, produint angles iguals*[939] *es reflecteix sobre si mateix.*

Sigui $AC$ un mirall pla i $B$ l'ull.

Suposem que l'angle visual $BK$ produeix dos angles iguals,
és a dir, l'angle $\hat{\Theta}$ és igual als angles $\hat{\Phi}, \hat{\Gamma}$ junts.[940]

Afirmo que el raig $BK$, en reflectir-se, tornarà sobre si mateix.

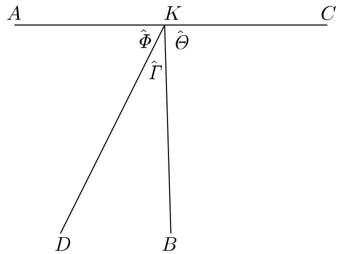



Figura D.35. Proposició 2 de la *Catòptrica* d'Euclides

En efecte, en el cas que això no sigui així[941]
i vagi cap al punt $D$,
atès que els raigs —l'incident i el reflectit— formen angles iguals, [proposició 1]
l'angle $\hat{\Phi}$ és igual al $\hat{\Theta}$.

Però l'angle suma de $\hat{\Phi}$ i $\hat{\Gamma}$ també és igual a l'angle $\hat{\Theta}$.

Per tant, l'angle suma de $\hat{\Phi}$ i $\hat{\Gamma}$ és igual a l'angle $\hat{\Phi}$, [Nc 1 i Nc 2 ]
és a dir, el més gran serà igual al més petit.
I això és impossible. [Nc 5]

Per tant, el raig $BK$ es reflecteix sobre si mateix.

La mateixa demostració val quan el mirall és convex o còncau. ♠

**D.3.2*b*$_{2c}$** Proposició 5. *Als miralls còncaus, si col·loquem l'ull al centre o fora de la circumferència, és a dir, entre el centre i la circumferència, si es reflecteixen, els rajos*[942] *són concurrents.*

---

939. Molta atenció! Segons la proposició 1, l'angle incident i el reflectit són sempre iguals. Aquí s'afirma que el raig incident forma angles iguals amb el pla del mirall, no es diu res del raig reflectit. Ras i curt, sobre el mirall pla directament o sobre els miralls plans tangents als miralls corbats, el raig incident és un angle recte.

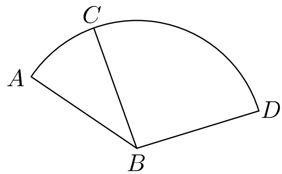
940. El fet de considerar els dos angles $\hat{\Phi}, \hat{\Gamma}$ a una banda té per objectiu representar la gràfica del raonament per l'absurd.

941. Hipòtesi de l'absurd.

942. Aquest cas és el que Euclides estudia, en particular, a la proposició 6, però ho fa contradient l'enunciat de la 5.

*a*) Sigui $ACD$ un mirall còncau
i $B$ el centre de l'esfera.

Posem l'ull al punt $B$,
i hi fem incidir els raigs visuals $BA, BC$ i $BD$ des de $B$. [P 1]




*a*)

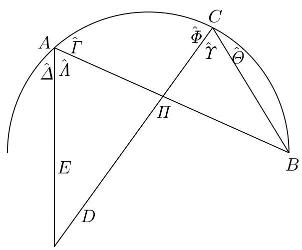
FIGURA D.36. Proposició 5*a* de la *Catòptrica* d'Euclides

Aleshores, els angles que tenen els vèrtexs a $A, D$ i $C$ són iguals perquè són angles d'un semicercle. [EIII 16]

Per això deduïm que els raigs visuals
$BA$, $BC$ i $BD$,
en reflectir-se, ho fan sobre si mateixos, com ja hem vist. [proposició 2]

Per tant, seran concurrents al punt $B$. ♠

*b*) Sigui $ACB$ un mirall còncau.




*b*)

FIGURA D.37. Proposició 5*b* de la *Catòptrica* d'Euclides

Suposem que l'ull $B$ es troba damunt la circumferència
i que, des de $B$, hi incideixen els raigs $BC$ i $BA$, [P 1]
que es reflecteixen als punts $D$ i $E$.

Atès que l'arc $\overset{\frown}{ACB}$ és més llarg que el $\overset{\frown}{BC}$, [EI 20]
l'angle $\hat{\Gamma}$ és més gran que el $\hat{\Theta}$. [EIII 31]

Per tant, l'angle $\hat{\Delta}$ és més gran que el $\hat{\Phi}$. [proposició 1]

I, així, la suma dels angles $\hat{\Gamma}$ i $\hat{\Delta}$ és més gran que la suma dels angles $\hat{\Phi}$ i $\hat{\Theta}$. [Nc 4′]

D'això en resulta que l'angle restant $\hat{\Lambda}$ és més petit que l'angle restant $\hat{\Upsilon}$
i, per tant, molt més petit que l'angle $\hat{\Pi}$.

Així doncs, els segments [rectilinis] $CD$ i $AE$ es tallen. [P 5] ♠

Podem seguir el mateix raonament quan l'ull cau fora de la circumferència,
com demana la proposició. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

# Apèndix E

# L'obra d'Aristarc de Samos

> Μὴ ταχύς Ἡρακλείτου ἐπ᾽ ὀμφαλὸν εἴλεε βίβλον τοὐφεσίου,
> μάλα τοι δύσβατος ἀτραπιτός.
> Ὄρφνη καὶ σκότος ἐστιν ἀλάμπετον.
> ἤν δὲ σε μύστες εἰσαγάγη,
> φανεροῦ λαμπρότερ᾽ ἠελίου.
>
> DIÒGENES LAERCI[943]

En aquest apèndix oferim l'obra *De les mides i les distàncies del Sol i la Lluna*. Ens sembla que val la pena donar-la sencera[944] perquè és el primer treball que tenim que estableix en termes matemàtics la inspiració pitagòrica —«la música del cel».[945] p. 137

## E.1 L'originalitat i la importància d'Aristarc

Hi ha tres o quatre textos doxogràfics que posen en relleu l'obra d'Aristarc i que recollim en aquest paràgraf.

943. «No tinguis pressa d'arribar al final del llibre d'Heràclit, el mestre d'Efes. És una via de fatigós recorregut. Hi trobaràs obscuritat i tenebres sense aclarir. Però si un iniciat t'hi acompanya, les coses brillaran més que el Sol.» Vegeu DIÒGENES LAERCI (1988), llibre IX [16], 20-25, edició catalana, volum II, p. 152.

944. E.2, pàgines 309-346.

945. PLA (2016*b*), p. 96 i 105-107, i els textos A3.11*b* i *c*, p. 415.

## E.1*a* Opinions sobre l'obra d'Aristarc

Joan Estobeu diu:

p. 137 **E.1$\boldsymbol{a}_1$** Aristarc manté el Sol i les estrelles fixos. En canvi, diu que la Terra es mou en un disc al voltant del Sol i queda a l'ombra o no segons les seves inclinacions.[946]

Un escoliasta d'Aristòtil diu:

**E.1$\boldsymbol{a}_2$** Els astres i el cel són fixos, i la Terra es mou d'occident a orient i torna [d'orient a occident].[947]

I Arquimedes, en l'*Arenari*, diu:

p. 138 **E.1$\boldsymbol{a}_3$** Aristarc de Samos així ho exposa alhora que proporciona proposicions que refusen [les opinions d]els astrònoms. D'acord amb el que exposa, el món és més gran del que hem dit abans. Suposa que les estrelles i el Sol són immòbils, que la Terra giravolta a l'entorn del Sol, que n'és el centre, i que la grandària de l'esfera de les estrelles fixes, el centre de la qual és el Sol, és de tal manera que la circumferència descrita per la Terra té amb la distància a les estrelles fixes la mateixa proporció (*ἀναλογία*) que la del centre de l'esfera i l'àrea de l'esfera. [...] Faig aquesta suposició perquè Aristarc afirma que el Sol se'ns mostra com la set-cents vintena part del cercle que anomenem *Zodíac*.[948]

I Vitruvi explica:

p. 137 **E.1$\boldsymbol{a}_4$** Els qui han rebut de la naturalesa tant talent, perspicàcia i memòria que poden adquirir els coneixements de la geometria, l'astrologia, la música i altres disciplines perfectament, passen els límits dels arquitectes i es fan matemàtics. Gaudeixen fàcilment d'aquestes ciències i participen del coneixement de moltes altres. Però molt poques vegades trobem estudiosos com, els d'èpoques passades, Aristarc de Samos, Filolau i Arquites de Tàrent, Apol·loni de Perge, Eratòste-

946. És a dir, a causa de l'obliqüitat de l'eclíptica. Vegeu Estobeu (1575), i 25, 1-3 [534], 30-33, p. 145.
947. Brandis (ed.) (1836), p. 95.
948. Vegeu, *in extenso*, A.9.2$a_2$ [4] i [10], p. 402 i 411. *Grècia IIIb*.

nes de Cirene, Arquimedes i Escopines de Siracusa. Tots van deixar, per a la posteritat, moltes invencions orgàniques i gnomòniques que havien trobat i explicat mitjançant el càlcul numèric, i moltes invencions de les raons naturals.[949]

### E.1*b* L'acusació de Cleantes

Plutarc, a *De la cara visible de la Lluna* (*Περὶ τοῦ ϵμφαινομένου προσώπου τῷ κύκλῳ τῆς Σϵλήνϵς*) de la recopilació *Obres morals* (*Moralia*), explica que Cleantes volia que Aristarc fos condemnat per impietat per haver sostingut l'heliocentrisme.

**E.1*b*$_1$** Oh, Senyor, no ens acuseu de no respectar els déus com va fer Cleantes quan va creure que els grecs haurien d'haver presentat càrrecs d'impietat contra Aristarc de Samos perquè afirmava que la Terra es desplaça a l'univers i perquè va intentar explicar els fenòmens [astronòmics] suposant que el cel roman quiet mentre que la Terra gira al llarg de l'eclíptica i sobre el seu propi eix.[950]

Vegem l'extens text de Pappos.

**E.1*b*$_2$** En el llibre *De les mides i les distàncies del Sol i la Lluna*, Aristarc estableix les sis hipòtesis següents:

Primera, la Lluna rep la llum del Sol.

Segona, la Terra es comporta respecte de l'esfera en la qual es mou la Lluna com un punt i com el centre.

Tercera, el cercle màxim que delimita la part fosca i la il·luminada de la Lluna es troba dins el camp de visió del nostre ull.

Quarta, quan veiem la Lluna dimidiada,[951] la seva distància al Sol és una trigèsima part més petita que el quadrant.

Cinquena, l'amplada de l'ombra de la Terra equival a dues llunes.

I, sisena, [el diàmetre aparent de] la Lluna subtendeix una quinzena part d'un signe del zodíac —*ζῴδιυ*.[952]

949. Vitruvi (1995), llibre I, capítol 1.

950. Plutarc (1987), 923 a.

951. En el sentit de dividida en dues parts iguals, per la part fosca i la il·luminada.

952. Vegeu la pàgina 140 i el text E.2$a_1$ (pàgina 309).

La primera, la tercera i la sisena concorden pràcticament amb les d'Hiparc i les de Ptolemeu, ja que la Lluna està sempre il·luminada pel Sol i ens mostra un cercle que separa la part lletosa, produïda per la il·luminació del Sol, de la cendrosa, que és del seu color llevat quan hi ha eclipsi, perquè aleshores cau dins el con que produeix el Sol quan la Terra el tapa, i s'obscureix.

Aquest cercle de la Lluna és indistingible d'un cercle màxim en les dicotomies de les estacions solars, quan se'l veu molt a prop d'un quadrant sobre el cercle del zodíac.[953]

En efecte, si estenem el pla d'aquest cercle, veiem que passa pel nostre ull tant en la posició de la primera com de la tercera fase de dicotomia lunar.[954]

Ara bé, els matemàtics esmentats van concebre les altres hipòtesis d'una manera diferent,[955] perquè la Terra no és un punt, ni tampoc el centre de l'esfera en la qual es mou la Lluna, sinó de l'esfera de les estrelles fixes.[956]

L'amplada de l'ombra de la Terra no és dos diàmetres de la Lluna i el diàmetre de la Lluna no subtendeix [en la distància mitjana] un arc de cercle major que el constituït per la quinzena part d'un signe, és a dir, dos graus.

En efecte, segons Hiparc, aquest cercle[957] amida sis-centes cinquanta vegades el diàmetre de la Lluna, mentre que el de l'ombra de la Terra [a una distància mitjana] ho fa dues vegades i mitja en les conjuncions.

D'altra banda, segons Ptolemeu, el diàmetre de la Lluna subtendeix un arc de $0^{\mathrm{o}}\,31'\,20''$ quan es troba a la distància més gran i de $0^{\mathrm{o}}\,35'\,20''$ quan ho fa a la més petita,

953. És a dir, a una altura aproximada de $90^{\mathrm{o}}$.

954. O sigui, la posició de la primera o de la segona fase de la Lluna.

955. Observem que els astrònoms són considerats matemàtics si tenim en compte la metodologia que usen. Vegeu el text C.4.2$b_2$ de Pla (2016*b*), p. 535, el text E.1$a_1$ (pàgina 300) i la pàgina 136.

956. És a dir, «de l'esfera de les estrelles fixes (*τῶν ἀπλανῶν*)». Els que ho sostenen no són, doncs, astrònoms heliocèntrics.

957. Es refereix al cercle del zodíac.

mentre que el diàmetre del cercle de l'ombra és de $0^{\circ}\,40'\,40''$ quan la Lluna es troba més allunyada i de $0^{\circ}\,46'$ quan és més a prop.[958]

És per això que aquests darrers van deduir raons diferents per a les distàncies i per a les mides del Sol i la Lluna.

Aristarc, a més de les hipòtesis esmentades, s'expressa així: «Com a conseqüència de la hipòtesi de la posició dimidiada de la Lluna,[959] es dedueix, doncs, que la distància de la Terra al Sol és més gran que divuit vegades la de la Terra a la Lluna, però més petita que vint,
que la raó del diàmetre del Sol i el de la Lluna és la mateixa,
i que la raó entre el diàmetre del Sol i el de la Terra és més gran que la de 19 i 3, però més petita que la de 43 i 6.

Tot això es dedueix de les raons entre les distàncies, de les hipòtesis sobre l'ombra[960] i del fet que la Lluna subtendeix una quinzena part d'un signe del zodíac.»

I també diu: «Es conclou de les distàncies, etc.», perquè pretenia demostrar coses després d'haver establert els lemes que necessitava per a les demostracions.

És per tot això que arriba al convenciment que la raó que hi ha entre el [volum del] Sol i [el de] la Terra és més gran que la de 6.859 i 27, però més petita que la de 79.507 i 216,
que la raó que hi ha entre el diàmetre de la Terra i el de la Lluna és més gran que la de 108 i 43, però més petita que la de 60 i 19,
i, finalment, que la raó que hi ha entre la Terra i la Lluna és més gran que la d'1.259.712 i 79.507 i més petita que la de 216.000 i 6.859.

I, en el llibre cinquè de l'*Almagest*, Ptolemeu estableix que, si prenem el radi de la Terra com a unitat,[961] la distància més gran de la Lluna en les conjuncions fa $64\,\frac{10}{60}$ unitats i la del Sol 1.210,
mentre que el radi de la Lluna fa $\frac{17}{60}\,\frac{33}{60^2}$ unitats i el del Sol $5\,\frac{30}{60}$ unitats,

958. Diu: *ἑξηκοστά μ΄ μ'* i *ἑξηκοστά μξ'*. És a dir, $0^{\circ}\,40'40''$ i $0^{\circ}\,46'$, respectivament.

959. Vegeu la tercera hipòtesi.

960. Vegeu la sisena hipòtesi.

961. Apareixen les fraccions en sexagesimal babilònic. PLA (2016*a*), p. 138-142.

de manera que, si es considera també el radi de la Lluna com a unitat, se'n dedueix que el radi de la Terra fa $3\,\frac{2}{5}$ unitats i el del Sol $18\,\frac{4}{5}$ unitats el de la Lluna.

En conseqüència, el diàmetre de la Terra és $3\,\frac{2}{5}$ el de la Lluna, i el del Sol $18\,\frac{4}{5}$ el de la Lluna i $5\,\frac{1}{2}$ el de la Terra.[962]

De tot això, se'n segueix també la raó dels cossos sòlids.

En efecte, atès que el cub d'1 és 1, que el de $3\,\frac{2}{5}$ és aproximadament $39\,\frac{1}{4}$ i que el de $18\,\frac{4}{5}$ és aproximadament $6.644\,\frac{1}{2}$,[963]
llavors, si considerem que la mida de la Lluna és la unitat,
obtenim que el de la Terra fa $39\,\frac{1}{4}$ [d'aquestes unitats] i el del Sol $6.644\,\frac{1}{2}$.[964]

Per tant, la mida del Sol és aproximadament 170 vegades la de la Terra.

I ja he explicat prou coses sobre la comparació de les mides i les distàncies [del Sol, la Terra i la Lluna].

Ara exposem un lema digne de ser investigat que pertany al llibre quart d'aquesta obra [d'Aristarc].[965]

## E.1*c* Un lema de Pappos

Pappos aprofita l'anàlisi anterior per a enunciar i demostrar un lema relatiu als arcs d'un cercle.

---

962. Així, el diàmetre de la Terra és igual a $3\,\frac{2}{5}$ vegades el de la Lluna. I, de retruc, aquest és $\frac{5}{17}$ vegades aquell.

El diàmetre del Sol és $18\,\frac{4}{5}$ el de la Lluna i, de retruc, és $18\,\frac{4}{5} \times \frac{5}{17} = 5\,\frac{9}{17} \sim 5\,\frac{1}{2}$ el de la Terra.

963. Això resulta dels càlculs següents:

$$\left(3\,\tfrac{2}{5}\right)^3 = 39\,\tfrac{84}{125} > 39\,\tfrac{38}{152} = 39\,\tfrac{1}{4}.$$
$$\left(18\,\tfrac{4}{5}\right)^3 = 6.644\,\tfrac{38}{125} > 6.644\,\tfrac{84}{168} = 6.644\,\tfrac{1}{2}.$$

964. S'entén dels seus volums. I és conseqüència immediata dels resultats continguts en les dues notes precedents, en concret:

1) El volum de la Terra equival a $39\,\frac{1}{4}$ el de la Lluna.

2) El volum del Sol equival a $6.644\,\frac{1}{2}$ vegades el de la Lluna, que és igual a $\left(5\,\frac{1}{2}\right)^3 = 166\,\frac{3}{8}$ el de la Terra. O sigui, el volum del Sol és més petit que 170 vegades el de la Terra.

965. PAPPOS (1932), volum II, llibre VI [XXXVII], p. 426-430.

**E.1$c_1$** Proposició 39. [*Construcció.*] Considerem el cercle $\bigcirc ABC$ i un diàmetre prolongat $ACD$. [P 2 i P 3]

Pel centre $E$, tirem la perpendicular $BEF$ al segment $ACD$. [EI 11]

Pel punt $D$, tirem la tangent $DT$ al cercle. [EIII 17]

Considerem els arcs $\widehat{CK}$ i $\widehat{CL}$, a una banda i a l'altra del punt $C$, equivalents a la meitat de l'arc $\widehat{FT}$. [EIII 30 i EIII 33]

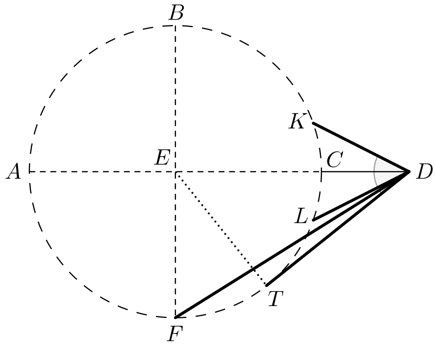


FIGURA E.1. Proposició 39

Tirem els segments $DK$, $DL$ i $DF$. [P 1] ♣

Afirmo que l'angle de costats $DK$ i $DL$ és més gran que el de costats $DF$ i $DT$.

Per a demostrar-ho, abans haurem d'analitzar els fets següents E.1$c_{1.1}$ i E.1$c_{1.2}$:[966]

**E.1$c_{1.1}$** Proposició 40. [*Construcció.*] Considerem un cercle $\bigcirc ABC$ i un diàmetre prolongat $ACD$. [P 2 i P 3]

Des del punt $D$ tirem el segment $DEF$. ♣

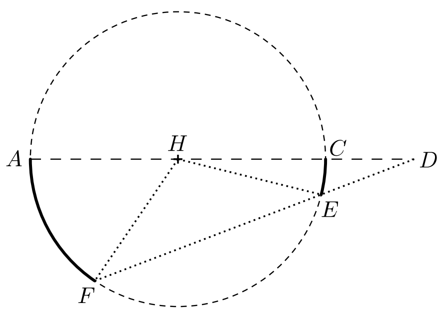


FIGURA E.2. Proposició 40

Afirmo que l'arc $\widehat{AF}$ és més gran que el $\widehat{CE}$.

[*Demostració.*] Prenem el centre $H$ del cercle [EIII 1] i els segments $HF$ i $HE$. [P 1]

Els angles de vèrtexs $F$ i $E$ són iguals [ja que el triangle $\triangle FHE$ és isòsceles perquè els segments $HF$ i $HE$ són radis del cercle $\bigcirc ABCF$]. [DI 20 i DI 15]

966. PAPPOS (1932), volum II, llibre VI [XXXVII], p. 430. Pappos introdueix dos elements d'E.1$c_1$.

Per tant, l'angle de costats els segments rectilinis $HA$ i $HF$ és més gran que el de costats els segments rectilinis $HD$ i $HE$.

[per transitivitat]

L'angle exterior del triangle $\triangle\, HFD$ de costats els segments $HA$ i $HF$ és més gran que cada un dels angles de vèrtexs $F$ i $E$. [E 16]

Però és més gran que el de costats els segments $HD$ i $HE$, ja que és exterior al triangle $\triangle\, DHE$. [E 16]

I, atès que són angles centrals, l'arc $\overset{\frown}{AF}$ és més gran que el $\overset{\frown}{GE}$.[967]

I això és el que volíem demostrar. ♠[968]

**E.1*c***$_{1.2}$ Proposició 41.

[*Construcció.*] Sigui ○ $AB$ un cercle de centre $D$. [P 3 i EIII 1]

Considerem-ne un punt interior $G$.

Tirem el segment $GLDK$, [P 1]

la tangent $FG$ al cercle [EIII 17]

i, pel punt $D$, el segment $DA$ perpendicular al diàmetre $KL$. [EI 11]

Dimidiem l'arc $\overset{\frown}{AF}$ pel punt $E$ [EIII 30]

i unim el punt $G$ amb el $A$ i el $E$. [P 1] ♣

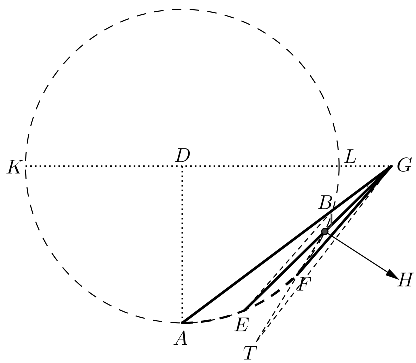


FIGURA E.3. Proposició 41

Afirmo que l'angle de costats els segments rectilinis $GBA$ i $GHE$ és més gran que el format pels costats $GHE$ i $GF$.

[*Demostració.*] Tirem els segments rectilinis $BH$ i $HF$. [P 1]

Atès que el segment rectilini $BE$ és més gran que el $HF$ i que el $GB$ és més petit que el $GH$, [EIII 15]

la raó que hi ha entre $EB$ i $BG$ és més gran que la de $FH$ i $GH$. [DV 7]

Determinem el segment $HT$, que és a $HG$ com $EB$ a $BG$. [EVI 12]

967. En un cercle, l'angle central ve condicionat per l'arc que determina en la circumferència. I, d'alguna manera, l'un identifica l'altre.

968. PAPPOS (1932), volum II, llibre VI [XXXVIII], p. 431.

Unim $TG$. [P 1]

Com que els angles de costats els segments rectilinis $EB$ i $BG$, i $FH$ i $HG$ són iguals
perquè els arcs $\widehat{AE}$ i $\widehat{EF}$ ho són[, per construcció,] [Eiii 21 i Nc 1]
i els costats d'aquests angles són proporcionals,
llavors els triangles $\triangle EBG$ i $\triangle HTG$ són equiangles[, ja que són proporcionals]. [Evi 7 i Dvi 1]

És a dir, els angles de costats els segments rectilinis $AG$ i $GE$, i $HG$ i $GT$ són iguals.

Per tant, l'angle de costats els segments rectilinis $AG$ i $GE$ és més gran que el de costats $EG$ i $GF$. [per substitució] ♠[969]

## E.1*d* Textos de Vitruvi, Aeci, Pappos i Copèrnic

Vegem, ara, aquesta afirmació de Vitruvi.

**E.1*d*$_1$** Diuen que Aristarc de Samos va inventar el mirall còncau o hemisfèric i també el disc col·locat en una superfície plana.[970]

Aeci, sobre el flux i el reflux al mar, diu:

**E.1*d*$_2$** Aristòtil i Heràclit atribueixen aquests dos efectes al Sol que, pel seu moviment, excita els vents i els allunya.

Quan aquests sobrevolen amb violència el mar de l'Atlàntic, l'aixequen i l'empenyen, i d'aquesta manera provoquen la marea creixent.

I quan la seva acció cessa, el mar cau i es produeix el reflux.

Píteas de Marsella afirma, en canvi, que és la Lluna plena la causa del flux, i seguint el seu curs, del reflux.

Plató ho atribueix a un augment considerable de les aigües que es fa a través de les obertures que el mar té al fons.

Timeu creu que els rius que baixen de les muntanyes de la Gàl·lia cèltica a l'Atlàntic produeixen una marea
perquè, quan xoquen amb aquest mar, el pressionen molt violentament, i així provoquen el flux.

969. Pappos (1932), volum ii, llibre vi [xxxix], p. 431.
970. Vitruvi (1995), llibre ix, capítol 8.

Però, quan l'ímpetu afluixa, l'aigua del mar retorna al seu lloc i es produeix el reflux.

Seleuc el matemàtic els atribueix a un moviment de la Terra que es manifesta quan la Lluna, en la seva circumval·lació, ara l'atreu ara la repel·leix.

Aquests dos moments de la interferència de la Terra, la Lluna i l'aire provoquen un vent molt fort que bufa sobre l'oceà Atlàntic i causa un augment del moviment del mar mitjançant la pressió.[971]

En el llibre VI de la *Col·lecció matemàtica*, Pappos presenta les solucions de les qüestions compromeses de la *Petita astronomia*. I obre l'explicació amb aquestes paraules:

**E.1*d*$_3$** Atès que els qui professen el domini de l'astronomia —*ὁ ἀστρονομούμενος τόπος*— no han investigat amb gaire profunditat el motiu de les seves proposicions, n'apleguen unes com si fossin necessàries i unes altres com si no ho fossin.

Així, per exemple, pel que fa al sisè teorema del primer llibre de les *Esfèriques* de Teodosi,[972] diuen que qualsevol cercle que passi pels pols de l'esfera talla en angles rectes cada un dels cercles màxims.

Però aquest no és pas el cas general.

Això també passa en el teorema segon d'Euclides, en el qual s'omet unes quantes vegades que el zodíac és perpendicular a l'horitzó —*ὁριζων*.

I, finalment, en el quart tractat *Dels dies i les nits*, es desnaturalitza la feina de Teodosi i s'ometen, cosa que no hauria calgut fer, algunes proposicions.

Ara les establirem.[973]

I Copèrnic, en *De revolutionibus orbium cælestium*, esmenta l'heliocentrisme de Filolau i d'Aristarc.

**E.1*d*$_4$** Podem pensar que va ser per aquestes raons i altres de semblants que Filolau va plantejar que el moviment de la Terra era pos-

---

971. AECI (2005), llibre III, capítol XVII.
972. TEODOSI (1927), edició francesa, p. 96.
973. PAPPOS (1932), volum I, p. 369-371.

sible. I, segons alguns autors, Aristarc de Samos va defensar aquesta mateixa tesi.[974]

# E.2 L'obra *De les mides i les distàncies del Sol i la Lluna*

El text d'Aristarc *De les mides i les distàncies del Sol i la Lluna* consta de sis hipòtesis i divuit proposicions. p. 139

## E.2.1 Les hipòtesis i les seves conseqüències

**E.2.1$a_1$ [Les hipòtesis]**[975]

1. La Lluna rep la llum del Sol.
2. La Terra es comporta respecte de l'esfera en la qual es mou la Lluna com un punt i com el centre.
3. El cercle màxim que delimita la part fosca i la il·luminada de la Lluna es troba dins el camp de visió del nostre ull.[976]
4. Quan veiem la Lluna dimidiada, la seva distància al Sol és una trigèsima part més petita que el quadrant.[977]
5. L'amplada de l'ombra de la Terra equival a dues llunes.
6. [El diàmetre aparent de] la Lluna subtendeix una quinzena part d'un signe del zodíac —*ζῴδιν*.[978]

**E.2.1$a_2$ [Conseqüències de les hipòtesis]**

Si admetem aquestes sis hipòtesis, tenim que:

1. La distància del Sol a la Terra és superior a divuit vegades la de la Terra a la Lluna, i inferior a vint vegades aquesta distància.

974. Vegeu, en línia, <https://en.calameo.com/read/004935887e04717be3cf8>, p. 30.

975. Vegeu les notes que acompanyen les hipòtesis a la pàgina 140.

976. Heath (1913), p. 353.

977. Un quadrant són 90°, i la seva trigèsima part són, doncs, 3°. Per tant, la diferència val 87°.

978. Òbviament, un signe del zodíac correspon a 30° —ja que n'hi ha dotze— i la quinzena part a 2°. Vegeu Janer (2009).

2. Els diàmetres del Sol i de la Lluna estan en la mateixa relació.

La raó que hi ha entre aquests és superior a la de 19 i 3, i inferior de 43 i 6.

Tot això es dedueix per la proporció de distàncies, per les hipòtesis sobre l'ombra i perquè la Lluna subtendeix una quinzena part del signe del zodíac.

p. 140

## E.2.2 Les proposicions

**E.2.2*a*$_1$** [Proposició 1] a*) Dues esferes iguals estan compreses en un cilindre.* b*) Dues esferes desiguals estan en un con amb el vèrtex al costat de l'esfera més petita. I el segment rectilini que uneix els centres de les esferes és perpendicular a cada un dels cercles en els quals la superfície del cilindre o del con les toca.*[979]

*a*) Considerem dues esferes iguals de centres $A$ i $B$.

Tirem el segment $AB$ [P 1] i el prolonguem per tots dos costats fins a la superfície de l'esfera [P 2] [en la qual determinen els punts $K$ i $L$, respectivament].

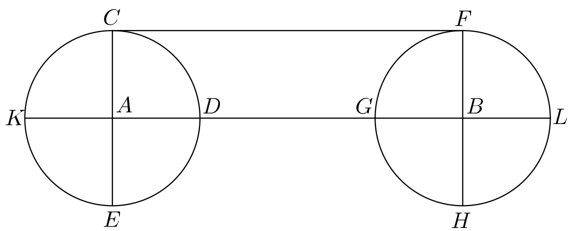



FIGURA E.4. Proposició 1*a*.

Tirem el pla que passa pel segment $AB$.[980]

Aquest pla determina dues seccions —una en cada una de les esferes.

979. Les figures són totes planes i, de vegades, cal interpretar-les perquè ometen molta informació visual.

980. Accepta l'existència d'un pla que passa pel segment rectilini. Només cal agafar un punt exterior al segment i recórrer a un dels postulats indicats a la nota 762 de Pla (2020), p. 425.

Aquestes seccions són dos cercles màxims $\bigcirc CAE$ i $\bigcirc FBH$.
[Teodosi, proposició 1][981]

[*Demostració.*]

Pels punts $A$ i $B$, tirem dos segments $CAE$ i $FBH$ perpendiculars al segment $AB$. [Ei 11]

Unim $CF$. [P 1]

Atès que [els radis] $AC$ i $BF$ són iguals i paral·lels, [Di 15 i Ei 28] els segments $CF$ i $AB$ també ho són. [Ei 4 i Ei 47][982]

Per tant, la figura $\varparallelogram ABFC$ és un paral·lelogram i els angles de vèrtexs $C$ i $F$ són rectes. [Ei 34][983]

Ara, mantenint fix l'eix $AB$, fem giravoltar una volta sencera el paral·lelogram $\varparallelogram ABFC$ i els semicercles $\frown CDE$ i $\frown FGH$.

Els semicercles $\frown CDE$ i $\frown FGH$ giren segons —generant— les esferes. [Dxi 14]

I el paral·lelogram ho fa segons un cilindre [Dxi 21] de bases els cercles de diàmetres $CE$ i $FH$, que formen angles rectes amb el segment $AB$ perquè, durant tota la rotació, hi mantenen l'angle recte.[984]

I, evidentment, el cilindre és tangent a les esferes, ja que $CF$ ho és als semicercles $\frown CDE$ i $\frown FGH$ mentre dura el moviment. ♠

*b*) Considerem, ara, dues esferes diferents de centres $A$ i $B$.

Sigui més gran la de centre $A$.

Afirmo que com que té el vèrtex en la direcció de l'esfera més petita les comprèn totes dues.

981. Aquí, Aristarc usa la proposició primera del llibre I de les *Esfèriques* de Teodosi de Trípoli: «Quan un pla talla una esfera, la línia d'intersecció és un cercle.» Tanmateix, fa entendre encara més coses. Per exemple, usa el fet que, si el pla passa per un diàmetre de l'esfera, el cercle és màxim. Segons Dxi 14, l'esfera es defineix com un semicercle que giravolta a l'entorn del diàmetre. Un pla que passa pel seu diàmetre la talla en dos semicercles oposats.

982. Cal considerar els dos triangles rectangles que obtenim quan unim els punts $A$ i $F$.

983. Aristarc (2007), nota 8, p. 38.

984. Nota 757 de Pla (2020), p. 424.

[*Demostració*.] Unim $AB$. [P 1]

Considerem un pla que passa per $AB$[985]

i aquest pla talla les esferes en cercles [màxims].[986]

Siguin aquests cercles el $\bigcirc\, CDE$ i el $\bigcirc\, FGH$.

El primer és més gran que el segon.[987]

Determinem un punt $K$ [del segment $AB$]

de manera que el radi del cercle $\bigcirc\, CDE$ és al del cercle $\bigcirc\, FGH$ com $AK$ a $BK$.[988] [EVI 12]

Considerem el punt $F$ de tangència del segment $FK$ a la circumferència del cercle $\bigcirc\, FGH$. [EIII 17]

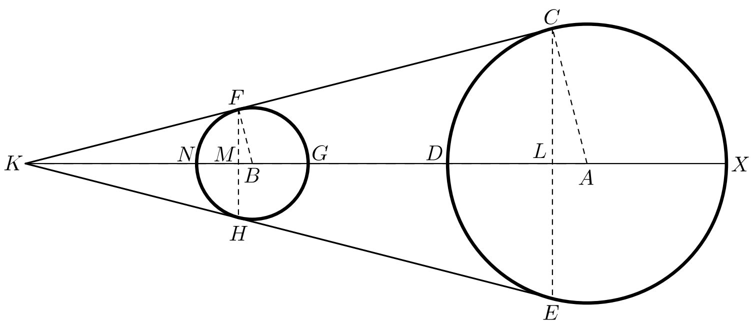



FIGURA E.5. Proposició 1*b*

Unim $FB$. [P 1]

Pel punt $A$, tirem el segment $AC$ paral·lel al $BF$. [EI 31]

Unim $CF$. [P 1]

Aleshores, $AK$ és a $KB$ com $AD$ a $BN$. [per construcció i EVI 4]

I, com que les parelles $AD$ i $AC$, i $BF$ i $BN$ són iguals, [DI 15]

$AK$ és a $KB$ com $AC$ a $CF$. [EV 7, iterat][989]

985. Nota 980. Ja no ho tornarem a repetir.

986. Nota 981. Ja no ho tornarem a repetir.

987. Òbviament, el cercle màxim de l'esfera gran és més gran que el de l'esfera petita, ja que els radis dels cercles màxims coincideixen amb els de les esferes i l'esfera gran té un radi més gran. Vegeu, per exemple, la demostració d'EIII 17.

988. Vegeu el problema 2 (pàgina 149).

989. Podria haver usat directament EVI 4? Vegeu el problema 2 (pàgina 149).

A més, $AC$ és paral·lel a $BF$.

Per tant, la línia $CFK$ és rectilínia.[990]

Però l'angle $\widehat{KFB}$ és recte. [EIII 18]

Per tant, l'angle $K\widehat{CA}B$ també ho és. [EIII 17]

En definitiva, el segment $KC$ és tangent a la circumferència del cercle $\bigcirc CDF$. [EIII 17]

Tirem les perpendiculars $CL$ i $FM$ al segment $AB$. [EI 12]

Si, mantenint fix $KX$, fem giravoltar una volta sencera
els semicercles $\frown XCD$ i $\frown GEN$
i els triangles $\triangle KCL$ i $\triangle KFM$,
llavors els semicercles es mouen segons les esferes [DXI 14]
i els triangles generen cons de bases els cercles de diàmetres $CE$ i $FH$ [EXI 18]
que són perpendiculars a l'eix $KL$
i tenen els centres dels cercles als punts $L$ i $M$.

El con és tangent a les superfícies de les esferes,
ja que el segment $KFC$ ho és als cercles $\bigcirc XCD$ i $\bigcirc GFN$ durant tot el moviment. ♠

I així hem establert la proposició. ♠

**E.2.2*a*$_2$** [Proposició 2] *Si una esfera n'il·lumina una de més gran, n'il·lumina més de la meitat.*

Considerem una esfera de centre $B$ il·luminada per una de més gran de centre $A$.

Afirmo que la part de l'esfera de centre $B$ il·luminada per la de centre $A$ és més gran que mitja esfera.

[*Demostració.*] Atès que les dues esferes són desiguals,
les comprèn un con que té el vèrtex a la banda de l'esfera més petita. [proposició 1][991]

Considerem aquest con i un dels plans que passen per l'eix. [nota 980, pàgina 310]

Aquest pla talla les esferes pels cercles $\bigcirc CDE$ i $\bigcirc FGH$, [DXI 14]
i el con pel triangle $\triangle CEK$. [DXI 18]

990. Vegeu el problema 2 (pàgina 149)

991. Les proposicions que s'indiquen fan referència a les del text.

És evident que, en el segment d'esfera petita,
la part que il·lumina l'arc de circumferència $\widehat{CDE}$ de base el cercle de diàmetre $CE$ de l'esfera gran
és l'arc de circumferència $\widehat{FGH}$ de base el cercle de diàmetre $FH$ —que és perpendicular a $AB$.

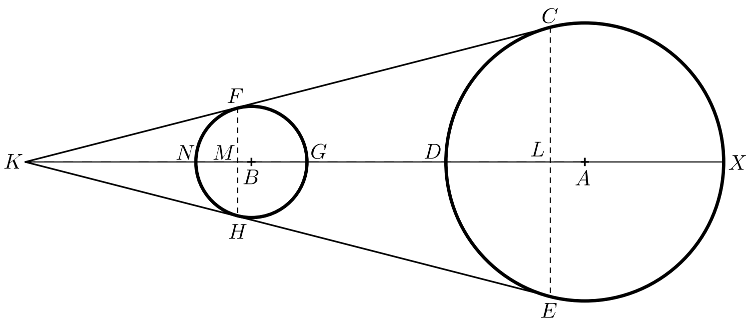



Figura E.6. Proposició 2

Per tant, l'arc de circumferència $\widehat{FGH}$ és il·luminat per l'arc de circumferència $\widehat{CDE}$,
ja que $CF$ i $EH$ són els raigs extrems.[992]

I el centre $B$ de l'esfera és dins del segment de cercle $\frown FGH$.

Per tant, la part il·luminada de l'esfera és més gran que la meitat d'aquesta esfera. ♠

**E.2.2*a*$_3$** [Proposició 3] *El cercle que delimita les parts il·luminada i fosca de la Lluna és el més petit possible quan el con que inclou el Sol i la Lluna té el vèrtex a l'ull.*
Suposem que el nostre ull és al punt $A$
i que $B$ és el centre del Sol.

Siguin $C$ i $D$ els [centres] de la Lluna,
quan el con que inclou el Sol i la Lluna té el vèrtex al nostre ull
i quan el vèrtex $O$ d'aquest con és en un altre lloc, respectivament (figura 3).

992. El text diu *radis*.

És evident que $A, B$ i $C$ estan alineats, és a dir, el punt $C$ es troba al segment $AB$.

Tirem el pla que passa pel segment $AB$ i que conté el punt $D$.[993]

Aquest pla talla les esferes en circumferències, [Dxi 14]
el con en segments rectilinis [Dxi 18]
i l'esfera en la qual es mou la Lluna en el cercle $\bigcirc CD$ [Dxi 14]
de centre el punt $A$. [hipòtesi 2]

En concret, talla l'esfera del Sol pel cercle $\bigcirc EFR$
i el de la Lluna pel cercle $\bigcirc HKL$,
quan el con que conté el Sol i la Lluna té el vèrtex al nostre ull.

I, quan no és així, ho fa pel cercle $\bigcirc MNX$.

Els cons d'eixos $AB$ i $BO$ també els talla pels segments $EA$ i $AG$, i $OP$ i $OR$, respectivament.

[*Demostració*.] Aleshores, el radi[994] del cercle $\bigcirc EFG$ és al del cercle $\bigcirc HKL$ com el radi del cercle $\bigcirc EFG$ al del cercle $\bigcirc MNX$. [Ev 7]

Ara bé, el radi del cercle $\bigcirc EFG$ és al del cercle $\bigcirc HKL$ com $BA$ és a $AC$, [Evi 4]
i el radi del cercle $\bigcirc EFG$ és al del cercle $\bigcirc MNX$ com $BO$ és a $OD$. [Evi 4]

Per tant, $BA$ és a $AC$ com $BO$ a $DO$. [Ev 11 o Nc 1]

I, *componendo*, $BC$ és a $AC$ com $BD$ a $DO$. [Ev 18]

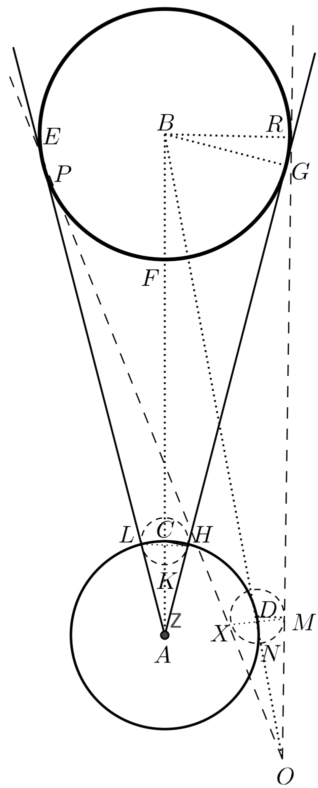


Figura E.7. Proposició 3

I, *permutando*, $BC$ és a $BD$ com $AC$ a $DO$. [Ev 16]

993. Nota 762 de Pla (2020), p. 425.

994. Els geòmetres grecs diuen «el segment que ix del centre» per referir-se al radi.

Ara bé, $BC$ és més petit que $BD$, [EIII 8 o EIII 18 i EI 47]
ja que $A$ és el centre del cercle $\bigcirc CD$.

Per tant, $AC$ és més petit que $DO$. [DV 5]

Però els cercles $\bigcirc HKL$ i $\bigcirc MNX$ són iguals.[995]

En conseqüència, $HL$ és més petit que $MX$. [pel lema][996]

Per tant, el cercle de diàmetre $HL$, que és perpendicular a $AB$, és més petit que el cercle de diàmetre $MX$, que ho és al segment $BO$.

Però el cercle de diàmetre $HL$, que és perpendicular a $AB$,
és el que delimita la part fosca i la il·luminada de la Lluna
quan el con que inclou el Sol i la Lluna té el vèrtex al nostre ull.

I el cercle de diàmetre $MX$, que és perpendicular a $BO$,
delimita totes dues parts
quan el con que inclou el Sol i la Lluna no té el vèrtex al nostre ull.

Així doncs, el cercle que delimita la part fosca i la il·luminada de la Lluna és mínim quan el con que inclou el Sol i la Lluna té el vèrtex al nostre ull. ♠

**E.2.2*a*$_4$** [Proposició 4] *El cercle que delimita la part fosca i la il·luminada de la Lluna no es distingeix del cercle màxim de la Lluna.*

Suposem que el nostre ull es troba al punt $A$
i que $B$ és el centre de la Lluna.

Unim $AB$. [P 1]

Considerem un pla pel segment $AB$. [nota 980, pàgina 310]

Aquest pla talla l'esfera [de la Lluna] en un cercle màxim. [nota 981, pàgina 311]

Sigui $\bigcirc ECGDF$ aquest cercle.

Òbviament, talla el con [que engloba la Lluna amb el vèrtex al nostre ull] pels segments rectilinis $AC, AD$ i $CD$.[997]

995. Recordem que són els que corresponen a la Lluna en posicions diferents del seu moviment de rotació el voltant de la Terra.

996. Aquest lema no es troba en l'obra d'Aristarc. Tanmateix, Commandino diu que la proposició 24 de l'*Òptica* d'Euclides el justifica. Vegeu el text D.3.1$b_{2d}$ (pàgines 292-293) o ORTIZ-GARCÍA (2000), p. 158, i, encara, el problema 3 (pàgina 150). De fet, és un porisma immediat d'EVI 8, iterat, Nc 1 i EI 47.

997. Aquí s'accepta que un pla que passa per l'eix d'un con recte el talla en dos segments laterals i en un a la base. Acceptem aquest fet de manera

Aleshores, el cercle de diàmetre $CD$, perpendicular al segment $AB$, separa la part fosca i la il·luminada de la Lluna.

Afirmo que [aquest cercle] no es distingeix del cercle màxim de la Lluna [pel que fa a la seva aparença].

[*Demostració.*] Pel centre $B$, tirem el diàmetre $EF$ del cercle $\bigcirc ECGDF$ paral·lel al [segment] $CD$. [EI 31]

Dimidiem l'arc $\overset{\frown}{DF}$ [EIII 30]

i considerem dos arcs $\overset{\frown}{GK}$ i $\overset{\frown}{GH}$ iguals a aquesta meitat. [EIII 33]

Unim $BK, AK, AH$ i $BD$.

I, com que hem suposat que la Lluna subtendeix una quinzena part del signe de zodíac, [hipòtesi 6]

l'angle $\widehat{CAD}$ és igual a la quinzena part d'un signe.[998]

Però la quinzena part del signe del zodíac equival a $\frac{1}{180}$ de la circumferència completa.[999] [EV 15]

Per tant, l'angle $\widehat{CAD}$ equival a $\frac{1}{180}$ del cercle complet,

—és a dir, a $\frac{1}{180}$ part de quatre angles rectes. [EI 15 porisma, i NC 4]

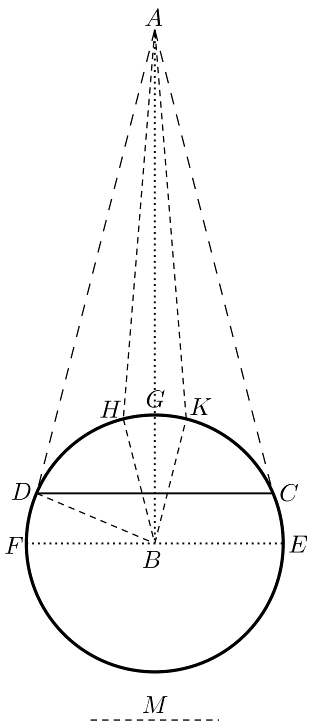



FIGURA E.8. Proposició 4

D'això en resulta que l'angle $\widehat{CAD}$ equival a $\frac{1}{45}$ d'un angle recte. [EV 15]

I l'angle $\widehat{BAD}$ ho fa a mig angle $\widehat{CAD}$. [EIII 36, EIII 18, EI 47 i EI 4]

Per tant, l'angle $\widehat{BAD}$ equival a $\frac{1}{45}$ de mig angle recte. [NC 6′ i NC 1]

natural. De fet, quan el triangle rectangle recorre mitja volta, genera un triangle isòsceles i qualsevol pla que passa per l'eix el determina.

998. Val la pena observar l'ús dels nombres i les fraccions —que hem posat entre cometes— en el text grec: καὶ ἐπτὶ ὑπόκειται ἡ σελήνη ὑπὸ «ιέ μέρος ζῳδιον» ὑποτείνουσα, ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΑΔ γωνία βέβηκεν ἐπὶ «ιε′ μέρος ζῳδιου».

999. I, τὸ δὲ τοῦ ζῳδίου τοῦ τῶν ζῳδίων ὅλον κύκλου «ἐστὶν ρπ′». Recordem que hi ha dotze signes del zodíac.

Però l'angle $\widehat{ADB}$ és recte. [proposició 1][1000]

Per tant, la raó entre l'angle $\widehat{BAD}$ i mig angle recte és més gran que la de $BD$ i $AD$.[1001]

D'això en resulta que $BD$ és més petit que $\frac{1}{45}$ part de $AD$.
[per transitivitat]

O sigui que $BG$ és molt més petit[1002]
que $\frac{1}{45}$ part de $AB$[1003]
i, *separando*, $BG$ ho és que $\frac{1}{44}$ part de $AG$. [Ev 17][1004]

I, d'acord amb això, $BH$ també és molt més petit que $\frac{1}{44}$ part de $AH$. [Di 1 i Eiii 8][1005]

I la raó que hi ha entre $BH$ i $AH$ és més gran que la dels angles $\widehat{BAH}$ i $\widehat{ABH}$.[1006]

Per tant, l'angle $\widehat{BAH}$ és més petit que $\frac{1}{44}$ part de l'angle $\widehat{ABH}$.
[per substitució]

Ara bé, l'angle $\widehat{HAK}$ és el doble del $\widehat{BAH}$
i el $\widehat{HBK}$, el doble del $\widehat{ABH}$.

Per tant, l'angle $\widehat{HAK}$ és més petit que $\frac{1}{44}$ del $\widehat{HBK}$. [Ev 15]

Però els angles $\widehat{HBK}$ i $\widehat{DBF}$ són iguals, [per construcció]

---

1000. Vegeu la nota 991 (pàgina 313). Ja no ho tornarem a repetir.

1001. Vegeu el problema 4 (pàgina 150), que explicita trigonomètricament la desigualtat que aplica Aristarc.

1002. El text grec diu: πολλῷ ἐλάσσων. Heath recorda que els geòmetres grecs, fins i tot Euclides, usaven les expressions πολλῷ μείζων i πολλῷ ἐλάσσων per a referir-se a «*a fortiori* més gran» i «*a fortiori* més petit». Heath (1913), nota 2, p. 367.

1003. Atès que $AB$ és la hipotenusa del triangle rectangle $\triangle ADB$ i $AD$ n'és el catet [Eiii 7].

1004. Si $\frac{BA}{BG} > \frac{45}{1}$, aleshores $\frac{BA-BG}{BG} > \frac{45-1}{1}$. O sigui, $\frac{AGF}{BG} > \frac{44}{1}$.
Fixem-nos que Aristarc aplica una operació vàlida per a les proporcions [Ev 17] a desigualtats entre raons.

1005. Els segments $BG$ i $BH$ són dos radis del cercle $\bigcirc GFE$ [Di 15] i, per tant, són iguals i $AH > AG$. [Eiii 8].

1006. És una conseqüència immediata de la proposició 10 del llibre primer de la *Sintaxi matemàtica* de Ptolemeu, que veurem en el volum quart d'aquesta *Història de la matemàtica grega*. De fet, aquesta proposició és equivalent a la desigualtat trigonomètrica: «Si $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, aleshores $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$.» El lector interessat a veure'n la demostració pot consultar el problema 5 (pàgina 152). Heath (1913), nota 1, p. 368.

el $\widehat{DBF}$ ho és al $\widehat{CDB}$ [Ei 28]
i el $\widehat{DBF}$ al $\widehat{DAB}$. [1007]

Per tant, tots quatre angles són iguals. [Nc 1, iterat]

D'això en resulta que l'angle $\widehat{KAH}$ és més petit que $\frac{1}{44}$ de l'angle $\widehat{BAD}$. [per substitució]

Però l'angle $\widehat{BAD}$ equival a $\frac{1}{45}$ de mig angle recte.

En conseqüència, l'angle $\widehat{KAH}$ és més petit que $\frac{1}{3.960}$ d'angle recte.[1008]

Ara bé, qualsevol magnitud vista des d'aquest angle és imperceptible
i els arcs de circumferència $\overset{\frown}{KH}$ i $\overset{\frown}{DF}$ són iguals.

Per tant, l'arc de circumferència $\overset{\frown}{DF}$ encara és més imperceptible per a la nostra vista.[1009]

En efecte, si unim $AF$ i $DF$, [P 1]
l'angle $\widehat{DAF}$ és més petit que el $\widehat{KAH}$.[1010]

Per tant, els punts $D$ i $F$ es confonen.

I, per les mateixes raons, els punts $C$ i $E$ també ho fan.

I, d'acord amb tot això, els segments $CD$ i $EF$ tampoc no es distingeixen.

En definitiva, el cercle que delimita la part fosca i la il·luminada de la Lluna no el percebem diferent del cercle màxim de la Lluna. ♠

**E.2.2*a*$_5$** [Proposició 5] *Quan la Lluna se'ns mostra en la forma dicotòmica,*[1011] *el cercle màxim de la Lluna [paral·lel] al que delimita la part fosca i la il·luminada es troba en la direcció del nostre ull. És a*

1007. Són angles formats per segments perpendiculars i, per tant, $\widehat{KHB} = \widehat{DBF} = \widehat{CDB} = \widehat{BAD}$. Vegeu el problema 5 (pàgina 152).

1008. És un simple càlcul: $\widehat{HAK} < \frac{1}{44}\widehat{HBK} = \frac{1}{44}\widehat{BAD} = \frac{1}{44} \times \frac{1}{45} \times \frac{1}{2}$ angle recte, i $\frac{1}{2} \times \frac{1}{45} \times \frac{1}{44} = \frac{1}{3960}$.

1009. L'angle extern és més petit que el central.

1010. Vegeu l'ítem *b* del problema 5 (pàgina 152) i el comentari de Heath (1913), nota 1, p. 371. Una demostració senzilla és: l'angle $\widehat{AHK}$ del triangle $\triangle AHK$ és agut i, en canvi, l'angle $\widehat{ADF}$ del triangle $\triangle ADF$ és obtús. Hi apliquem Ei 32.

1011. És a dir, dividida en dues parts iguals —la part fosca i la il·luminada.

*dir, aquest cercle màxim i el nostre ull són coplanaris.*

[*Demostració.*] De fet, quan la Lluna se'ns mostra en la forma dicotòmica,
el cercle que divideix la part fosca i la il·luminada es troba en la direcció del nostre ull. [hipòtesi 3]

I el cercle màxim paral·lel al que delimita aquestes dues parts és indistingible d'aquest. [proposició 4]

Per tant, quan la Lluna se'ns mostra en forma diotòmica,
el cercle màxim paral·lel al cercle que delimita la part fosca i la il·luminada es troba en la direcció del nostre ull. ♠

**E.2.2*a*$_6$** [Proposició 6] *La Lluna es desplaça* [*en una òrbita*] *més baixa que la del Sol. I, quan es troba en la forma dicotòmica, dista del Sol menys d'un quadrant.*[1012]

Suposem que el nostre ull es troba al punt $A$
i que $B$ és el centre del Sol.

Unim $AB$ [P 1]
i el perllonguem fins al punt $L$. [P 2]

Considerem el pla que passa per $AB$ i pel centre de la Lluna quan aquesta es troba en la forma dicotòmica.

Aquest pla determina un cercle màxim $\bigcirc CBD$ de l'esfera pel qual es desplaça el centre del Sol.

Pel punt $A$, tirem el segment $CAD$ perpendicular al segment $AB$. [EI 11]

L'arc de circumferència $\overset{\frown}{BD}$ és un quadrant. [EI 15 i EIII 26]

1012. Aquesta proposició és més simple del que palesa la demostració d'Aristarc, per reducció a l'absurd. Intuïtivament, es basa, de fet, en la figura adjunta, que completa l'observació dels dibuixos de les pàgines 141 i **??**.

Una altra qüestió que val la pena posar en relleu és el fet que parli de l'«òrbita del centre del Sol» i de l'«esfera on es mou el Sol» quan, de fet, com hem dit, el seu model és heliocèntric.

És un dels punts febles dels pioners d'un nou model.

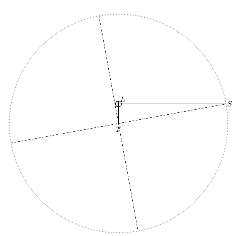


Figura E.9, auxiliar

Afirmo que:

*a*) La Lluna es desplaça en una òrbita que es troba a sota de la del Sol.

*b*) Quan la Lluna es troba en la situació dicotòmica, dista del Sol menys d'un quadrant,

és a dir, el seu centre es troba situat entre els segments $AB$ i $AD$ i l'arc $\widehat{DEB}$.

Unim $BF$. [P 1]

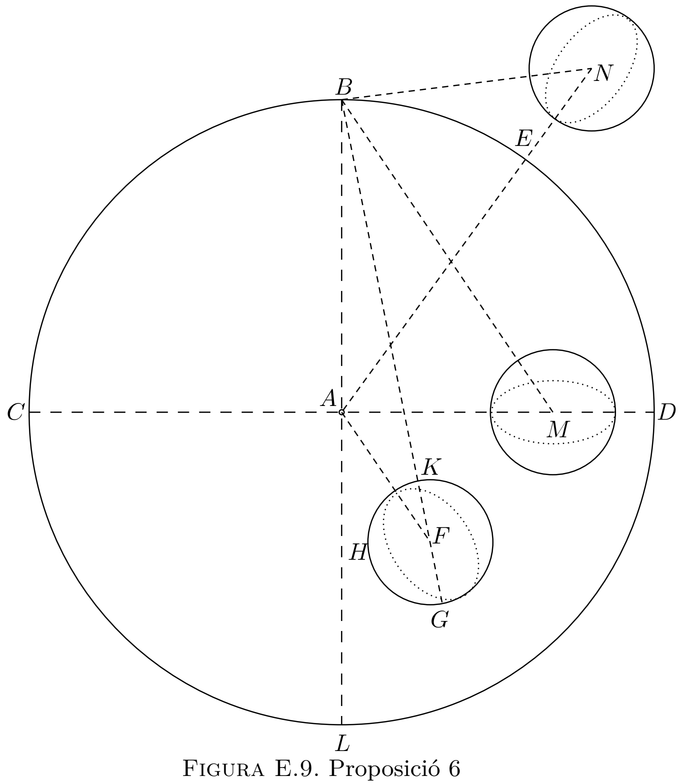



FIGURA E.9. Proposició 6

Aquest segment $BF$ és l'eix del con que engloba el Sol i la Lluna, i és perpendicular al cercle màxim.[1013] [proposició 1*b*]

1013. De fet, no és un cercle màxim, però s'hi troba molt a prop.

[*Demostració.*] *a*) Suposem que no és així.[1014]

$a_1$)[1015] Aleshores, el centre $F$ de la Lluna es troba entre els segments $DA$ i $AL$,

paral·lel al que delimita la part fosca i la il·luminada de la Lluna.[1016] [proposició 4]

Com que, en la forma dicotòmica de la Lluna, el nostre ull i el cercle màxim paral·lel al que delimita les parts fosca i il·luminada són coplanaris, [proposició 5]

podem unir $AF$. [P 1]

Aleshores, $AF$ es troba al pla del cercle $\bigcirc GHK$. [Exi 1]

I el segment $BF$ és perpendicular al [pla del] cercle $\bigcirc GHK$.

Per tant, també ho és a $AF$ [Dxi 3]

i, aleshores, l'angle $\widehat{BAF}$ és recte.

Però aquest angle $\widehat{BAF}$ també és obtús [per la hipòtesi de l'absurd] i això no és possible.

Per tant, el punt $F$ no es troba dins l'angle $\widehat{DAL}$. ♠

Afirmo que tampoc no pot ser al segment $AD$.

$a_2$) Si hi és,[1017]

sigui el punt $M$.

Unim $BM$. [P 1]

Considerem el cercle màxim paral·lel al que dimidia [la Lluna] de centre el punt $M$.

Aleshores, amb el mateix raonament que hem fet abans,

resulta que l'angle $\widehat{AMB}$ és recte.[1018] [Ei 17]

Però l'angle $\widehat{BAM}$ també ho és.

I això és impossible.

1014. Hipòtesi de l'absurd.

1015. Disjunció de casos.

1016. Hem fet la representació dels cercles màxims d'acord amb les figures de la traducció de Wallis que, en realitat, són falses perquè volen reflectir els casos que planteja la hipòtesi de l'absurd.

1017. Hipòtesi de l'absurd.

1018. El text grec —*κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεραι ἡ ὑπὸ BMA γωνία ἀρθὴπρὸς τὸν μέγιστον κύκλον*— és estrany. Vegeu Heath (1913), nota 1, p. 374-375.

Per tant, el centre de la Lluna, quan es troba en la forma dicotòmica, no és al segment $AD$. ♠

En conseqüència, es troba entre els segments $AB$ i $AD$. ♠

Ara afirmo que és a l'interior de l'arc $\widehat{BED}$.

Si no és així, [1019]
n'es fora.

Suposem que és el punt $N$.

Fem la mateixa construcció.

Podem establir que l'angle $\widehat{ANB}$ és recte.

Per tant, $AB$ —que és la hipotenusa del triangle rectangle $\triangle\, ANB$— és més gran que $AN$ —que és un catet. [E I 47]

Però els segments $AB$ i $AE$ són iguals. [D I 15]

Per tant, $AE$ és més gran que $AN$. [per substitució]

I això és impossible.

En definitiva, el centre de la Lluna, durant la seva dicotomia, no pot ser fora de l'arc $\widehat{BED}$. ♠

De manera semblant, es demostra que no pot ser damunt l'arc $\widehat{BED}$. ♠

Es troba, doncs, a l'interior de l'arc del quadrant.

Per això, l'òrbita de la Lluna es troba a sota de la del Sol. ♠

*b*) En la situació de la forma dicotòmica,
la Lluna dista del Sol menys d'un quart de circumferència. ♠

**E.2.2*a*$_7$** [Proposició 7] *La distància de la Terra al Sol és* a*) més gran que divuit vegades la de la Terra a la Lluna, però* b*) més petita que vint vegades aquesta distància.*

Siguin els punts $A$ i $B$ els centres del Sol i de la Terra.

Unim $AB$ [P 1]
i el prolonguem. [P 2]

Sigui $C$ el centre de la Lluna quan es troba en la situació dicotòmica.

Considerem el pla que conté el segment $AB$ i el punt $C$.
[nota 980, pàgina 310]

1019. Hipòtesi de l'absurd.

Sigui $\bigcirc ADE$ el cercle màxim en el qual aquest pla talla l'esfera en la qual es mou el centre del Sol. [nota 981, pàgines 311–311]

Unim $AC$ i $CB$ [P 1]

i prolonguem $BC$ fins al punt $D$. [P 2]

Atès que el punt $C$ és el centre de la Lluna quan es troba en la situació dicotòmica,

l'angle $\widehat{ACB}$ és recte. [nota 1012, pàgina 320]

[*Demostració*.] *a*) Pel centre $B$ tirem $BE$ perpendicular a $AB$. [EI11]

L'arc $\overset{\frown}{DE}$ és, doncs, la trigèsima part del $\overset{\frown}{ADE}$,

ja que, d'acord amb una de les hipòtesis, la distància de la Lluna

—que es troba en la situació dicotòmica—

és una trigèsima part menys que aquest quart. [hipòtesi 4][1020]

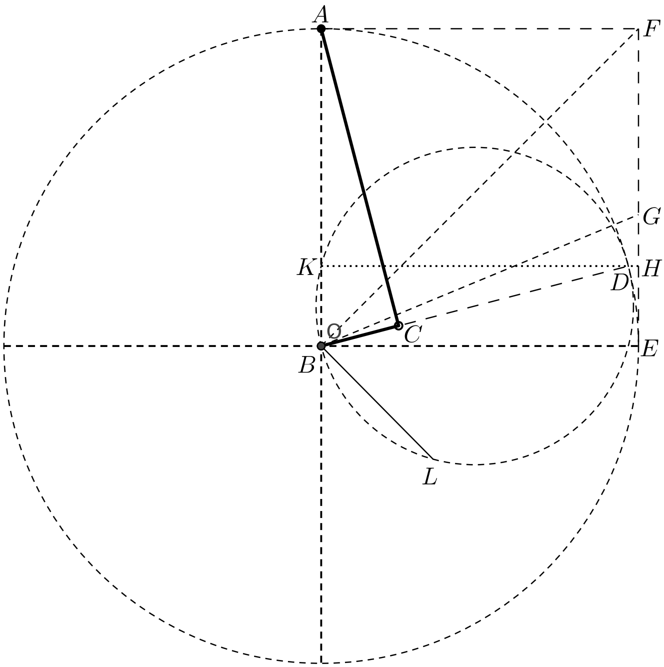



FIGURA E.10. Proposició 7

1020. L'angle $\widehat{ABC}$ val 27° [hipòtesi 4] i el $\widehat{BAC}$ val 3°. EI 32*b*, Nc 4 i Nc 3.

Per tant, l'angle $\widehat{CBE}$ també és la trigèsima part d'un angle recte.[1021]

Completem el paral·lelogram $\varparallelogram AE$[1022] [P 5]
i considerem la diagonal $BF$. [P 2]

Aleshores, l'angle $\widehat{EBF}$ equival a la meitat d'un angle recte.
[EI 5, EI 32, P 4, i Nc 3]

Ara, aquest angle $\widehat{EBF}$ el dimidiem pel segment $BG$. [EI 9]

Aleshores, l'angle $\widehat{EBG}$ equival a una quarta part de l'angle recte.
[Nc 6′]

Però l'angle $\widehat{DBE}$ és la trigèsima part d'un angle així. [EV 4][1023]

Per tant, l'angle $\widehat{EBG}$ és al $\widehat{DBE}$ com 15 a 2. [EV 4 iterat]

I, si un angle recte el considerem dividit en 60 parts iguals,
l'angle $\widehat{EBG}$ en conté 15 i el $\widehat{DBE}$ 2. [per substitució i EV 7]

Però la raó que hi ha entre $GE$ i $EH$ és més gran que la dels angles $\widehat{EBG}$ i $\widehat{DBE}$.[1024]

Per tant, la raó que hi ha entre el segment $EG$ i el $EH$ és més gran que la de 15 i 2. [per substitució]

Tenim, però, que $BE$ i $EF$ són iguals [DI 22][1025]
i que l'angle de vèrtex $E$ és recte. [per construcció]

Per tant, el quadrat de costat $FB$ equival al doble del de costat $BE$. [EI 47][1026]

Ara bé, el quadrat de costat $FB$ és al de costat $BE$ com el de costat $FG$ al de costat $GE$. [EVI 3][1027]

---

1021. L'angle central ve determinat per l'arc, i recíprocament.

1022. De fet, aquest paral·lelogram és un quadrat i el quart vèrtex és el punt $F$.

1023. Com veurem més endavant, aquest «element» s'usa moltíssimes vegades en el cas de la igualtat i el de la desigualtat.

1024. Vegeu la desigualtat trigonomètrica del problema 4 (pàgines 150-152). Observem també que, a la figura E.10, s'ha prolongat el segment $DK$ fins que talla el costat $EF$ pel punt $H$ [P 2 i P 5], essencial en la demostració. Però el segment $DK$ l'introdueix a la part $b$ de la demostració.

1025. Vegeu la nota 1022.

1026. PLA (2018), ítem $f_1$ del problema 52, p. 67.

1027. Si dues parelles de segments tenen la mateixa raó, les raons dobles corresponents també. Vegeu § 3.2.13 (pàgines 99-101). I, ara, pel teorema de la bisectriu [EVI 3], $\frac{FB}{BE} = \frac{FG}{GE}$.

En conseqüència, el quadrat de costat $FG$ equival al doble del de costat $GE$. [per substitució i Ev 4]

Ara bé, 49 és més petit que el doble de 25.[1028]

Per tant, la raó que hi ha entre el quadrat de costat $FG$ i el de costat $GE$ és més gran que la de 49 i 25. [Dv 7]

I, en conseqüència, la de $FG$ i $GE$ és més gran que la de 7 i 5.[1029]

Per tant, *componendo*, la raó entre $EF$ i $EG$ és més gran que la de 12 i 5, [Ev 18]

que és la de 36 i 15. [Ev 15]

Però hem vist que la raó que hi ha entre $EG$ i $EH$ és més gran que la de 15 i 2.

Per tant, *ex æquali*, la raó que hi ha entre $EF$ i $EH$ és més gran que la de 36 i 2, [Ev 22][1030]

o sigui, la de 18 i 1. [Ev 4]

Per tant, $FE$ és més gran que 18 vegades $EH$. [Dv 7]

Però, $FE$ i $BE$ són iguals. [Di 22]

Per tant, $BE$ és més gran que 18 vegades $EH$. [per substitució]

I, de retruc, $BH$ és encara més gran que 18 vegades $EH$. [Ei 47 i per transitivitat]

A més, per la semblança dels triangles rectangles,[1031]

$BH$ és a $HE$ com $AB$ a $BC$. [Evi 4]

Per tant, $AB$ és, doncs, més gran que 18 vegades $BC$. [per substitució]

1028. Aquí Aristarc fa servir l'aproximació de $\sqrt{2}$, $\frac{7}{5}$, que és la primera de les aproximacions successives que donen els nombres costat-diagonal. Aquesta aproximació, com hem vist a l'ítem *d* de l'exercici 4 (Pla (2016*b*), p. 301), ja era coneguda per Plató.

1029. Apliquem el resultat indicat a la nota 1026, però ho fem al cas de les desigualtats. En concret, si $\frac{EG^2}{EF^2} > \frac{49}{25}$, aleshores $\frac{EG}{EF} > \frac{7}{5}$.

1030. Però Aristarc projecta l'operació *ex æquali* sobre les desigualtats: «Si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} > \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ i $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} > \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}}$, aleshores $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} > \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}$.»

1031. En concret, dels triangles rectangles $\triangle BEH$ i $\triangle ACB$, ja que els angles $\widehat{BAC}$ i $\widehat{HBE}$ són iguals perquè tenen els costats corresponents perpendiculars i són aguts.

Ara bé, $AB$ és la distància del Sol a la Terra
i $BC$ la de la Lluna a la Terra.

D'això en resulta que la distància del Sol a la Terra és més gran que 18 vegades la de la Lluna a la Terra. ♠

*b*) Ara hem de veure que la distància de la Terra al Sol és més petita que vint vegades la de la Terra a la Lluna.

Pel punt $D$, tirem $DK$ paral·lel a $BE$. [EI 31][1032]

Considerem el cercle $\bigcirc BKDL$ que circumscriu el triangle rectangle $\triangle BDK$. [EIV 5]

El segment $BD$ és el diàmetre d'aquest cercle,
ja que l'angle de vèrtex $K$ és recte. [EIII 31]

Considerem el punt $L$ de la circumferència de manera que $BL$ és igual al costat de l'hexàgon [regular]. [P 3 i EIV 15 porisma][1033]

Atès que l'angle $\widehat{DBE}$ és $\frac{1}{30}$ part d'un angle recte,
l'angle $\widehat{BDK}$ també ho és. [EI 29]

Per tant, l'arc $\overset{\frown}{BK}$ és $\frac{1}{60}$ part de tota la circumferència [EIII 20]
i $\overset{\frown}{BL}$ n'és la sisena part. [per construcció i EIV 15]

En conseqüència, l'arc $\overset{\frown}{BL}$ és deu vegades el $\overset{\frown}{BK}$. [EV 4][1034]

Però la raó que hi ha entre tots dos és més gran que la dels segments $BL$ i $BK$.[1035]

Així, la línia $BL$ és més curta que deu vegades el segment $BK$.
[per construcció i DV 5]

Però el diàmetre $BD$ és el doble del costat $BL$. [EIV 15]

Per tant, $BD$ és més curt que 20 vegades el segment $BK$. [EV 4]

Però tenim que $BD$ és a $BK$ com $AB$ a $BC$.[1036]

Per tant, $AB$ és més curt que 20 vegades el segment $BC$. [DV 5]

Ara bé, $AB$ és la distància del Sol a la Terra
i $BC$ la de la Lluna a la Terra.

1032. Vegeu la nota 1024 (pàgina 325).
1033. De fet, $BL$ equival a la meitat del diàmetre $BD$.
1034. L'arc $\overset{\frown}{BL}$ és una sisena part de la circumferència.
1035. Vegeu el problema 6 (pàgina 152).
1036. Vegeu la nota 1031.

De tot això en resulta que la distància del Sol a la Terra és més curta que 20 vegades la de la Lluna a la Terra. ♠

I hem vist que aquesta primera distància és més llarga que 18 vegades la segona. ♠

**E.2.2*a*$_8$** [Proposició 8] *Quan el Sol està completament eclipsat, un con amb el vèrtex al nostre ull abraça el Sol i la Lluna.*[1037]

[*Demostració.*] Atès que quan el Sol s'eclipsa completament a causa d'una oposició [total] de la Lluna,
cau dins el con que abraça la Lluna i que té el vèrtex al nostre ull.

I, si el Sol es troba dins d'aquest con, pot fer dues coses:[1038]
*a*) Sobresortir-ne.
*b*) Omplir-lo del tot.

Si en sobresurt, no està completament eclipsat,
ja que la part que sobra no està tapada
i, per això, perquè no està amagada, la podem veure.[1039] ♠

En canvi, si no l'omple del tot,
el Sol roman eclipsat fins que ha recorregut la part de con que faltava.

Però està completament eclipsat[, per hipòtesi,]
i alhora no eclipsat, cosa que és clara per simple observació.[1040]

Per tant, l'omple del tot,
o sigui, que ni sobresurt ni es queda curt.

Per tant, el Sol s'ajusta completament al con de vèrtex el nostre ull que abraça la Lluna. ♠ ♠

**E.2.2*a*$_9$** [Proposició 9] *El diàmetre del Sol és més de 18 i menys de 20 vegades més gran que el de la Lluna.*[1041]

---

1037. És un element de la proposició següent i no va acompanyat de cap figura.

1038. Disjunció de casos.

1039. Usa el terme *παραλλάττοι*. Euclides, a E I 7 i E III 24, ja havia usat *παραλλάττειν* per a expressar «passar sense tocar».

1040. Heath (1913), nota 2, p. 383, ens fa adonar del fet que Aristarc no havia observat mai un «eclipsi anular» de Sol. La primera menció a aquest fet la trobem a *De cælo* de Simplici. Simplici (1894), llibre II, 12, 226a, p. 505.

1041. És un porisma immediat de la proposició 8.

Suposem que el nostre ull està situat al punt $A$.

Siguin $B$ i $C$ els centres del Sol i de la Lluna, respectivament, quan el con que abraça el Sol i la Lluna té el vèrtex al nostre ull, és a dir, quan els punts $A, C$ i $B$ estan alineats.

[*Demostració.*] Tirem un pla per $ACB$.

Aquest pla talla les esferes en cercles màxims i el con en segments rectilinis.

Suposem que els cercles màxims de les esferes són els cercles $\bigcirc FG$ i $\bigcirc HLK$, respectivament, i que els segments rectilinis del con són els segments $AFH$ i $AGK$.

Considerem els radis $CG$ i $BK$. [P 1]

Aleshores, $AB$ és a $AC$ com $BK$ a $CG$.

[EIII 19, EI 32 i EVI 4]

Però hem vist que $BA$ és més de 18 i menys de 20 vegades $AC$. [proposició 7]

Per tant, $BK$ també és més de 18 i menys de 20 vegades $CG$. [EV 13] ♠

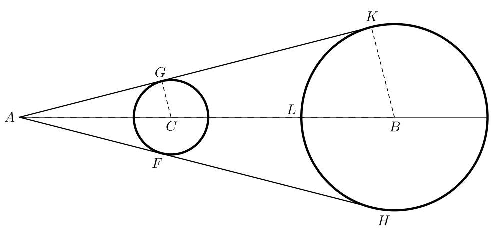


FIGURA E.11. Proposició 9

**E.2.2*a*$_{10}$** [Proposició 10] *La raó del Sol a la Lluna és més gran que la de 5.832 i 1, i més petita que la de 8.000 i 1.*[1042]

Siguin els segments $A$ i $B$ els diàmetres del Sol i de la Lluna, respectivament.

La raó que hi ha entre $A$ i $B$ és més gran que la de 18 i 1 i més petita que la de 20 i 1. [proposició 9]

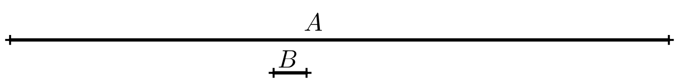


FIGURA E.12. Proposició 10

I, atès que la raó que hi ha entre els cubs de costats $A$ i $B$ és igual a la raó triple de $A$ a $B$,[1043]

1042. És un porisma immediat de la proposició 9. De fet, és un càlcul.

1043. Usa la composta de raons, i la raó triple és la raó al cub. PLA (2020), nota 147, pàgina 52, i § 3.2.13 (pàgines 99-101).

i que la raó de les esferes de diàmetre $A$ i $B$ també és igual a la raó triple dels diàmetres corresponents, [Exii 18]
llavors l'esfera de diàmetre $A$ és a la de diàmetre $B$ com el cub de costat $A$ al de costat $B$. [Nc 1]

Però el cub de costat $A$ té amb el de costat $B$ una raó que és més gran que la de 5.832 i 1,
i més petita que la de 8.000 i 1,
ja que la raó entre $A$ i $B$ és més gran que la de 18 i 1,
i més petita que la de 20 i 1.

I, per tant, la raó que hi ha entre el Sol i la Lluna és més gran que la de 5.832 i 1,
i més petita que la de 8.000 i 1. ♠

**E.2.2$\boldsymbol{a}_{11}$** [Proposició 11] *El diàmetre de la Lluna és* a*) menys de* $\frac{2}{45}$ *parts de la distància del centre de la Lluna al nostre ull i* b*) més de* $\frac{1}{30}$ *part d'aquesta distància.*
Suposem que el nostre ull és al punt $A$
i que el punt $B$ és el centre de la Lluna
quan el con que abraça el Sol i la Lluna té el vèrtex al nostre ull.

Afirmo que allò que enuncia aquesta proposició és cert.
[*Demostració*.] *a*) Unim $AB$ [P 1]
i tirem un pla que passa pel segment $AB$.

Talla l'esfera —la de la Lluna— per un cercle màxim
i el con per dos segments rectilinis.

Suposem que el cercle en el qual talla l'esfera és $\bigcirc CED$,
i els segments rectilinis en els quals talla el con, $AD$ i $AC$.

Unim $BC$ [P 1]
i el prolonguem fins al punt $E$. [P 2]

Ara és evident, d'acord amb el que ja hem establert, que l'angle $\widehat{BAC}$ és $\frac{1}{45}$ part de la meitat de l'angle recte. [proposició 4]

I també ho és que $BC$ és més petit que $\frac{1}{45}$ part de $CA$.

Per tant, $BC$ és molt més petit que $\frac{1}{45}$ part de $BA$. [Ei 47][1044]

I $CE$ és el doble de $BC$. [Di 15 i Di 17]

1044. El triangle $\triangle ABC$ és rectangle, $CA$ n'és un catet i $BA$ la hipotenusa.

Per tant, $CE$ és més petit que $\frac{2}{45}$ parts de $AB$.

Però $CE$ és el diàmetre de la Lluna

i $AB$ la distància que hi ha entre el nostre ull i el centre de la Lluna.

Per tant, el diàmetre de la Lluna és més petit que $\frac{2}{45}$ parts de la distància del nostre ull a la Lluna. ♠

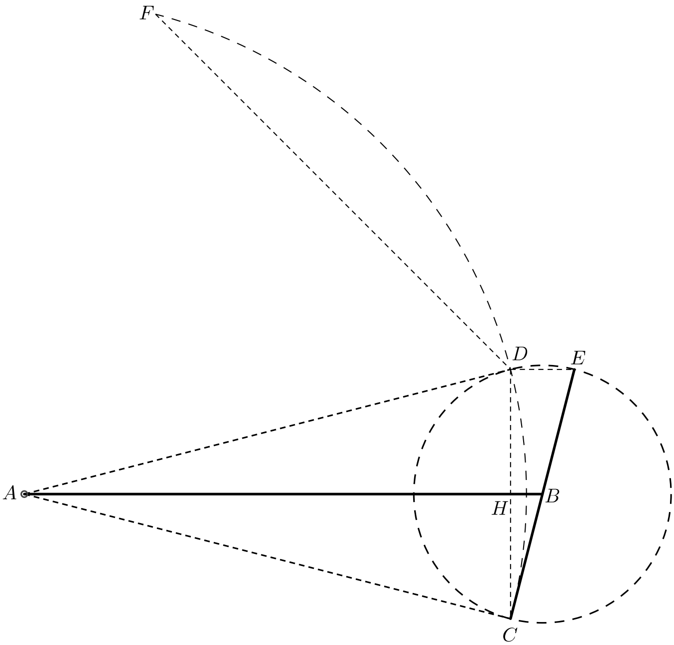



FIGURA E.13. Proposició 11

Afirmo que $CE$ és més gran que $\frac{1}{30}$ d'aquesta distància $AB$.

*b*) Unim $DE$ i $DC$, [P 1]

i tirem l'arc de cercle $\widehat{CDF}$, de centre $A$ i radi $AC$. [P 3]

Hi considerem una corda $DF$ igual a $AC$.[1045]

Ara, atès que els angles rectes $\widehat{EDC}$ i $\widehat{BCA}$ són iguals,

[EIII 18 i EIII 20, i Nc 4]

i els angles $\widehat{BAC}$ i $\widehat{HCB}$ també,[1046]

els angles que queden, $\widehat{DEC}$ i $\widehat{HBC}$, també ho són. [EI 32 i Nc 3]

1045. Vegeu EIV 1 i el fet que $DF$ és més curt que $CE$.

1046. Tenen els costats perpendiculars. Vegeu el problema 5 (pàgina 152).

En conseqüència, els triangles $\triangle CDE$ i $\triangle ABC$ són semblants i, per tant, $AB$ és a $AC$ com $CE$ a $CD$. [EVI 4]

I, *alternando*, $AB$ és a $CE$ com $AC$ a $CD$, [EV 16]
és a dir, com $DF$ a $CD$. [EV 7]

Però, de bell nou, atès que l'angle $\widehat{CAD}$ és $\frac{1}{45}$ part d'un angle recte, l'arc $\overset{\frown}{CD}$[1047] és $\frac{1}{180}$ part de tota la circumferència.[1048]

I l'arc $\overset{\frown}{DF}$ és la sisena part d'aquesta mateixa circumferència.[1049]

D'això en resulta que l'arc $\overset{\frown}{CD}$ equival a $\frac{1}{30}$ part del $\overset{\frown}{DF}$.[1050]

Aleshores, com que aquest $\overset{\frown}{CD}$ és més petit que l'arc $\overset{\frown}{DF}$, la raó que hi ha entre aquests és més petita que la que hi ha entre els segments $CD$ i $FD$.[1051]

Per tant, el segment $CD$ és més gran que $\frac{1}{30}$ del segment $DF$.[1052]

Però els segments $DF$ i $AC$ són iguals.

Per tant, $CD$ és més gran que $\frac{1}{30}$ part del segment $AC$.
[per substitució]

Però [hem vist que] el segment $CE$ és més gran que $\frac{1}{30}$ part de $AB$.
♠

I ja havíem establert que el segment $EC$ és més petit que $\frac{2}{45}$ parts d'aquest. ♠

**E.2.2*a*$_{12}$** [Proposició 12] a*) El diàmetre del cercle que separa la part fosca i la il·luminada de la Lluna és més petit que el diàmetre de la Lluna, i* b*) La raó entre els dos diàmetres és més gran que la de 89 i 90.*

---

1047. Com a arc de la circumferència de centre $A$ i radi $AC$.

1048. Una circumferència equival a quatre angles rectes. Només cal tirar dos diàmetres perpendiculars i aplicar P 4.

1049. Ja que, per construcció, és igual al radi i, per tant, és el costat de l'hexàgon regular inscrit [EIV 15 porisma].

1050. És un càlcul simple $2^o = \frac{1}{30}\,60^o$.

1051. Vegeu la nota 1006 (pàgina 318).

1052. Hem vist que $\overset{\frown}{CD} = \frac{\overset{\frown}{DF}}{30}$. O sigui, $\frac{\overset{\frown}{DF}}{\overset{\frown}{CD}} = 30$. I ara acabem de recordar que $\frac{\overset{\frown}{DF}}{\overset{\frown}{CD}} > \frac{DF}{CD}$. Per tant, $30 = \frac{\overset{\frown}{DF}}{\overset{\frown}{CD}} > \frac{DF}{CD}$. Per això, *invertendo*, $\frac{1}{30} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{DF}} < \frac{CD}{DF}$ i, de retruc, $DC > \frac{1}{30}\,DF$.

Siguin $A$ el nostre ull
i $B$ el centre de la Lluna quan el con que abraça el Sol i la Lluna hi té el vèrtex.

Unim $AB$. [P 1]

Considerem el pla que passa pel segment $AB$.

Aquest pla talla l'esfera de la Lluna pel cercle $\bigcirc DEC$
i el con —que abraça el Sol i la Lluna— pels segments $AD, AC$ i $CD$,
essent $CD$ un diàmetre del cercle que delimita la part fosca i la il·luminada de la Lluna.

Afirmo que:
*a*) $CD$ és més petit que el diàmetre de la Lluna. Però que:
*b*) $CD$ hi té una proporció més gran que la de 89 i 90.

[*Demostració*.] *a*) Que el diàmetre $CD$ és més curt que el de la Lluna és obvi.

Ara afegeixo que la raó entre el diàmetre $CD$ i el diàmetre de la Lluna és més gran que la de 89 i 90. ♠

*b*) Per veure-ho, pel punt $B$, considerem el diàmetre [de la Lluna] $FG$ paral·lel a $CD$, [EI 31]
i unim $BC$. [P 1]

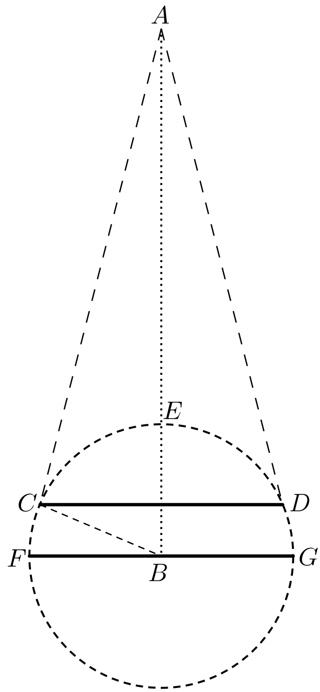



FIGURA E.14. Proposició 12

De les proposicions anteriors es dedueix que l'angle $\widehat{CAD}$ és $\frac{1}{45}$ part d'un angle recte[1053]
i que l'angle $\widehat{BAC}$ n'és $\frac{1}{90}$ part.[1054]

Ara bé, els angles $\widehat{BAC}$ i $\widehat{CBF}$ són iguals.[1055]

Per tant, l'angle $\widehat{CBF}$ també és $\frac{1}{90}$ part d'un angle recte, [Nc 1]

1053. En la proposició 4 ho dedueix de la hipòtesi 6.
1054. Ja que $AB$ és la bisectriu de l'angle $\widehat{CAD}$ [EI 47, EI 8 i i EIII 18].
1055. Tenen els costats perpendiculars.

és a dir, la norantena part de l'angle $\widehat{EBF}$.[1056]

En conseqüència, l'arc $\widehat{CF}$ és $\frac{1}{90}$ part del $\widehat{ECF}$.[1057]

Per tant, l'arc $\widehat{CE}$ és al $\widehat{ECF}$ com 89 a 90, [Ev 15][1058]
i l'arc $\widehat{CE}$ al $\widehat{ECF}$ també.

Ara bé, l'arc $\widehat{CED}$ equival al doble del $\widehat{CE}$ [Nc 2]
i $\widehat{FEG}$ al doble del $\widehat{ECF}$. [Nc 2]

Per tant, l'arc $\widehat{CED}$ és al $\widehat{FEG}$ com 89 a 90. [Ev 15]

Però la raó que hi ha entre els segments $CD$ i $FG$ és més gran que la dels arcs $\widehat{CED}$ i $\widehat{FEG}$.[1059]

Per tant, la dels segments $CD$ i $FG$ és més gran que la de 89 i 90. [per substitució] ♠

**E.2.2*a*$_{13}$** [Proposició 13] *El segment rectilini —la corda— que subtendeix la part interceptada, dins l'ombra de la Terra, de la circumferència del cercle els extrems del diàmetre del qual separen la part fosca i la il·luminada de la Lluna:* a*) és inferior al doble del diàmetre de la Lluna,* b*) la raó entre aquell i aquest diàmetre és més gran que la de 88 i 45,* c*) la raó entre aquell i aquest diàmetre és inferior a la novena part del diàmetre del Sol,* d*) la raó que hi ha entre aquell i aquest diàmetre és més gran que la de 22 i 225, i* e*) la raó entre aquell i el segment perpendicular a l'eix pel centre del Sol que toca els costats del con és més gran que la de 979 i 10.125.*

Siguin $A, B$ i $C$ els centres respectius del Sol, la Terra i la Lluna,
quan l'eclipsi esdevé total per primera vegada
i la Lluna cau totalment dins de l'ombra de la Terra.

Considerem el pla que passa pels punts $A, B$ i $C$. [P 1 i Exi 2]

Aquest pla talla les esferes en cercles,
i el con que comprèn el Sol i la Terra, en segments rectilinis.

Siguin, doncs, $\bigcirc DEF, \bigcirc GHK$ i $\bigcirc LMN$ els cercles màxims,

1056. Ja que aquest angle és recte.
1057. Vegeu la nota 967 (pàgina 306). Ja no ho tornarem a repetir.
1058. És un càlcul. Feu-lo.
1059. Vegeu la nota 1006 (pàgina 318).

i la part fosca de la Terra el [cercle] $\bigcirc OLN$ en la qual es mouen els extrems del diàmetre del cercle que separa la part fosca i la il·luminada de la Lluna.

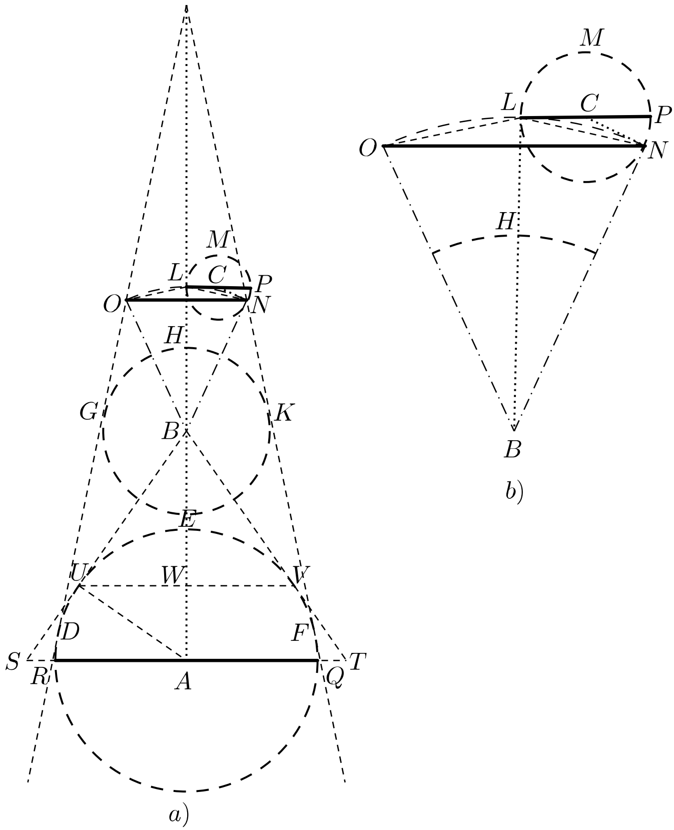



FIGURA E.15. Proposició 13[1060]

I siguin $DGO$ i $FKN$ segments rectilinis [de les generatrius] del con.
I, finalment, sigui $ABL$ l'eix.

[*Demostració*.] *a*) És obvi que l'eix $ABL$ és tangent al cercle $\bigcirc LMN$, ja que l'ombra de la Terra és de dues llunes, [hipòtesi 5]

1060. La figura és l'ítem *a*. L'ítem *b* l'hem afegit per aclarir la part superior de la figura *a*.

que l'eix $ABL$ dimidia l'arc $\widehat{NLO}$[1061]
i que la Lluna cau, per primera vegada, dins l'ombra de la Terra.

Unim $NO, LN, BN$ i $LO$. [P 1]

Aleshores, $LN$ és el diàmetre del cercle que separa la part fosca i la il·luminada de la Lluna.

I $BN$ és tangent al cercle $\bigcirc LNPM$,
atès que $B$ és el nostre ull
i $LN$ és el diàmetre del cercle que separa aquestes dues parts.[1062]

Ara, atès que $OL$ i $LN$ són iguals, [EIII 28 i EIII 29]
la seva suma és el doble de $LN$. [Nc 2]

Per tant, $ON$ és més curt que el doble de $NL$. [EI 20]

Unim $LC$ i $CN$. [P 1]

I $CN$ el prolonguem fins al punt $P$. [P 2]

Per tant, $ON$ és molt més curt que el doble de $LP$.
[EIII 7 i transitiva]

I, com que $CL$ és perpendicular a $BL$ [per $L$], [EIII 18]
és paral·lel a $ON$. [EI 27]

Per tant, els angles $\widehat{LON}$ i $\widehat{CLN}$ són iguals. [EI 29]

Però, a més, els segments $NL$ i $LC$ també ho són als segments $LO$ i $CN$, respectivament. [EI 4 i DI 15]

Per tant, els triangles $\triangle ONL$ i $\triangle LNC$ són semblants. [EVI 6]

En conseqüència, $ON$ és a $NL$ com $NL$ a $NC$. [EVI 4]

Però la raó que hi ha entre $NL$ i $LC$ és més gran que la de 89 i 45.
[proposició 12 i EV 13][1063]

En conseqüència, la raó entre els quadrats de costats $NL$ i $LC$ és més gran que la de 7.921 i 2.025. [EVI 20]

Per tant, la raó que hi ha entre el quadrat de costat $ON$ i $NL$ també ho és.[1064]

---

1061. Ja que $ABL$ és la bisectriu de l'angle $\widehat{OBP}$.

1062. Recordem que som a l'espai i que el cercle que separa aquestes dues parts de la Lluna és perpendicular al pla del dibuix. Tanmateix, en la representació plana, solament queda reflectit el diàmetre $LN$ d'aquest cercle.

1063. De fet, la proposició 12 estableix que $\frac{NL}{LP} > \frac{89}{90}$.

1064. Recordem que, per [EIII 7], $ON$ és més gran que $NL$.

D'això en resulta que la raó que hi ha entre $ON$ i $LP$ també és més gran que la de 7.921 i 4.050.[1065]

Però la de 7.921 i 4.050 és més gran que la de 88 i 45.[1066]

Per tant, la raó que hi ha entre $NO$ i $LP$ és més gran que la de 88 i 45. [per transitivitat]

En definitiva, el segment que subtendeix la circumferència del cercle en el qual es mouen els extrems del diàmetre que separa la part fosca i la il·luminada de la Lluna és més petit que el doble del diàmetre de la Lluna. ♠

*b*) Però manté amb aquest diàmetre una raó que és més gran que la de 88 i 45. ♠

*c*) Amb les mateixes suposicions,
pel punt $A$, tirem el segment $QAR$ perpendicular al segment $AB$.
[Ei 12]

Afirmo que $ON$ és més curt que $\frac{1}{9}$ part del diàmetre del Sol,
però que la raó entre ells és més gran que la de 22 i 225,
i amb $QR$ una de més gran que la de 979 i 10.125.

Hem vist que $ON$ és més curt que el doble del diàmetre de la Lluna que, al seu torn, és més curt que la $\frac{1}{18}$ del diàmetre del Sol.
[proposició 9]

Per tant, $ON$ és més curt que $\frac{1}{9}$ part d'aquest diàmetre.
[Ev 15 i substitució] ♠

*d*) I, a més, la raó que hi ha entre $ON$ i el diàmetre de la Lluna és més gran que la de 88 i 45,
mentre que la del diàmetre de la Lluna i el del Sol és més gran que la de 45 i 900,
ja que la raó que hi ha entre el diàmetre de la Lluna i el del Sol és més gran que la de 1 i 20.

---

1065. Tenim que $\frac{ON}{NL} = \frac{NL}{LC}$ [per la semblança dels triangles $\triangle LON$ i $\triangle CLN$]. Per tant, [*ex æquali*,] $\frac{ON}{LC} = \frac{ON^2}{NL^2} > \frac{7.921}{2.025}$. Per tant, $\frac{ON}{LP} > \frac{7.921}{4.050}$ [Ev 15].

1066. Si considerem $\frac{7.921}{4.050}$ en fracció contínua, obtenim l'aproximació $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{21+\frac{1}{2}}}$, que val $\frac{88}{45}$. Heath (1913), nota 1, p. 397, i p. 336. L'ús de les fraccions contínues devia ser una tècnica força coneguda, ja que també la trobem en Arquimedes.

Només l'hem de multiplicar per 45. [Ev 15]

Per tant, *ex æquali*, la raó que hi ha entre $ON$ i el diàmetre del Sol és més gran que la de 88 i 900,
que és la de 22 i 225. [Ev 15] ♠

*e*) Per $B$, tirem les tangents $BUS$ i $BVT$ al cercle $\bigcirc DE$. [Eiii 17]

Unim $UV$ i $UA$. [P 1]

Aleshores, el diàmetre del cercle que separa la part fosca i la il·luminada de la Lluna és al diàmetre de la Lluna com $UV$ al diàmetre del Sol
perquè el Sol i la Lluna es troben al con que té el vèrtex al nostre ull.

Ara bé, la raó que hi ha entre el diàmetre del cercle que separa la part fosca i la il·luminada de la Lluna i el diàmetre de la Lluna és més gran que la de 89 i 90. [proposició 12]

Per tant, la raó que hi ha entre $UV$ i el diàmetre del Sol també ho és. [Ev 13]

I la raó que hi ha entre $WU$ i $UA$ també.[1067]

Però $WU$ és a $UA$ com $UA$ a $AS$,
ja que els segments $SA$ i $UW$ són paral·lels. [Evi 4]

Per tant, la raó que hi ha entre $UA$ i $AS$ és més gran que la de 89 i 90, [Ev 13]
i la de $UA$ i $AR$ també. [Dv 7][1068]

Això mateix val per als dobles. [Ev 15 i Ev 13]

Per tant, la raó que hi ha entre el diàmetre del Sol i $QR$ és més gran que la de 89 i 90.

Però abans hem vist que la raó que hi ha entre $ON$ i el diàmetre del Sol és més gran que la de 22 i 225.

I, *ex æquali*, la raó que hi ha entre $ON$ i $QR$ és molt més gran que la dels productes de 22 per 89 i de 90 per 225,
és a dir, la de 1.958 i 20.250,
o, prenent les meitats, entre 979 i 10.125. [Ev 15] ♠ ♠

1067. Ja que el segment $WU$ és la meitat de $UV$ (perquè els triangles $\triangle BUW$ i $\triangle BUV$ són iguals) i $UA$ és el radi del Sol.

1068. Atès que $AR$ és més petit que $AS$.

**E.2.2*a*$_{14}$** [Proposició 14] *Considerem el segment que uneix els centres de la Terra i de la Lluna, i el que subtendeix l'arc de la part fosca de la Terra. La raó que hi ha entre el primer i el que talla el segon des de l'eix que passa pel centre de la Lluna és més gran que la de 675 i 1.*[1069]

Considerem la mateixa figura que abans però amb el centre de la Lluna situat a l'eix del con que abraça el Sol i la Terra.

Siguin $C$ el centre de la Lluna i $\bigcirc QPM$ el cercle màxim de l'esfera [en la qual es mou la Lluna] al mateix pla [que els esmentats centre i eix].

Unim $MP$. [P 1]

És clar que $MP$ és el diàmetre del cercle que separa la part fosca i la il·luminada de la Lluna.[1070]

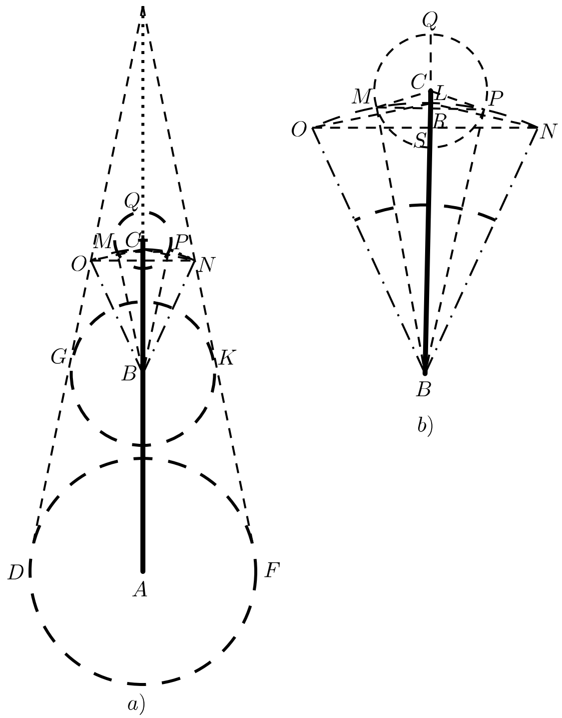



Figura E.16. Proposició 14

Unim $MB, BP, LO, OB$ i $MC$. [P 1]

[*Demostració.*] Els segments $MB$ i $BP$ són tangents al cercle $\bigcirc MPQ$, atès que $PM$ és un diàmetre del cercle que separa la part fosca i la il·luminada de la Lluna.[1071]

1069. La proposició diu que $\frac{CB}{CS} > \frac{675}{1}$. La figura E.16*b* amplia la part central de la E.16*a*, incorporant els punts $L$ i $R$.

1070. Vegeu la proposició 3 (pàgines 314-316).

1071. Vegeu la nota 1070.

I, com que els segments $OL$ i $MP$ són iguals [figura E.16*b*]
—ja que són dos diàmetres del cercle que separa aquestes parts de la Lluna—,[1072] [Di 15]
els arcs $\widehat{OML}$ i $\widehat{MLP}$ són iguals. [Eiii 27]

Per tant, els arcs $\overset{\frown}{OM}$ i $\overset{\frown}{LP}$ també. [Nc 3]

Però els arcs $\overset{\frown}{LM}$ i $\overset{\frown}{LP}$ són iguals. [Eiii 29][1073]

Per tant, els arcs $\overset{\frown}{OM}$ i $\overset{\frown}{LM}$ també. [Nc 1]

D'altra banda, els segments rectilinis $OB$ i $BL$ són iguals, atès que el punt $B$ és el centre de la Terra [Di 15]
i la Terra es comporta respecte de l'esfera en la qual es mou la Lluna com un punt i com el centre [d'aquesta esfera]. [hipòtesi 2]

I el cercle $\bigcirc MPQ$ es troba al mateix pla.

Per tant, el segment $BM$ és perpendicular al $OL$.[1074]

Ara bé, $CM$ també és perpendicular a $BM$. [Eiii 15]

I, en conseqüència, els segments rectilinis $CM$ i $OL$ són paral·lels. [Ei 29]

D'altra banda, $SO$ i $MR$ també ho són.[1075]

Per tant, els triangles $\triangle OSL$ i $\triangle MRC$ són semblants. [Evi 2]

Tenim, doncs, que $SO$ és a $MR$ com $SL$ a $RC$. [Evi 4]

Però $SO$ és més curt que el doble de $MR$.

Per tant, $ON$ és més curt que el doble de $MP$. [proposició 13]

En conseqüència, $SL$ també és més curt que el doble de $RC$. [Dv 7 o Ev 13]

I, en definitiva, $SR$ és molt més curt que el doble de $CR$.[1076]

Per tant, $SC$ és més curt que el triple de $CR$,[1077]

---

1072. Aquí Aristarc suposa que, quan el centre $C$ de la Lluna es troba al punt $M$, el diàmetre del cercle que separa la part fosca i la il·luminada de la Lluna és el segment $MP$.

1073. El segment $BC$ dimidia el sector circular $\triangleleft MBP$.

1074. Ja que dimidia la corda $OL$ [Eiii 3].

1075. Per construcció, perquè tots dos són perpendiculars a l'eix i Ei 27.

1076. El doble del segment $L$ és $MR$ que, com hem vist, és igual a $OL$. I $OL$ és la hipotenusa del triangle rectangle $\triangle OLS$ i, per Ei 47 o Eiii 7, $OS$ és més curt que $OL$.

1077. Tenim que $SR < 2\,CR$ i, aleshores, $SC := SR + RC < 2\,RC + RC := 3\,RC$.

la raó que hi ha entre $CR$ i $CS$ és més gran que la de 1 i 3. [Dv 7]

I, atès que $BC$ és a $BM$ com $CM$ a $CR$[1078]
i que la raó que hi ha entre $BC$ i $CM$ és més gran que la de 45 i 1, [proposició 11]
resulta que[, *permutando*,] la raó que hi ha entre $CM$ i $CR$ és més gran que la de 45 i 1.

Però la raó que hi ha entre $CR$ i $CS$ és més gran que la de 3 i 1.

Per tant, aplicant *ex æquali*, la raó que hi ha entre $CM$ i $CS$ és més gran que la de 45 i 3,
és a dir, la de 15 i 1.

Però hem vist que la raó que hi ha entre $BC$ i $CM$ és més gran que la de 45 i 1.

Per tant, novament *ex æquali*, la raó que hi ha entre $BC$ i $CS$ és més gran que la de 675 i 1. ♠

**E.2.2*a*$_{15}$** [Proposició 15] *La raó que hi ha entre el diàmetre del Sol i el de la Terra és*: a*) més gran que la de 19 i 3, i* b*) més petita que la de 43 i 6.*

Siguin $A$ i $B$ els centres del Sol i de la Terra,
i $C$ el de la Lluna en el moment en el qual l'eclipsi és total,
és a dir, en el qual els punts $A, B$ i $C$ estan alineats.

Considerem un pla que passa per l'eix.

Suposem que talla [les esferes d]el Sol i la Terra pels cercles $\bigcirc DEF$ i $\bigcirc GHK$,
l'ombra per la circumferència $\bigcirc NO$
i el con pels segments $DM$ i $FM$.

Unim $NO$. [P 1]

I, finalment, [per $A$,] tirem $PAQ$ perpendicular a $AM$. [Ei 11]

[*Demostració*.] *a*) Sabem que $NO$ és més petit que $\frac{1}{9}$ part del diàmetre del Sol. [proposició 13]

Per tant, la raó que hi ha entre $PQ$ i $NO$ és més gran que la de 9 i 1. [Ev 19]

I, de retruc, la de $AM$ i $MR$ també ho és. [Evi 4][1079]

1078. Els triangles rectangles $\triangle BMC$ i $\triangle MRC$ són semblants perquè tenen els costats $BC$ i $MR$, i $BM$ i $CM$ perpendiculars.

1079. Els triangles rectangles $\triangle MAQ$ i $\triangle MRO$ són semblants.

I, *convertendo*, la que hi ha entre $MA$ i $AR$ és més petita que la de 9 i 8. [Ev 17]

Però $AB$ és més gran que 18 vegades $BC$. [proposició 7]

Per tant, [$AB$] és molt més gran que 18 vegades $BR$. [per substitució]

En conseqüència, la raó que hi ha entre $AB$ i $BR$ és més gran que la de 18 i 1.

I, *invertendo*, la de $BR$ i $AB$ és més petita que la que hi ha entre 1 i 18. [Dv 13]

I, aleshores, *componendo*, la que hi ha entre $AR$ i $AB$ és més petita que la de 19 i 18. [Ev 18]

Però hem vist que la raó que hi ha entre $MA$ i $AR$ és més petita que la que hi ha entre 9 i 8.

I, aplicant *ex æquali*, la que hi ha entre $MA$ i $AB$ és més petita que la de 171 i 144, [Ev 22]
és a dir, la de 19 i 16,
atès que les parts tenen la mateixa raó que els múltiples. [Ev 15]

I, *convertendo*, la que hi ha entre $AM$ i $BM$ és més gran que la de 19 i 3. [Ev 17]

Ara bé, $AM$ és a $MB$ com el diàmetre del cercle $\bigcirc DEF$ al del cercle $GHK$.[1080]

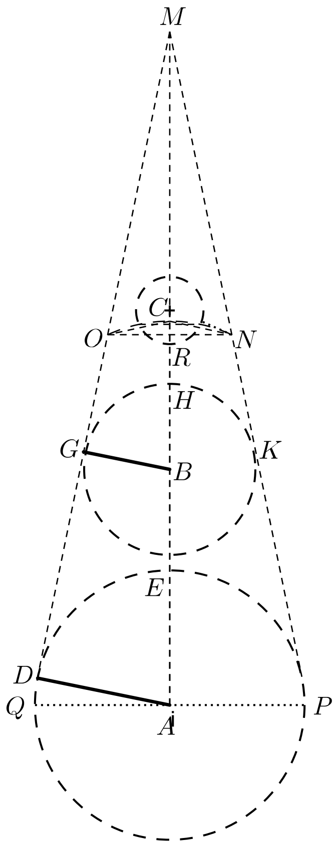



Figura E.17. Proposició 15

Per tant, la raó que hi ha entre els diàmetres del Sol i de la Terra és més gran que la de 19 i 3. [Ev 13] ♠

1080. Podem tirar el diàmetre del cercle $\bigcirc GHK$ perpendicular per $B$ a $MB$ [Ei 11] i usar la semblança dels triangles rectangles corresponents, o bé podem usar la semblança dels triangles rectangles $\triangle MGB$ i $\triangle MAD$, que són semblants perquè els segments $GB$ i $AD$ són perpendiculars a $MD$ i, per tant, paral·lels [Ei 28 i Evi 2].

*b*) Ara afirmo que aquesta raó és més petita que la de 43 i 6.

Sabem que la raó que hi ha entre $BC$ i $CR$ és més gran que la de 675 i 1. [proposició 14]

I, *convertendo*, la de $CB$ i $BR$ és més petita que la de 675 i 674. [Ev 17]

D'altra banda, la de $AB$ i $BC$ és més petita que la de 20 i 1. [proposició 7]

I, aplicant *ex æquali*, la de $AB$ i $BR$ és més petita que la de 13.500 i 674, [Ev 22]
és a dir, entre 6.750 i 337.

Aleshores, *invertendo* i *componendo*, la raó que hi ha entre $RA$ i $AB$ és més gran que la de 7.087 i 6.750. [Dv 5, Dv 13 i Ev 18]

Però, d'altra banda, la raó que hi ha entre $NO$ i $PQ$ és més gran que la de 979 i 10.125. [proposició 13]

Per tant, *invertendo*, la de $PQ$ i $NO$ és més petita que la de 10.125 i 979. [Dv 5 i Dv 13]

Però tenim que $PQ$ és a $NO$ com $AM$ a $MR$. [Evi 4][1081]

Per tant, la raó que hi ha entre $AM$ i $MR$ és més petita que la de 10.125 i 979. [Ev 13]

I, *convertendo*, la de $MA$ i $AR$ és més petita que la de 10.125 i 9.146. [Ev 17][1082]

Però, d'altra banda, la raó que hi ha entre $RA$ i $AB$ és més gran que la de 7.087 i 6.750.

I, aplicant *ex æquali*, la de $MA$ i $AB$ és més gran que la dels nombres que resulten dels productes de 10.125 per 7.087 i de 9.146 per 6.750,[1083] que és la de 71.755.875 i 61.735.500.

---

1081. Per la semblança dels triangles isòsceles $\triangle MON$ i $\triangle MQP$.

1082. En concret, $\frac{NO}{QP} > \frac{979}{10.125}$. Per tant, $\frac{QP}{NO} < \frac{10.125}{979}$ i, per la semblança dels triangles, $\frac{QP}{NO} = \frac{AM}{MR}$. I, *convertendo*, $\frac{AM}{AM-MR} = \frac{AM}{AR} > \frac{10.125}{10.125-979} = \frac{10.125}{9.146}$.

1083. Diu: «Δὶ ἴσου ἄρα ἕξει ἡ $MA$ πρὸς τὴν $AB$ μείζονα λόγον ἢ ὃ ὁ περιεχόμενος ἀριθμὸς ὑπὸ τῶν $\overset{\alpha}{M}$ρκε κα ό τῶν, ζπζ πρὸς τὸν περιεχόμενον ἀριθμὸν ὑπό τε τε̃ν, ϑρμς καὶ τῶν, ςψν, τουτέστιν, ὁ $\overset{\zeta\rho o\epsilon}{M}$, εωοερκε πρὸς, $\overset{\varsigma\rho o\gamma}{M}$. ἕχει δὲ καὶ ὁ $\overset{\zeta\rho o\epsilon}{M}$,εωοερκε πρὸς $\overset{,\varsigma,\rho o\gamma}{M}$ μείζονα λόγον ἢ ὃν τὰ πρΐς λζ.» Vegeu la nota 998 (pàgina 317).

Però aquesta raó és més gran que la de 43 i 37.[1084]

Per tant, la raó que hi ha entre $MA$ i $AB$ és més gran que la de 43 i 37. [per transitivitat]

I, *convertendo*, la raó que hi ha entre $AM$ i $BM$ és més petita que la de 43 a 6. [Ev 17][1085]

Ara bé, $AM$ és a $BM$ com el diàmetre del Sol i el de la Terra.[1086]

En conseqüència, la raó que hi ha entre el diàmetre del Sol i el de la Terra és més petita que la de 43 i 6. ♠

I també s'ha demostrat que aquesta raó és més gran que la de 19 i 3. ♠

**E.2.2*a*$_{16}$** [Proposició 16] *La raó que hi ha entre el Sol i la Terra és* a*) més gran que la de 6.859 i 27, i* b*) més petita que la de 79.507 i 216.*[1087]

Siguin $A$ i $B$ els diàmetres del Sol i de la Terra.

Veiem ara que l'esfera del Sol és a la de la Terra com el cub del diàmetre del Sol és al cub del diàmetre de la Terra,

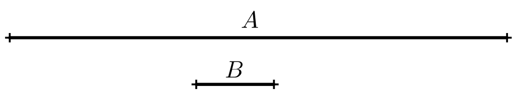



FIGURA E.18. Proposició 16

igual que en el cas de la Lluna. [proposició 10]

[*Demostració*.] Aleshores, la raó dels cubs de $A$ i $B$ és igual a la [del volum] del Sol i [el volum de] la Terra, [Exii 18]
més gran que la de 6.859 i 27,
i més petita que la de 79.507 i 216,
atès que la raó que hi ha entre $A$ i $B$ és més gran que la de 19 i 3
i més petita que la de 43 i 6. [proposició 15]

---

1084. Observem que $\frac{43}{37}$ és igual a $1+\frac{1}{6+\frac{1}{6}}$. Això s'obté desenvolupant la fracció $\frac{71.755.875}{61.735.500}$ o la $\frac{21.261}{18.292}$, que són la mateixa.

1085. Fem aquestes operacions: $\frac{RA}{AB} > \frac{7.087}{6.750}$ i $\frac{MA}{AR} > \frac{10.125}{9.146}$. Per tant, $\frac{MA}{AB} > \frac{71.755.875}{61.735.500} > \frac{43}{37}$. I, *convertendo*, $\frac{MA}{MA-AB} < \frac{43}{43-37}$. O sigui que $\frac{MA}{MB} < \frac{43}{6}$.

1086. Usem Evi 2 aplicat als triangles rectangles semblants $\triangle MDA$ i $\triangle MGB$, i Ev 15.

1087. S'entén la raó entre els volums del Sol i de la Terra. És un porisma immediat de la proposició 15.

De tot això en resulta que la raó que hi ha entre el Sol i la Terra:

*a*) És més gran que la de 6.859 i 27. ♠

*b*) És més petita que la de 79.507 i 216. ♠ ♠

**E.2.2*a*$_{17}$** [Proposició 17] *La raó que hi ha entre el diàmetre de la Terra i el de la Lluna és:* a*) més gran que la de 108 i 43, i* b*) més petita que la de 60 i 19.*

Siguin $A, B$ i $C$ els diàmetres del Sol, la Lluna i la Terra, respectivament.

[*Demostració.*] *a*) La raó que hi ha entre $A$ i $C$ és més petita que la de 43 i 6. [Aristarc, proposició 15]

I, *invertendo*, la raó que hi ha entre $C$ i $A$ és més gran que la de 6 i 43. [Dv 5 i Dv 13]

Però, a més, la raó que hi ha entre $A$ i $B$ és més gran que la de 18 i 1. [proposició 9]

I, *ex æquali*, la raó que hi ha entre $C$ i $B$ és més gran que la de 108 i 43. [Ev 22] ♠

*b*) D'altra banda, la raó que hi ha entre $A$ i $C$ és més gran que la de 19 i 3. [proposició 15]

I, *invertendo*, la raó que hi ha entre $C$ i $A$ és més petita que la de 3 i 19. [Dv 5 i Dv 13]

Però la raó que hi ha entre $A$ i $B$ és més petita que la de 20 i 1. [proposició 9]

I, finalment, *ex æquali*, la raó que hi ha entre $C$ i $B$ és més petita que la de 60 i 19.[1088] [Ev 22] ♠ ♠

**E.2.2*a*$_{18}$** [Proposició 18] *La raó que hi ha entre la Terra i la Lluna és* a*) més gran que la d'1.259.712 i 79.507, i* b*) més petita que la de 216.000 i 6.859.*[1089]

Siguin $A$ i $B$ els diàmetres de la Terra i la Lluna, respectivament.

[*Demostració.*] *a*) La raó que hi ha entre $A$ i $B$ és més gran que la de 108 i 43 i més petita que la de 60 i 19. [proposició 17]

---

1088. Les operacions són: $\frac{A}{C} < \frac{43}{6}$. Per tant, $\frac{C}{A} > \frac{6}{43}$. Però $\frac{A}{B} > \frac{18}{1}$. I, per tant, $\frac{C}{B} > \frac{6}{43} \times \frac{18}{1} = \frac{108}{43}$. D'altra banda, $\frac{A}{C} > \frac{19}{3}$. I, per tant, $\frac{C}{A} < \frac{3}{19}$. Però $\frac{A}{B} < \frac{20}{1}$. En definitiva, $\frac{C}{B} < \frac{3}{19} \times \frac{20}{1} = \frac{60}{19}$.

1089. Vegeu la nota 1087 (pàgina 344).

Per tant, la raó que hi ha entre els cubs de $A$ i $B$ és més gran que la d'1.259.712 i 79.507,
i més petita que la que hi ha entre 216.000 i 6.859.

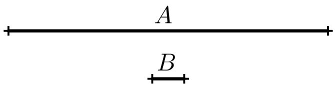



FIGURA E.19. Proposició 18

Però el cub de $A$ és al de $B$ com la Terra a la Lluna.

Per tant, la raó que hi ha entre la Terra i la Lluna:

*a*) És més gran que la d'1.259.712 i 79.507. ♠

*b*) És més petita que la de 216.000 i 6.859. ♠ ♠

# Les figures del text

La figura 1.2 (pàgina 12) representa Eudem de Rodes a l'*Escola d'Atenes* de Rafael (1509-1510). És de domini públic. En línia a <https://ca.wikipedia.org/wiki/Eudem_de_Rodes#/media/File:Eudemos_von_Rhodos.jpg>.[1090]

La figura 2.1 (pàgina 25) mostra el regne de Macedònia durant el regnat de Filip II. Va ser penjada a la xarxa el 15 d'agost de 2005. Es basa en les dades de l'obra de R. Ginouvès [*et al.*], *La Macédoine*, París, 1993.[1091] Té llicència Creative Commons.[1092] En línia a <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Map_Macedonia_336_BC-fr.svg>.

La figura 2.2 (pàgina 26) mostra un dibuix de la falange macedònia, publicat a May [*et al.*] (1984). Actualment és de domini públic. En línia a <http://es.wikipedia.org/wiki/Falange_macedonia#/media/File:Makedonische_phalanx.png>. Va ser penjat a Internet per AlagosCreative Commons.[1093]

La figura 2.3 (pàgina 27), de domini públic, mostra un medalló de victòria de Filip II. En línia a <http://ca.wikipedia.org/wiki/Filip_II_de_Maced%C3%B2nia#/media/File:Philip_II_of_Macedon_CdM.jpg>.

La figura 2.4 (pàgina 28) presenta Alexandre instruït per Aristòtil. És un gravat, de domini públic, de Charles Laplante, que es va incloure a Figuier (1866), tom 1, p. 134-135. En línia a <https://ca.wikipedia.org/wiki/Alexandre_el_Gran#/media/File:Alexander_and_Aristotle.jpg>. Va ser penjada a Internet per Jonund.

La figura 2.5 (pàgina 29) reprodueix el mapa de l'imperi que va aconseguir Alexandre el Gran durant la seva gesta de dotze anys (334 aC - 323 aC).

1090. Pla (2016*b*), p. 280.

1091. En línia a <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3336128d/f7.image.texteImage>.

1092. Totes les llicències Creative Commons són «Reconeixement-Compartir Igual» (CC BY-SA).

1093. Vegeu la nota 1092 (pàgina 347).

Té llicència Creative Commons.[1094] En línia a <http://ca.wikipedia.org/wiki/Alexandre_el_Gran#/media/File:MacedonEmpire.jpg>. La pàgina va ser creada el 24 de març de 2006 i penjada a Internet per Silvio Russo.

La figura 2.7 (pàgina 32) representa Ptolemeu I Soter. Es conserva al Museu del Louvre i és de domini públic. En línia a <https://ca.wikipedia.org/wiki/Ptolemeu_I_Sòter#/media/File:Ptolemy_I_Soter_Louvre_Ma849.jpg>.

La figura 2.8 (pàgina 35) representa les set meravelles del món antic. D'esquerra a dreta i de dalt a baix són: la piràmide de Kheops, els jardins penjants de Babilònia, el temple d'Àrtemis a Efes, l'estàtua de Zeus a Olímpia, el mausoleu d'Halicarnàs, el Colós de Rodes i el far d'Alexandria. És una obra de l'artista holandès, del segle XVI, Marten Heemskerk. Té llicència Creative Commons.[1095] En línia a <https://ca.wikipedia.org/wiki/Les_set_meravelles_del_món#/media/File:SevenWondersOfTheWorld.jpg>.

La figura 2.9 (pàgina 36) mostra la reconstrucció feta per Emad Victor Shenouda l'any 2006 i va ser penjada a Internet per Hannes Karnoefel el 25 de maig de 2007. Té llicència d'ús sempre que s'especifiquin els drets de l'autor. En línia a <https://ca.wikipedia.org/wiki/Far_d%27Alexandria#/media/File:PHAROS2006.jpg>.

La figura 2.10 (pàgina 40), de domini públic, evoca una possible estructura de la Biblioteca d'Alexandria. L'hem manllevat de l'obra de Don Heinrich Tolzmann, Alfred Hessel i Reuben Peiss, *The memory of mankind*, New Castle, DE, Oak Knoll Press, 2001. En línia a <https://fr.wikipedia.org/wiki/Bibliothèque_d%27Alexandrie#/media/Fichier:Ancientlibraryalex.jpg>, penjada a Internet per Quibik.

La figura 2.11 (pàgina 42) va ser penjada a Internet per Hajorĉommonswiki el mes de desembre de l'any 2002. Té llicència Creative Commons.[1096] En línia a <https://ca.wikipedia.org/wiki/Biblioteca_d%27Alexandria#/media/File:Egypt.Alexandria.BibliothecaAlexandrina.01.jpg>.

La figura 2.12 (pàgina 45) representa Ròmul i Rem alletats per una lloba, la Lloba capitolina. La il·lustració és de Jean-Pol Grandmont. Va ser penjada a la xarxa el dia 23 d'abril de 2013. L'estàtua és de bronze i es conserva als Museus Capitolins de Roma. Si bé es creia que era del segle V aC, estudis recents mostren que és del segle XIII i que, durant el Renaixement, Antoni de Pollaiuolo hi va afegir els dos bessons. Té llicència Creative Commons.[1097] En línia a <https://ca.wikipedia.org/wiki/R%C3%B2mul_i_Rem#/media/File:0_Lupa_Capitolina_%282%29.JPG>.

1094. Vegeu la nota 1092 (pàgina 347).
1095. Vegeu la nota 1092 (pàgina 347).
1096. Vegeu la nota 1092 (pàgina 347).
1097. Vegeu la nota 1092 (pàgina 347).

La figura 2.13 (pàgina 46) mostra l'escultura de Giambologna (1583) que es troba sota els arcs de la Loggia della Signoria (Florència, Itàlia). La fotografia, amb llicència Creative Commons,[1098] és de Ricardo André Frantz i data de 2005. En línia a <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Giambologna_rapto_dasabina.jpg>.

La figura 2.14 (pàgina 47) reprodueix un mapa esquemàtic de Roma amb els set turons històrics i la muralla serviana. Penjat a Internet el 29 novembre de 2011, té llicència Creative Commons.[1099] En línia a <http://ca.wikipedia.org/wiki/Fitxer:Seven_Hills_of_Rome.svg>.

La figura 2.15 (pàgina 49) mostra una fotografia de la muralla de Servi Tul-li. Té llicència Creative Commons. En línia a <https://ca.wikipedia.org/wiki/Muralla_Serviana#/media/File:Servian_Wall-Termini_Station.jpg>.

La figura 2.16 (pàgina 52) inclou un mapa de l'extensió de la República Romana abans de l'Imperi. Té llicència Creative Commons.[1100] En línia a <https://es.wikipedia.org/wiki/República_romana#/media/File:Roman_Republic-44BC.png>.

La figura 2.17 (pàgina 55) és una estàtua de Sébastien Slodtz (1704) que representa Anníbal comptant els anells dels nobles romans assassinats durant la batalla. Es conserva al museu del Louvre i és de domini públic. En línia a <https://en.wikipedia.org/wiki/Hannibal#/media/File:Hannibal_Slodtz_Louvre_MR2093.jpg>.

La figura 2.18 (pàgina 57) és un bust de bronze de Publi Corneli Escipió Africà. Es conserva al Museu Arqueològic Nacional de Nàpols i data del segle I aC. Es va trobar a la Vil·la dels papirs d'Herculà. La imatge és obra de Miguel Hermoso Cuesta i la va fer el 16 de juny de 2013. Té llicència Creative Commons.[1101] En línia a <https://en.wikipedia.org/wiki/Scipio_Africanus#/media/File:Escipión_africano.JPG>.

La figura 2.19 (pàgina 57) representa Anníbal arengant les tropes. És obra de Mbmrock, penjada l'11 de setembre de 2014. Té llicència Creative Commons.[1102] En línia a <https://es.wikipedia.org/wiki/An%C3%ADbal#/media/File:Cartago_anibal_arengando.jpg>.

La figura 2.20 (pàgina 61) és un bust de Pirros de l'Epir que es troba al Museu Arqueològic de Nàpols. És de domini públic. En línia a <https://ca.wikipedia.org/wiki/Pirros#/media/File:Pyrrhus.JPG>. Cercat l'1 de gener de 2008.

1098. Vegeu la nota 1092 (pàgina 347).
1099. Vegeu la nota 1092 (pàgina 347).
1100. Vegeu la nota 1092 (pàgina 347).
1101. Vegeu la nota 1092 (pàgina 347).
1102. Vegeu la nota 1092 (pàgina 347).

La figura 2.21 (pàgina 63) és un medalló amb l'efígie de Hieró II que es conserva a l'Altes Museum de Berlín. En línia a <https://es.wikipedia.org/wiki/Hierón_II#/media/File:Dinastieguiodella_greciaguiooccidentale,_hieron_II,_32_litriguiodi_siracusa,_274-216_ac_ca.JPG>, penjat a Internet el 7 de març de 2014 per Sailko. Té llicència Creative Commons.[1103]

La figura 2.22 (pàgina 64) mostra la tomba de Hieró II de Siracusa. Té llicència Creative Commons.[1104] En línia a <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HieroII_syracusa.jpg>.

La figura 2.23 (pàgina 68) és una escultura de marbre de Louis-Ernest Barrias, titulada *El jurament d'Espàrtac* (1871). Actualment es troba situada als Jardins de les Guilleries de París. És de domini públic. En línia a <https:// ca. wikipedia. org/ wiki/ Esp%C3%A0rtac#/media/File:Oath_Spartacus_Barrias_Tuileries.jpg>. Va ser penjada a Internet per Jastrow (Marie-Lan Nguyen) l'11 de març de 2007.

La figura 3.1 (pàgina 73) és de domini públic. En línia a <https://fr.wikipedia.org/wiki/Euclide#/media/File:EuclidStatueOxford.jpg>. És una fotografia personal de Mark A. Wilson que mostra una estàtua del Museu d'Història Natural de la Universitat d'Oxford.

La figura 3.2 (pàgina 74) és de domini públic. En línia a <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euklid2.jpg>. És un retrat de la sèrie «Homes famosos» de Just de Gant (∼1474), que l'anomena *Euclides de Mègara*, malgrat que representa Euclides, el geòmetra d'Alexandria. Es conserva a la Galeria Nacional de les Marques, a la ciutat d'Urbino.

La figura 3.3 (pàgina 80) és de domini públic i enfoca un fragment de l'*Escola d'Atenes* de Rafael (∼1510).[1105]

La figura 3.4 (pàgina 103) mostra una pàgina, amb marges, de l'edició dels *Elements* feta per Erhard Ratdolt, a Venècia, cap a l'any 1482. Té llicència Creative Commons.[1106] En línia a <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euclid's_Elements,_1482.jp>.

La figura 4.1 (pàgina 106) mostra la imatge d'Euclides segons un gravat del segle XVI. És de domini públic. En línia a <https://ca.wikipedia.org/wiki/Euclides#/media/File:Euklid-von-Alexandria_1.jpg>.

Les figures geomètriques les hem fet nosaltres amb GeoGebra.

1103. Vegeu la nota 1092 (pàgina 347).
1104. Vegeu la nota 1092 (pàgina 347).
1105. Pla (2016*b*), p. 280.
1106. Vegeu la nota 1092 (pàgina 347).

# Matemàtics i personatges citats

ABEL, fill petit d'Adam i Eva. Segons la narració del *Gènesi*, el primer pastor. Oferia sacrificis més grats a Déu que els del seu germà Caín, agricultor, que l'assassinà per enveja.

ABŪ-L-WAFĀ', al-Buzǧānī Muhàmmad (Buzǧan [Iran], 10 de juny de 940 - Bagdad [Iraq], 15 de juliol de 998), matemàtic àrab d'origen persa.

ADAM, «tel·lúric», el primer home, segons el *Gènesi*.

ADELARD DE BATH (Adelardus Bathensis) (Bath [Anglaterra], 1080 - Bath?, 1152), filòsof anglès del segle XII. És conegut per les seves traduccions al llatí d'obres científiques àrabs d'astronomia, filosofia, matemàtiques i astrologia, que inclouen antics textos grecs que, en la seva època, només existien en traduccions àrabs. Així foren introduïdes a Europa. En particular, els *Elements* d'Euclides sobre el text d'al-Hajjaj.

AECI (Ἀέτιος), filòsof eclèctic del segle II (∼150). És l'autor del *Recull de doctrines agradables* (*Περί τῶν ἀρεσκοντών συναγώγη*), conegut com a *Placita philosophorum*. Desenvolupà notablement les doctrines científiques dels pitagòrics.

AENOBARB, Gneu Domici (Cnaeus Domitius L. F. Cn. N. Ahenobarbus) (Roma [Itàlia], 9 de desembre de 17 aC - Santa Severa [Roma, Itàlia], 40 dC), pare de Neró. Feu construir la Via Domícia.

AGAMÈMNON (Ἀγαμέμνον), rei d'Argos que, d'acord amb la *Ilíada*, participà en la Guerra de Troia i esdevingué un dels màxims dirigents de l'exèrcit aqueu que assetjava la gran ciutat. Se l'anomena rei d'Argos o «rei de Micenes», capital del regne. Estava casat amb Clitemnestra i tenien el fill Orestes i les filles Crisòtemis, Electra i Ifigènia.

AGÀTOCLES (Ἀγαϑοκλῆς) (Himera, 361 aC - Siracusa, 289 aC), tirà de Siracusa i rei de Sicília. La seva història és coneguda gràcies a Diodor de Sicília i Justí.

AGUSTÍ, Aureli (Aurelius Augustinus), més conegut com a Agustí d'Hipona (Tagaste [Numídia], 13 de novembre de 354 - Hipona [Numídia], 28 d'agost de 430). És una de les figures més importants en el desenvolupament del cristianisme, considerat, de fet, com un pare de l'Església. La seva influència posterior és enorme i ultrapassa l'àmbit de la teologia. Se'l considera un dels pensadors fonamentals de la història occidental.

ÀIAX, personatge de la *Ilíada* que personifica la força física i cabdill de l'exèrcit grec. Era considerat el segon, després d'Aquil·les, pel seu valor en la lluita.

AL-BA'LABAKKĪ, Qusā ibn Lqā (Heliòpolis [Síria], entre el 820 i el 835 - Armènia, ∼912], metge, filòsof, matemàtic, astrònom, naturista i traductor. Fou clau en la transmissió dels coneixements grecs de l'antiguitat al món arabomusulmà.

AL-HAJJAJ IBN YÓSSUF IBN MATAR (?, 786 - ?, 833), matemàtic i traductor de Bagdad. No sabem res de la seva vida, solament que fou el primer traductor dels *Elements* d'Euclides i de la *Sintaxi matemàtica* de Ptolemeu a l'àrab, presumptament a partir d'originals en grec. Es considera que fou aquesta traducció la que Adelard de Bath feu servir a començaments del segle XII per a confegir la seva traducció al llatí.

AL-MA'MŪM (Abū al-'Abbās al-Ma'mūn 'Abd Allā ben Hārūn ar-Rašīd) (Bagdad [Iraq], 786 - prop de Tars [Turquia], 833). Conegut com a al-Mamūn, «aquell en qui es té confiança», fou el setè califa abbàssida. Fill de Harūn al-Rašid. Mutazilita,[1107] patrocinà nombroses traduccions a partir de la versió grega d'obres filosòfiques i científiques. Val la pena remarcar la seva creació d'un observatori astronòmic (829) a l'indret més elevat de Bagdad i de la Casa de la Saviesa (Bayt al-Hikma) (832). Hi ha qui ha definit aquesta institució com la primera universitat de la història però, sigui com sigui, la podem considerar la rèplica islàmica del museu d'Alexandria. Actuà com a centre de difusió del pensament islàmic durant diversos segles. Constava d'aules per a transmetre i debatre coneixements de diverses disciplines i un potent equip de traductors que s'inspiraven en llibres de diverses procedències. La seva activitat consolida la biblioteca més important de l'alta edat mitjana, destruïda pels mongols durant el Setge de Bagdad (1258). Els seus erudits actuaven també com a metges, arquitectes i assessors polítics.

AL-MANSUR (Abu-Jāfar Abd-Al·lāh al-Mansur ibn Muhāmmad ibn Alī), més conegut simplement com a al-Mansur (al-Humayma, a l'est del Jordà, ∼710 - camí de la Meca, 775). Califa abbàssida de Bagdad (754-775). Fundà una capital nova, la ciutat de Bagdad (Baġdād, «el do de déu») (762). Hi instal·là la cort (768) i la convertí en la capital del seu califat.

AL-RAŠĪD, Abu-Jàfar Hārūn, conegut simplement com a Hārūn al-Rašīd (Rayy [Mèdia Magna, Pèrsia, ara Iran], 27 de març de 763 - Tus [Razavi Khorasan, Pèrsia, ara Iran], 24 de març de 809), va ser el cinquè califa de la dinastia abbàssida de Bagdad. Governà des del 14 de setembre de 786 fins a la seva mort. El seu regnat representà l'apogeu de la dinastia i fou marcat per una gran prosperitat científica, cultural i religiosa. La seva reputació de geni intel·lectual, polític i militar el va fer el protagonista de diversos contes i llegendes, els més coneguts dels quals són els de *Les mil i una nits* (*Hazār-o yak xab*).

AL-SIJZÍ, Abu Said Ahmed ibn Muhàmmad ibn Abdul Jalil, que normalment s'abreuja al-Sijzí (Sejistan [actualment, una regió entre Iran i Afganistan], ∼945 – ?, ∼1020), matemàtic persa del segle X.

---

1107. L'Escola mutazilita és una escola teològica de l'islam qualificada tradicionalment de racionalista.

al-Tusī, Nāṣir (Tus [Iraq], 1201 - Bagdad [Iraq], 1274), astrònom, matemàtic i filòsof, autor del tractat d'ètica *Ahlāq-i nāṣirī*. És conegut, sobretot, per la seva activitat científica. Fundà i dirigí l'observatori astronòmic de Marga, on adaptà i traduí a l'àrab i al persa nombroses obres clàssiques, en especial d'Euclides i de Ptolemeu. Les seves taules astronòmiques *al-Zigˇ al-l-hānī* foren vigents fins al segle xv.

Alceu (Ἀλκαῖος) (Mitilene [Lesbos, Grècia], ∼620 aC - ∼580 aC), el més antic dels poetes lírics eòlics. Florí en la XLIV Olimpíada,[1108] en un temps en el qual, a Lesbos, es desenvolupava una lluita entre la noblesa i el poble.

Alcínous (Ἀλκίνοος), «ment poderosa», rei dels feacis i pare de Nausica.

Alcman (Ἀλκμάν) (Sardes [Lídia, Àsia Menor], ∼672 aC - ?, 612 aC), anomenat pels atenencs Alcmeó (Ἀλκμαίων), principal poeta líric espartà. Gran part de la seva poesia és eròtica.

Alcmene (Ἀλκμήνη), mare d'Hèracles.

Alexandre d'Afrodísia (Ἀλέξανδρος Ἀφροδισιεύς), escriptor nascut a Afrodísia, Cària. Visqué al final del segle ii i començaments del iii, i fou el crític més famós dels escrits d'Aristòtil.

Alexandre I de Macedònia (Ἀλέξανδρος ὁ Μακεγῆδών) (? - 454 aC), desè rei de Macedònia (498-454 aC).

Alexandre el Gran (Μέγας Αλέξανδρος) (Pella [Macedònia], 20 de juliol de 356 aC - Babilònia [Mesopotàmia], 10 de juny de 323 aC), fill de Filip II, el succeí com a rei de Macedònia (336-323 aC). Fou deixeble d'Aristòtil. Durant la seva gesta expansionista (334-323 aC) conquerí Egipte, Mesopotàmia i l'Imperi persa, i arribà a la frontera de l'Índia. És un dels líders polítics —i sobretot militars— més importants del món antic i, sense cap mena de dubte, una de les figures més atractives de la història de tots els temps.

Allman, George Johnston (Dublín [Irlanda], 28 de setembre de 1824 - 9 de maig de 1904), matemàtic irlandès. Estudià la història de

1108. En línia a <https://books.google.es/books?id=xqvrNyxc9wQC&pg=PA227&lpg=PA227>.

les matemàtiques antigues, que publicà en articles a l'*Encyclopaedia britannica*. El 1889 s'editą el llibre pel qual és més conegut: *Greek geometry from Thales to Euclid*.

Ambròs de Milà o Ambrosius (Trèveris [Renània-Palatinat], ∼339 - Milà [Imperi romà d'occident], 4 d'abril de 397), bisbe de Milà. Tingué un paper rellevant en la cristianització de l'Imperi romà, ja que l'any 388 aconseguí que tot l'Imperi quedés sota domini de sobirans catòlics ortodoxos.

Amílcar Barca (Barqa) (Cartago [Tunísia actual], ∼270 aC - Elx [Hispània], 228 aC), general i home d'estat cartaginès, líder de la família Barca, pare d'Anníbal i Asdrúbal Barca i sogre d'Asdrúbal. El nom *barca* deriva probablement del semita *barak* ('il·luminat'). Un altre possible origen del nom seria la ciutat de Barca a Cirenaica. La tradició que el fa fundador de Barcelona no té fonament històric i és molt improbable que Amílcar trenqués el pacte contret amb els romans de no traspassar l'Ebre [<http://www.bcn.cat/historia/pag/capitols/cap_01/en/crida/crida.htm>].

Amuli (Amulius), rei d'Alba Longa, fill de Proca i germà petit de Numitor, a qui va enderrocar. Segons Dionís d'Halicarnàs, regnà quaranta-dos anys (794-752 aC) abans de la seva deposició pels bessons Ròmul i Rem.

an-Naīrīzī, Abū-l-'Abbs̄ al-Faḍi ibn Ḥātim, conegut simplement com a an-Naīrīzī i, a l'occident cristià, com a Anaritius o Nazirius, matemàtic i astrònom persa dels segles IX i X.

Anaxarc (Ἀναξάργος), filòsof grec d'Abdera, de l'escola de Demòcrit, que va viure a la segona meitat del segle IV aC.

Andòcides (Ἁνδοκίδης) (Atenes [Grècia], 440-391 aC), un dels deu oradors àtics el treball dels quals es troba recollit en el *Cànon Alexandrí*. Pertany a l'antiga família dels cèrquides, que té l'origen en Hermes.

Andranòdoros o Andranòdor, gendre de Hieró II de Siracusa. Fou tirà de Sicília del 213 al 212 aC.[1109]

1109. Vegeu «Els tirans de Siracusa. Andranòdoros» (pàgina 65).

Andrònic de Rodes (Ἀνδρόνικος) (Rodes [Grècia], segle i aC), filòsof considerat un dels successors d'Aristòtil i capdavanter de l'escola peripatètica de Roma (58 aC).

Anfinomi (segle iv aC), filòsof i matemàtic grec, molt admirat per Procle.[1110]

Anníbal o Hanníbal (en fenici: *Hanni-baal*, 'el qui té el favor de Baal', *Barca*, 'el llampec') (Cartago [Tunísia], 247 aC - Bitínia [a prop de Bursa, Turquia], 182 aC), polític i cabdill militar de l'antic Imperi cartaginès. És conegut per les seves gestes durant la Segona Guerra Púnica. Travessant amb penúries els Pirineus i els Alps, conduí l'exèrcit de la península Ibèrica al nord d'Itàlia i a les portes de Roma. Vençut en la batalla de Zama (202 aC), que tingué lloc a la plana d'aquesta ciutat de Numídia, al sud-oest de Cartago, per Escipió l'Africà, es retirà a Bitínia.

Antemi de Tral·les (Ἀνθέμιος) (Tral·les [Lídia, Imperi bizantí, avui Istambul, Turquia], 474 - Constantinoble [Imperi bizantí, avui Istambul, Turquia], 533), notable arquitecte, matemàtic i professor.

Antifont de Rhamnous (Ἀντιφῶν) (Rhamnous [Grècia], 480 aC - Atenes [Grècia], 411 aC), orador grec nascut a l'Àtica. Era un sofista i se'l té pel primer que regulà la pràctica de l'eloqüència mitjançant lleis teòriques i que obrí una escola de retòrica.

Antígon el Borni (Ἀντίγονος) (?, ∼382 - ?, 301 aC), general macedoni que arribà a ser rei d'Àsia i Macedònia.

Antíoc de Macedònia (Ἀντιοχος) (?, 282 aC - ?, 147 aC), general de Filip II, pare de Seleuc Nicàtor.

Antíoc III de Síria (Ἀντιοχος Μέγας) (?, 282 - ?, 147 aC), rei de Síria del 223 al 187 aC. En començar a regnar es trobà amb un país revoltat i desfet. Agafà personalment el govern i el comandament de l'exèrcit i aconseguí subjectar el regne. Per això es feu anomenar *Gran Rei.* Amb l'ajut d'Anníbal s'enfrontà als romans durant la Guerra romanosiriana (192-188 aC),

1110. Curnow (2011), p. 21.

fou vençut i es veié obligat a signar una pau per la qual renunciava a una part del territori i era obligat a pagar un fort tribut. Morí assassinat.

Antípater (Ἀντίπατρος) (segle iv aC), general macedoni, regent del regne de Macedònia i pare de Cassandre.

Antípater de Sidó (Ἀντίπατρος Σιδώνιος) (segle ii aC), poeta grec autor de diversos epigrames. Morí força vell.

Apol·lo (Απόλλων), en la mitologia grega, déu del Sol, la bellesa, la música i la poesia. Posteriorment, en la mitologia romana, fill de Zeus i Leto, i germà bessó d'Àrtemis, la deessa de la cacera.

Apol·lodor Epicur (Ἀπολλόδωρος) (segle ii aC), mestre de filosofia, director de l'Escola epicúria atenenca i preceptor de Zenó de Sidó, segons Diògenes Laerci.

Apol·loni d'Alexandria o Eidògraf (Ειδογράφος) (? - ?, 175 aC), gramàtic grec. Cinquè bibliotecari de la Biblioteca d'Alexandria. En va ocupar el càrrec del 189 aC fins que morí. Treballà en les obres d'Homer i d'Aristòfanes, i va classificar i ordenar cronològicament els poemes de Píndar.

Apol·loni de Perge (Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος) (Perge [Grècia], ∼262 - ∼190 aC), geòmetra.

Apol·loni de Rodes (Απολλώνιος ο Πόδιος) (Alexandria [Egipte], ∼295 - ∼215 aC), escriptor, filòleg grec, deixeble de Cal·límac i company d'Eratòstenes. Quan tenia trenta anys, fou nomenat bibliotecari de la Biblioteca d'Alexandria (240-235 aC). La seva direcció va durar poc temps perquè es va haver d'exiliar a Rodes per la poca consideració que els seus conciutadans tingueren per la seva obra principal: el poema èpic *Argonàutiques* (*Ἀργοναυτικά*), que tracta de l'epopeia de Jàson i els seus companys —els argonautes (*αργοναύται*)— que, embarcats en la nau *Argo*, participaren en la cerca del velló d'or durant una expedició marítima cap a la Còlquida. És l'única obra èpica anterior a l'*Eneida* de Virgili i comparable amb l'*Odissea* d'Homer en mida i extensió. S'hi concedeix un lloc important a l'amor de Medea per Jàson.[1111]

Appi Claudi Caudex (Appius Claudius Caudex), cònsol[1112] el 264 aC. Dirigí les forces enviades per ajudar els mamertins. Desembarcà a Messana (Sicília) i derrotà les tropes conjuntes de Hieró II de Siracusa i els cartaginesos comandats per Hannó el Vell, i aixecà el setge de la ciutat. Fou derrotat davant Segesta, i deixà una guarnició a Messana i tornà a Roma.

Aquil·les (Ἀχιλλεύς), un dels herois més coneguts de la mitologia grega. Participà en la Guerra de Troia i és un dels personatges principals de la *Ilíada* d'Homer.

Arcàgat (Ἀρχάγαθος), fill del tirà Agàtocles de Siracusa.

Arcesilau de Pítana (Ἀρκεσιλαος) (?, 315 aC - ?, ∼241 aC), filòsof grec, deixeble d'Autòlic i Teofrast. Fou escolarca —*σχολάρχης*—[1113] de l'Acadèmia platònica i creador de la Nova Acadèmia (260-241 aC).

Ares (Ἀρης), déu de la guerra segons la mitologia grega. Fill de Zeus i Hera. Els romans l'identificaren amb Mart.

Areté (Ἀρήτη) —«sagrada» o «virtuosa»—, dona del seu oncle Alcínous, rei dels mítics feacis. Van ser pares de Nausica.

Aristarc de Samos (Αρίσταρχος) (Samos [Grècia], 310 - ?, 230 aC), astrònom.

Aristarc de Samotràcia (Αρισταρχος ὁ Σαμόθραξ) (Samotràcia [Grècia], ∼217 aC - Xipre [Grècia], ∼145 aC), gramàtic i crític alexandrí. Dedicà la vida a l'estudi i la crítica dels poetes grecs, especialment d'Homer. Dividí la *Ilíada* i l'*Odissea* en 24 llibres. Fou el més gran filòsof de l'escola dels alexandrins, deixeble d'Aristòfanes de Bizanci, al qual succeí com a director de la Biblioteca d'Alexandria vers el 153 aC. La connexió

1111. Apol·loni de Rodes (2002).

1112. DIEC (2007): «Magistrat que compartia amb un altre i per un any la magistratura investida amb la suprema autoritat en la República Romana.»

1113. «Director d'una escola filosòfica antiga», segons el DIEC (2007).

històrica del seu nom amb el criticisme literari ha fet que el terme *aristarc* s'associï a algú severament crític.

Aristeu de Crotona (Ἀρισταῖος), matemàtic del segle iv aC, també conegut com a Aristeu el Vell.

Arístil·los d'Alexandria (Ἀρίστυλλος) (Samos [Grècia], 320 aC - Alexandria [Egipte], 260 aC), astrònom grec que estudià i escrigué sobre les estrelles fixes. Els seus resultats foren adoptats per Hiparc i Claudi Ptolemeu.

Aristòcrit (Ἀπιστόκριτος) (segle iv aC), missatger de Pixòdar de Cària davant Filip II de Macedònia.

Aristòfanes (Ἀριστοφάνης) (448-380 aC), còmic i dramaturg grec.

Aristòfanes de Bizanci (Bizanci [Turquia], 257 aC - Alexandria [Egipte], ∼180 aC), escriptor grec que visqué a Alexandria durant els regnats de Ptolemeu II Filadelf i Ptolemeu III Evergetes. Fou director de la Biblioteca d'Alexandria.

Aristòtil (Ἀριστοτέλης) (Estagira [Grècia], 384 aC - Eubea [Grècia], 322 aC), filòsof. Se'l considera un dels grans pensadors de la humanitat.

Aristoxen de Tàrent (Ἀριστοξενος) (segle iv aC), filòsof peripatètic grec i important teòric de la música.

Arouet, François Marie (París [França], 21 de novembre de 1694 - 30 de maig de 1778), anomenat Voltaire, escriptor i filòsof del segle de les llums que marcà el segle xviii. Amb ell s'inicia la figura de l'intel·lectual compromès al servei de la veritat, la justícia i la llibertat de pensament. Fou elegit membre de l'Acadèmia francesa el 1746.

Arquimedes de Siracusa (Ἀρχιμήδης) (Siracusa [Sicília, ara Itàlia], 287-212 aC), matemàtic grec.

Arquites de Tàrent (Ἀρχύτας) (Tàrent [Magna Grècia, ara Itàlia], 400-347 aC), filòsof, matemàtic, general, estadista i científic de la Magna Grècia, considerat el més il·lustre dels matemàtics pitagòrics.

Arrià, Flavi (grec: Ἀρριανός; llatí: Lucius Flavius Arrianus) (Nicomèdia [Bitínia, Grècia] ∼95 - 180), historiador i filòsof grecollatí partidari de la filosofia estoica. Treballà a Atenes. Entre altres treballs, va escriure *Anabasis Alexandri* ('Expedició d'Alexandre'), una relació notable de l'expedició d'Alexandre el Gran.

Arrideu (Arrhidaeus, Arrhideos) (?, 359 aC - ?, 25 de desembre de 317 aC), germanastre d'Alexandre el Gran, fill de Filip II de Macedònia i de la ballarina Filinna de Làrissa. Es diu que era retardat i que això li venia d'una poció que li havia donat la reina Olimpíada per gelosia. A la mort d'Alexandre es feu nomenar Filip III Arrideu (Φίλιππος Γʹ ὁ Ἀρριδαῖος) i regnà del 323 al 317 aC.

Àrtemis (Ἄρτεμις), deessa de la caça i el regne animal, i germana bessona d'Apol·lo.

Asdrúbal (Cartago [Tunísia], ∼270 aC - Cartagena [Hispània], 221 aC), gendre d'Amílcar Barca i cunyat d'Anníbal, el gran general, i d'Asdrúbal Barca.

Asdrúbal Barca (Cartago [Tunísia], ∼270 aC - riu Vinapoló [Hispània], 221 aC), fill d'Amílcar Barca i germà d'Anníbal.

at-Tussí, Nàssir-ad-Din (Nàssir-ad-Din Abu-Jàfar Muhàmmad ibn Muhàmmad ibn al-Hàssan at-Tussí), conegut com a Nàssir-ad-Din at-Tussí (Tus [Iran], 1201 - Kadhimiya [Iraq], 1274), astròleg, astrònom, matemàtic, filòsof i metge persa.

Àtal, general de Filip II de Macedònia i oncle de la seva dona, Cleòpatra. Ultratjà el jove Pausànies, de noble família macedònia, que era un dels guardians personals del rei. Pausànies es queixà al seu sobirà però aquest no castigà Àtal, i, en venjança, el general l'assassinà durant un festival a Eges, el 336 aC.

Àtal III de Pèrgam (Filoméstor Evergetes) (Ἄτταλος Φιλομήτωρ Εὐεργέτης, «Amant de la mare, el Benefactor») (?, 170 aC - ?, 133 aC), rei de Pèrgam de 138 a 133 aC. El seu regnat fou ple de crueltats i a la seva mort donà el regne en heretatge a Roma, que el convertí en la província romana d'Àsia.

Atena (Ἀθηνᾶ), deessa grega de la saviesa, l'artesania i l'estratègia militar. També fou la protectora de la ciutat d'Atenes.

Atenió, cabdill, juntament amb Trifó, d'una revolta d'esclaus que tingué lloc a Sicília el 104 i el 103 aC.

Atis (Ἄττις), fill del rei Manes dels meonis i pare de Lido i Tirrè. Durant el seu mandat hi hagué una gran escassetat d'aliments a Meònia (Lídia, Àsia Menor).

Aurelià, Luci Domici (Lucius Domitius Aurelianus) (Pannònia?, ∼214 - prop de Bizanci, 275), emperador militar romà (270-275). Feu construir l'anomenada *muralla d'Aurelià*, per a la defensa de Roma dels vàndals i alamans.[1114] Un cop pacificada aquesta part de l'Imperi, hagué de guerrejar contra el regne de Palmira, on la reina Zenòbia s'havia alçat contra Roma. Prengué la ciutat (272-273), empresonà Zenòbia i, finalment, destruí l'indret. De retorn a Europa restaurà la unitat de l'Imperi romà i deixà fixat el *limes*[1115] al Rin i al Danubi. Morí assassinat.

Ausoni, Dècim Magne (Decimus Magnus Ausonius) (Bordeus [França], 310 - Lengon [França], 395), poeta llatí i mestre de retòrica nascut a Bordeus.

Autòlic de Pítana (Αὐτόλυκος ὁ Πιταναίος) (Pítana [Grècia], ∼360 aC - ?, ∼290 aC), matemàtic i astrònom, mestre d'Arcesilau de Pítana i autor de l'obra més antiga de matemàtica grega conservada sencera, *Petita astronomia.*

Baal, nom de la divinitat masculina suprema entre els pobles semites occidentals: fenicis, cananeus i, àdhuc, hebreus. Equival al Cronos grec.

Babini, José (Buenos Aires [Argentina], 10 de maig de 1897 - 18 de maig de 1984), historiador de la ciència, enginyer i matemàtic.

Barrias, Louis-Ernest (París [França], 13 d'abril de 1841 - 4 de febrer de 1905), escultor.

---

1114. Els alamans (en alemany: *alemannen*, en llatí: *alammani*) van ser una unió de tribus germàniques establertes a la part sud mitjana i inferior del riu Elba.

1115. Nom llatí que significava 'camí' i designava un camí militar fortificat, una frontera defensiva que s'estenia al llarg de centenars de quilòmetres. DIEC (2007).

Benét, Stephen Vincent (Bethlehem [Pennsilvània, Estat Units d'Amèrica], 22 de juliol de 1898 - 13 de març de 1943), escriptor, poeta i novel·lista. És molt conegut pel seu poema sobre la Guerra Civil nord-americana, «John Brown's Body», publicat el 1928, que li valgué el Premi Pulitzer el 1929. Adaptà el mite romà del rapte de les sabines en un relat curt, *The Sobbin' Women*, que fou la font del guió —realitzat per Albert Maurice Hackett, Frances Goodrich i Dorothy Kingsley— del film *Set núvies per a set germans*.

Berenice, nom de la mare d'Euclides. Això no obstant, era un nom comú entre les reines i princeses làgides; la germana de Ptolemeu I també se'n deia.

Berenice (Βερενίκη) (Cirene [Líbia], ∼267 aC - Alexandria [Egipte], 221 aC), esposa de Ptolemeu III. És recordada per Cal·límac en el poema «La cabellera de Berenice».

Bona Dea, en la mitologia de l'antiga Roma, és la deessa de la fertilitat, la castedat i la salut.

Brenne (Brennus) (segle IV aC), líder dels gals sesons. L'any 390 aC creuà els Apenins, vencé l'exèrcit romà en la batalla de l'Àllia, arribà a Roma i hi romangué fins a l'any 387 aC. La ciutat no tornaria a ser conquerida fins a l'arribada dels gods l'any 410.

Bretschneider, Carl Anton (Schneeberg [Alemanya], 27 de maig de 1808 - Gotha [Alemanya], 6 de novembre de 1878), matemàtic. Treballà en geometria, aritmètica i història de la geometria.

Briant, Pierre (Angers [França], 30 de setembre de 1940), historiador de l'antiguitat. Entre el 1999 i el 2012 ha estat titular de la càtedra Histoire et Civilisation du Monde Achéménide et de l'Empire d'Alexandre, al Collège de France.

Briàreu (Βριαρεως) —'vigorós'—, un dels hecatonquirs (grec: *εκατόνχειρες*; llatí: *centimani*), «els centmans». Són gegants de cent braços i cinquanta caps, fills d'Urà i Gaia. A la *Ilíada* d'Homer els homes l'anomenen Egeó (*Αίγαίον*), que també és el nom d'un déu marí fill de Thalassa (*Θάλασσα*), la deessa primordial del mar.

BRISÓ D'HERACLEA PÒNTICA (~450 - ~390 aC), filòsof sofista i matemàtic grec que contribuí, amb Antifont, a la solució sofista de la quadratura del cercle.

BROOKS, Richard (Filadèlfia [Estats Units d'Amèrica], 18 de maig de 1912 - Los Angeles [Califòrnia, Estats Units d'Amèrica], 11 de març de 1992), guionista i director de cinema.

CAÍN, primer fill d'Adam i Eva que, segons la narració del *Gènesi*, es dedicà a l'agricultura i, per enveja, matà el seu germà pastor Abel.

CALANOS (Κάλανος), un dels anomenats *gimnosofistes* indis, que seguiren l'exèrcit macedoni des de l'Índia acompanyant Alexandre el Gran.

CAL·LÍMAC (Καλλίμαϑοέ) (Cirene [Grècia], ~300 aC - Alexandria [Egipte], ~240 aC), poeta i erudit en llengua grega, un dels més destacats de la literatura alexandrina. Treballà a la Biblioteca d'Alexandria, de la qual fou director, i fou un protegit del faraó Ptolemeu II Filadelf. Autor del poema «La cabellera de Berenice».

CAL·LIP DE CÍZIC (Κάλλιππος) (Cízic [Grècia], ~370 - ?, ~300 aC), astrònom, deixeble d'un amic d'Èudox de Cnidos, a qui va seguir fins a Atenes per trobar Aristòtil.

CAMIL, Marc Furi (Marcus Furius Camillus) (?, 446-365 aC), militar, polític i magistrat romà, un dels més importants de la República Romana. El 394 aC clogué la pau amb els faliscs i, posteriorment, dirigí la guerra contra els eques, els hèrnics, els sènons i els volscs (389 aC). Diverses vegades dictador, morí a causa d'una plaga. Se'l considerà «el segon fundador de Roma».

CARACAL·LA, sobrenom de Lucius Septimius Bassanus, que els seus pares li canviaren pel de Marcus Aurelius Antoninus quan tenia set anys (Lugdunum [ara Lió, Gàl·lia], 4 d'abril de 186 - Harran [Turquia], 8 d'abril de 217). Regnà com a emperador romà del 211 fins al 217.

CARANOS DE MACEDÒNIA (Κάρανος) (Argos [Grècia], segle IX aC - Vergina [Grècia], VIII aC), rei heracleida de la família dels temènides, fundador mític de la dinastia argiva de Macedònia vers la meitat del segle VIII aC. Amb una ingent força militar ocupà Edessa, que rebatejà amb el nom d'Eges— va ser allí on establí la seu del govern d'acord amb un oracle. Aquesta ciutat fou, doncs, la capital del regne de Macedònia molt abans de Pel·la. Tanmateix, no el trobem ni en Heròdot ni en Tucídides.

CARES DE LINDOS (Ξάρης), escultor grec de Rodes que treballava el bronze.

CARMENTA (Καρμέντα), segons la mitologia grega, nimfa filla del déu fluvial Ladó, situat a l'Arcàdia. Estimada per Hermes, fou la mare d'Evandre. Juntament amb el seu fill, abandonà el seu país per anar al Laci, on els acollí Faune. Allà adoptà el nom amb el qual és coneguda. Es deia que havia modificat quinze lletres de l'alfabet grec i que havia inventat així el llatí, introduït al Laci pel seu fill. Morí a una edat molt avançada i Evandre l'enterrà al peu del Capitoli, on els romans li reteren culte.

CÀRMIDES (Χαρμιδης), personatge del diàleg *Càrmides* de Plató.[1116]

CARPOS D'ANTIOQUIA (Κάρποσ), matemàtic grec d'època desconeguda però que cal situar entre els segles II aC i III dC. Escrigué sobre mecànica, astronomia i geometria. Procle li atribueix un *Tractat d'astronomia* en el qual analitzava si els problemes, abans de ser problemes, havien estat teoremes. Diu que Carpos, en aquesta anàlisi, hauria estat crític amb Gemine. I li atribueix el concepte d'angle com a quantitat. Pappos, per la seva part, li assigna aplicacions pràctiques. I, segons Jàmblic, amb el propòsit de quadrar el cercle, construí una corba, que anomenava *corba generada per moviment doble.*

CARROLL, Lewis, pseudònim amb el qual és conegut en la història de la literatura Charles Lutwidge DODGSON (Daresbury [Cheshire, Anglaterra], 27 de gener de 1832 - Guildford [Surrey, Anglaterra], 14 de gener de 1898). Fou un sacerdot anglicà, lògic, matemàtic, fotògraf i escriptor britànic, conegut sobretot per les dues «Alícies»: *Alícia al país de les meravelles* (*Alice's adventures in Wonderland*, 1865) i *Alícia a través*

1116. PLATÓ (1932).

*de l'espill* (*Through the looking-glass, and what Alice found there*, 1871).

Cassandre (Κάσσανδρος) (segle III aC), epígon, rei *de facto* de Macedònia.

Cassiodor, Magne Aureli (Cassiodorus o Magnus Aurelius Cassiodorus) (Squillace [Itàlia], ∼485 - monestir de Vivarium, ∼585), polític, escriptor i monjo romà.

Catriste, matemàtic grec contemporani de Procle. Només en trobem una menció en un text d'ell.

Catul, Gai Lutaci (Catulus, Gai Lutaci), cònsol el 242 aC. Assolí el comandament d'una flota i, en la batalla de les Àgates, vencé els cartaginesos. Així Roma establí la seva superioritat naval al Mediterrani occidental. Signà un acord de pau amb Amílcar Barca, amb la condició que els cartaginesos evacuarien Sicília i no farien la guerra a Hieró II de Siracusa o als seus aliats, retornarien els presoners romans i pagarien 2.200 talents eubònics abans de vint anys com a compensació de guerra. Però el Senat Romà no el ratificà i imposà condicions més severes als enemics.

Catul, Gai Valeri (Catulus, Gaius Valerius) (Verona [Itàlia], ∼84 aC - ∼54 aC), el més important dels *poetæ novi* o *neoterici*, que intentaven assimilar la poesia en vers alexandrí al llatí.

Cauchy, Augustin Louis (París [França], 21 d'agost de 1789 - Sceaux [França], 23 de maig de 1857), matemàtic.

Cavalieri, Bonaventura (Milà [ara Itàlia], 1598 - Bolonya [ara Itàlia], 30 de novembre de 1647), jesuïta, matemàtic seguidor de Galileu i autor del mètode dels indivisibles.

Caveing, Maurice (Lió, 1923), filòsof i historiador de les matemàtiques de l'antiguitat, des de Mesopotàmia i l'antic Egipte a l'antiga Grècia.

Celer, segons Ovidi, qui edificà les primeres muralles de Roma. Segons Tit Livi,[1117] comandà els cèleres, una unitat militar

1117. Livi (2002), llibre 1, XV 8, edició catalana, volum I, p. 151.

romana de cavalleria, formada per centúries, de tres a cinc, encarregades de protegir el rei de Roma.

Censorí (Censorinus) (segle iii), gramàtic llatí. Escrigué, actualment perduts, *De metris*, que parlava dels tipus diferents de vers de la poesia llatina, i *De accentibus*, amb un cert prestigi entre els filòlegs de segles posteriors. S'ha conservat, però, *De Die Natali*, que és un compendi dels coneixements de l'època sobre el naixement i la vida de l'home. Explica l'origen de la humanitat, els moments que condueixen al naixement d'una persona (concepció, gestació i part), la seva relació amb la música i els astres, les edats de la vida humana, l'eternitat, el temps, la cronologia i les maneres de mesurar-la, i la influència de les estrelles i els genis sobre la vida.

Ceres, deessa de l'agricultura, les collites i la fecunditat, en la mitologia romana.

Chandragupta Maurya (sànscrit: Chandraguptamaurya; grec: Sandrocottus) (∼340 - ∼291 aC), fundador de la dinastia màuria (∼324 a 300 aC) i en fou el primer rei. La incursió d'Alexandre el Gran li feu prendre consciència que l'Índia necessitava un desenvolupament estatal centralitzat.

Chaplin, Saul (Brooklin [Nova York, Estats Units d'Amèrica], 19 de febrer de 1912 - Los Angeles [Califòrnia, Estats Units d'Amèrica], 15 de novembre de 1997), compositor i director musical que participà, amb Gene de Paul, Johnny Mercer i Adolph Deutsch, en la música de *Set núvies per a set germans*.

Chasles, Michel (Épernon [França], 15 de novembre de 1793 - París [França], 18 de desembre de 1880), matemàtic.

Ciceró, Marc Tul·li (Arpinium [Itàlia], 106 aC - Formia [Itàlia], 43 aC), polític, filòsof, escriptor i orador de l'antiga Roma. Se li coneix la vida gràcies a la biografia que en va escriure Plutarc, a les seves abundants epístoles —que encara es conserven— i al zel dels humanistes dels segles xv i xvi que copiaren els rars manuscrits dels seus discursos i obres.

Cinees (Κινέας), polític d'origen tessali, amic i ministre del rei Pirros de l'Epir. Era molt eloqüent i els seus discursos recordaven els de Demòstenes. Pirros deia que les paraules de Cinees havien conquerit més ciutats que les seves armes. Encara que era filòsof en la seva actitud vital, no s'hi va dedicar professionalment. Plutarc en fa una descripció breu.[1118]

CÍNTIA (Κυνθία), nom que prové del mont Cinto, a l'illa de Delos. Aquest epítet s'aplicava a la deessa de la Lluna, Àrtemis, que els romans anomenaven Diana.

CLAUDIÀ, Claudi (Claudius Claudianus) (Alexandria [Egipte], 370 - Roma [Itàlia], 405), poeta de llengua grega.

CLAVIUS, Christopher (Bamberg [Baviera, avui Alemanya], 25 de març de 1538 - Roma [avui Itàlia], 2 de febrer de 1612), jesuïta, matemàtic i astrònom. Se'l considera el pare del calendari gregorià. Era conegut com l'«Euclides del segle XVI». Confegí *Euclidis Elementorum Libri XV. Accessit XVI de solidorum regularium compartione. Omnes perspicuis demonstrationibus, accuratisque scholiis illustrati.*[1119]

CLEANTES (Κλεάνθης) (263-232 aC), filòsof estoic, deixeble de Zenó de Cítion.

CLEÒNIDES (Κλεονείδης) (segles III-IV), autor del tractat de música *Introducció a l'harmonia* (*Εἰσαγωγὴ ἁρμονική*), que potser es basa en un text anterior d'Euclides.

CLEÒPATRA DE MACEDÒNIA (Κλεοπάτρα) (Macedònia, ∼375 - 316 aC), reina de Macedònia (337-336 aC) i neboda d'Àtal, general de Filip II de Macedònia, que es casà amb ella quan es divorcià d'Olimpíada de l'Epir, el 337 aC.

CLITEMNESTRA (Κλυταιμνήστρα), esposa d'Agamèmnon, rei de Micenes, amb el qual tingué les filles Crisòtemis, Electra i Ifigènia, i el fill Orestes. Era d'origen espartà.

COMMANDINO, Federico (Urbino [ara Itàlia], ∼1506 - 5 de setembre de 1575), matemàtic i humanista del segle XVI.

CONÓ DE SAMOS (Χόνων) (Samos [Grècia], ∼280 aC - Alexandria [Egipte], ∼220 aC), matemàtic i astrònom del temps de Pto-

1118. PLUTARC (1926-1946), *Pirros*, edició catalana, volum XI, p. 17.
1119. CLAVIUS (1591).

lemeu II Filadelf i Ptolemeu III Evergetes. Fou mestre d'Arquimedes i se sap del cert que esdevingué amic seu.

Constantí I el Gran (Gai Flavi Valeri Aureli Constantí) (Naissus [Dàcia, ara a Sèrbia], 27 de febrer de 272 - Nicomèdia [Àsia Menor], 22 de maig de 337), primer emperador romà que professà el cristianisme. Fou proclamat «August» per les seves tropes el 25 de juliol de 306. Governà un Imperi romà, en constant creixement, fins a la seva mort.

Consus, divinitat agrària romana que protegia les llavors i les sitges. Per aquest motiu, fou inclosa entre les divinitats subterrànies. En honor seu es feien les festes consuàlies (*Consuales Ludi* o *Consualia*).

Corinna (Κόριννα) (Tanagra [Boècia, Grècia], v aC - ?), poetessa, contemporània de Píndar. Visqué molts anys a Tebes, per això se l'anomena sovint Corinna de Tebes.

Coriolis, Gaspard-Gustave (París [França], 21 de maig de 1792 - 19 de setembre de 1843), físic francès conegut principalment com a descobridor de l'anomenada *acceleració de Coriolis*.

Cotos (Κοττος). En la mitologia grega era un hecatonquir, gegant de cent braços i cinquanta caps, fill d'Urà i Gea, i germà de Briàreu i Gies. Pertanyen a la mateixa generació que els ciclops i, igual que ells, ajuden els olímpics i Zeus en la seva lluita contra els titans.

Cras Dives, Marc Licini (Marcus Licinius Crassus Dives) (?, ∼115 aC - ?, 53 aC), aristòcrata rellevant, general i polític romà de l'era republicana tardana.

Cràtil (Κράτυλος) (segle v aC), filòsof molt poc conegut que sembla que fou mestre de Plató.

Creont (Κρέων), rei de Corint. Segons la mitologia grega, pare de Creüsa. Acollí Jàson i Medea quan foren expulsats de Iolkos. Com que l'heroi grec volia repudiar Medea i casar-se amb Creüsa, la fetillera es venjà d'ella enviant-li un vestit incendiari. Creont morí amb la seva filla en intentar salvar-la.

Cressus (Κροῖσος), darrer rei de Lídia, de la dinastia dels mermnades. Regnà entre els anys 561 i 547 aC.

CREÜSA (Κρέουσα), filla de Creont, rei de Corint. Segons la mitologia grega, promesa en matrimoni a Jàson, la seva rival Medea li regalà una túnica que, en posar-se-la, es va encendre. Morí juntament amb el seu pare, que mirà de salvar-la.

CRISÒTEMIS (Χρψσόθεμις), princesa micènica, filla d'Agamèmnon i Clitemnestra, segons la mitologia grega.

CRÍTIES (Κριτίας) (Atenes [Grècia], 460 aC - Muníquia [Grècia], ∼403 aC), sofista i orador, deixeble de Sòcrates i oncle carnal de Plató.

CRONOS (Κρόνος), déu grec, fill d'Urà i de Gea, rei dels Titans i pare de Zeus.

CURCI RUF, Quint (Quintus Curtius Rufus) (?, segle I), historiador especialitzat en la vida d'Alexandre el Gran. Se'l coneix amb el nom *Q. Curtius*. Escrigué *Historiæ Alexandri Magni*, de la qual es conserven vuit dels deu volums originals.

CURTIS, Tony, nom cinematogràfic de SCHWARTZ, Bernard (Nova York [Nova York, Estats Units d'Amèrica], 3 de juny de 1925 - Las Vegas [Nevada, Estats Units d'Amèrica], 29 de setembre de 2010), actor de cinema.

DAMAS (Δάμας), autor d'una biografia d'Eudem, segons Simplici.

DAMÓ D'ATENES (Δάμων), músic, poeta i sofista atenenc mestre de Pèricles, amb el qual convisqué en amistat íntima. Influí en els afers polítics d'Atenes. Ja gran, fou desterrat de la ciutat. Se'n desconeix la raó.

DANDAMIS (Δάνδαμης), filòsof gimnosofista,[1120] braman protegit d'Alexandre el Gran des que el trobà a l'Índia.

DARIOS III CODOMÀ (∼380 aC - Bactris [Pèrsia], 330 aC), darrer rei aquemènida de l'Imperi persa, del 336 al 330 aC. Fou derrotat per Alexandre el Gran durant la conquesta de Pèrsia.

DEMETRI DE FALÈRON (Δημήτριος) (Falèron [Grècia], 345 aC - Alt Egipte, 283 aC), orador, home d'estat, filòsof i poeta. Es

1120. *Gimnosofista* (*γυμνοσοφισται*) era el nom que donaven els grecs a uns filòsofs indis que perseguien l'asceticisme mantenint-se nus i menjant molt poc per purificar el pensament.

formà al Liceu d'Aristòtil i començà la seva carrera pública el 325 aC. Fidel a Cassandre de Macedònia, aquest el va posar al capdavant de la ciutat d'Atenes, que va governar durant deu anys. Després d'això, se n'anà a Egipte, on arribà a ser un protegit de Ptolemeu I Soter. Durant els quaranta anys que hi va viure, tingué cura de la política cultural del país i fou el màxim responsable de la creació del museu d'Alexandria.

DEMETRI POLIORCETES (Δημήτριος Πολιορκητής) o Demetri I de Macedònia (?, 337 aC - Apamea [Síria], 283 aC), rei de Macedònia. Poliorcetes vol dir 'expugnador de ciutats', i li'n deien per les moltes que havia conquerit després d'assetjarles.

DEMÒCRIT (Δημόκριτος) (Abdera [Tràcia, Grècia], ∼460 aC - ?, ∼370 aC), matemàtic grec.

DEMÒSTENES DE PEÀNIA (Δημοσχένης) (Atenes [Grècia], 384 aC - Calaurea [Grècia], 322 aC), orador i home d'estat atenenc. S'oposà a les invasions de Filip II de Macedònia amb tres discursos, coneguts com les *Filípiques*.[1121]

DESCARTES, René (La Haye en Touraine [França], 31 de març de 1596 - Estocolm [Suècia], 11 de febrer de 1650), filòsof i matemàtic.

DEUTSCH, Adolph (Londres [Anglaterra], 20 d'octubre de 1897 - ?, 1 de gener de 1980), compositor, director i arranjador musical que participà en la música de *Set núvies per a set germans*.

DIANA ('del dia' o 'divina' en llatí), deessa dels boscos i de la caça. Cap al segle IV aC es va identificar completament amb la deessa de la mitologia grega Àrtemis.

DINARC DE DELOS (Δειναρχος) (Cotrint [Grècia], 361 aC - Atenes [Grècia], 291 aC), poeta àtic. És el darrer i el menys notable de tots.

DINÒMENES DE SIRACUSA (Δεινομένης), guàrdia personal de Jerònim de Siracusa que participà en un complot en contra seu. Quan Jerònim marxà contra Leontins, ciutat de Sicília, i arribà prop d'on l'esperaven els conspiradors, Dinòmedes separà el

1121. DEMÒSTENES (1932-1951).

rei de la guàrdia amb una excusa perquè els assassins el poguessin matar (215 aC). Alguns guàrdies es llançaren contra ell però se n'escapà amb ferides lleus i, poc després, fou elegit general dels siracusans.

Dió Cassi (Cassius Do) (Nicea, ∼150-235), historiador i polític romà d'origen grec. Ocupà diversos càrrecs a l'Imperi i, fins i tot, arribà a ser cònsol dues vegades. De la seva obra, *Història de Roma*, redactada en grec i composta per vuitanta llibres, se'n conserven divuit íntegres, fragments de la resta i resums fets per altres autors.

Dió de Siracusa (Δίων) (∼408-353 aC), gendre de Dionís I. Fou un polític siracusà. Malgrat haver seguit la filosofia de Plató, esdevingué molt despòtic.

Diocles de Carist (Διοκλῆς) (Carist [Grècia], ∼240 - ∼180 aC), matemàtic i geòmetra. Inventà la cissoide i escrigué un tractat sobre els miralls ustoris.

Diodor de Sicília o Diodor Sícul (grec: Διόδωρος Σικελιώτης; llatí: Diodorus Siculus), historiador grec de Sicília que visqué al segle I aC, contemporani de Juli Cèsar i August. La seva obra es titula *Biblioteca històrica* (*Ἱστορικὴ Βιβλιοθήκη*) (any 8 aC), un tractat de quaranta volums que va de l'antiguitat a la Guerra de les Gàl·lies.

Diofant d'Alexandria (Διόφαντος) (?, 201 - Alexandria [Egipte], 285), matemàtic grec.

Diògenes Laerci (grec: Διογένης; llatí: Diogenes Lærtius), historiador de la filosofia i probablement filòsof grec nascut suposadament a Laerte, Cilícia. No es coneix res de la seva vida ni dels seus estudis. Deu haver viscut a finals del segle II. La seva obra, una història de la filosofia, està formada per deu llibres i es tiula *Sobre les vides, les opinions i les sentències dels filòsofs il·lustres* (*Περὶ βίων, δογμάτων καὅ ἀποφθεγμάτων τῶν ἐν φιλοσοφία εὐδοκιμησάτων*).

Dionís (Διώνυσος), segons la mitologia, déu de la verema i el vi, inspirador de la bogeria ritual i l'èxtasi, una de les divinitats importants de la mitologia grega. Fou també conegut com a

Bacus (llatí: Bacchus; grec: Βάκχους) pels llatins. El frenesí que induïa es coneix com a *βακςηεια* (*βακχεία*), 'deliri'.

DIONÍS D'HALICARNÀS (grec: Διώνυσιος Ἀλεξάνδρου Ἀλικαρνᾱσσεύς; llatí: Dionysius) (Halicarnàs [Grècia], 60 aC - ?, 7 aC), historiador i retòric grec. Escrigué una història de Roma (*Ῥωμαϊκὴ Ἀρχαιολογία*), dels orígens fins al 264 aC, que complementa l'obra de Polibi.

DIONÍS DE TRÀCIA (Διώνυσιος ὁ Θρᾷαξ), també conegut com a Dionisi Trax (Tràcia [Grècia], 170 aC - Rodes [Grècia], 90 aC), gramàtic grec de l'època hel·lenística.

DIONÍS EL VELL o DIONÍS I (Διονύσιος) (Siracusa [Sicília], ∼431 aC - 367 aC), tirà de Siracusa. Conquerí diverses ciutats de Sicília i rivalitzà amb Cartago pel control de l'illa.

DIONÍSODOR DE CAUNOS (Διονυσόδωρος) (Caunos [Egipte], 250 aC - ?, 190 aC), geòmetra grec que resolgué el problema «de la divisió de l'esfera en una proporció donada».

DIOSCÒRIDES PEDACI (grec: Διοσκορίδης Πεδακίος; llatí: Dioscorides Pedacius) (Cilícia [Anatòlia], segle I dC), escriptor grec autor d'un famós tractat de medicina (*Περὶ ὕλης ἰατρικῆς*), més conegut per la versió llatina *De materia medica*, de cinc volums.

DODGSON, Charles Lutwidge. Vegeu CARROLL, Lewis.

DOMICI AHENOBARB, Cneu, cònsol romà (122 aC). Aconseguí victòries importants contra els gals de l'est del Roine, però és recordat perquè feu construir la Via Domícia (Via Domitia) a la Gàl·lia.

DONEN, Stanley (Colúmbia [Carolina del Sud, Estats Units d'Amèrica], 13 d'abril de 1924), director de cinema i coreògraf, un dels mestres de la comèdia musical. Entre altres obres ha dirigit *Set núvies per a set germans* (*Seven brides for seven brothers*) i *Cantant sota la pluja* (*Singing on the rain*). Obtingué un Oscar honorífic el 1988 i el Lleó d'Or del 2004 per tota la seva carrera.

DOSITEU DE PELUSIUM, també conegut com a Dositeu de Colonos (*Δωσίθεος*) (∼230 aC), geòmetra grec al qual dedicà Arquimedes algun dels seus llibres, com ara *De l'esfera i el cilindre* i *De les línies espirals*.

Drus, Neró Claudi, conegut com a Drus Major (Roma [Itàlia], 14 de gener de 38 aC - 14 de setembre de 9 aC), creixé sota la protecció d'August.

Duili, Gai Nepos (Caius Duilius) (segle III aC). Nomenat cònsol —magistrat suprem de la República Romana. Organitzà la flota i aconseguí la primera victòria marítima sobre la poderosa flota cartaginesa davant de Miles (260 aC). L'any 231 aC fou nomenat dictador (*dictatŏr*), és a dir, magistrat extraordinari plenipotenciari, amb la intenció que organitzés les eleccions a Roma.

Edèsia (Αἰδεσία), filòsofa grega d'Alexandria, al segle V, molt elogiada per Procle.

Eecke, Paul Louis (Menin [Bèlgica], 13 de febrer de 1867 - Berchem [Bèlgica], 14 d'octubre de 1959), enginyer de mines i historiador de la matemàtica. Les seves traduccions al francès de les obres d'Arquimedes, Pappos d'Alexandria i Teodosi de Trípoli són encara ara autoritats en la matèria.

Eetes (Αἰήτης), pare de Medea, rei mític del regne heretat de Corint, que abandonà pel de la Còlquida, país situat al peu del Caucas, vora el mar Negre.

Egest, fill de Numitor. Fou assassinat per Amuli.

Electra (Ἠλέςτρα), princesa micènica, filla d'Agamèmnon i Clitemnestra, segons la mitologia grega.

Eliot, Thomas Stearns (Orderof Merit), més conegut com a T. S. Eliot (Saint Louis [Estats Units d'Amèrica], 26 de setembre de 1888 - Londres [Anglaterra], 4 de gener de 1965), poeta, escriptor, dramaturg i professor universitari guardonat amb el Premi Nobel de Literatura l'any 1948. En les seves obres, destaquen la cura formal i les referències culturals. Enquadrat dins el New Criticism, pensava que l'art no havia de ser l'expressió d'experiències personals, sinó el treball sobre símbols universals.

Empèdocles d'Agrigent (Ἐμπεδοκλῆς) (Agrigent [Grècia], 492 aC - ?, 432 aC), filòsof grec pluralista. La seva obra, que es conserva de manera fragmentària, és escrita en hexàmetres. S'oposà al monisme, que estableix l'existència d'un sol tipus d'«arkhé», i defensà el pluralisme: «Tot es compon de terra, aire, aigua i foc.»

Enees —o Eneas— (grec: Αινεαίς; llatí: Aeneas), heroi de la mitologia romana basat en el de l'*Odissea* descrit per Homer.

Enòpides de Quios (Οἰνοπίδης ὁ Χῖος) (Quios [Grècia], ~490 aC - ?, ~420 aC), matemàtic i astrònom.

Epícides (Ἐπικύδης) (Cartago, ? - 210 aC), tirà de Siracusa juntament amb el seu germà gran, Hipòcrates de Siracusa.[1122]

Erasístrat (Ἐρασίστρατος) (Kea [Grècia], ~304 aC - Alexandria [Egipte], 250 aC), famós metge i anatomista que treballà a Alexandria, probablement net d'Aristòtil.

Eratòstenes de Cirene (Ἐρατοσθένης) (Cirene [Líbia], 276 aC - Alexandria [Egipte], 194 aC), bibliotecari, geògraf i matemàtic grec.

Erigi (Ἐρίγιος), militar macedoni, molt amic d'Alexandre el Gran. Filip II de Macedònia l'exilià a causa d'aquesta amistat. Tornà de l'exili quan Alexandre pujà al tron el 336 aC i fou oficial del seu exèrcit.

Escipió, Publi Corneli (Publius Cornelius Scipio) (255-211 aC), fill i net de cònsols romans. Fou militar, magistrat i cònsol romà (218 aC). És el pare d'Escipió Africà.

Escipió Africà, Publi Corneli (Publius Cornelius Scipio) (Roma [Itàlia], 235 aC - Liternum [Itàlia], 183 aC), militar i magistrat durant la Segona Guerra Púnica, i home d'estat de la República Romana. Se'l coneix sobretot per haver derrotat el general cartaginès Anníbal a Àfrica, fet pel qual guanyà el cognom d'Africà Major (*Africanus*).

1122. Vegeu «Els tirans de Siracusa. Hipòcrites i Epícides» (pàgines 65-66).

Escipió Calb, Gneu Corneli (Cnæus Publius Cornelius Scipio Calvus) (? - Ilorci [Hispània], 211 aC), germà de Publi Corneli Escipió Africà. Dirigí la conquesta romana d'Hispània durant la Segona Guerra Púnica.

Escipió Emilià, Publi Corneli (Publius Cornelius Scipio Æmulianus) (Roma [Itàlia], 185 aC - Liternum [Itàlia], 129 aC), militar i magistrat romà, fill adoptiu de Publi Corneli Escipió Africà, que n'era l'oncle. De vegades, designat *Africà més petit* perquè va ser qui va assetjar, conquerir i devastar Cartago en la Tercera Guerra Púnica. També fou l'assetjador de Numància (133 aC).

Escopines de Siracusa (Scopinas Syracusius) (Siracusa [Sicília], ∼52 - ?), matemàtic i inventor especialitzat en mecànica i gnomònica. Vitruvi el qualifica a *De arquitectura* com un gran savi. Se li ha atribuït l'obra *De rebus mathematicis*.[1123]

Espàrtac (Spartacus) (?, ∼120 aC - ?, ∼70 aC), gladiador traci en règim d'esclavatge. Esdevingué el líder (o un dels líders) del fracassat alçament d'esclaus contra la República de Roma, conegut com la Tercera Guerra Servil.[1124]

Èsquil (Αἰσχῦλος) (Eleusis [Grècia], 525 aC - Gela [Grècia], 456 aC), dramaturg, autor, entre altres trilogies, de l'*Orestíada* (*Ὀρέστεια*).

Èsquines d'Atenes (Αἰσχίνης) (Atenes [Grècia], ∼390 aC - Rodes [Grècia], 314 aC), polític i orador. La seva primera actuació política, contra Filip de Macedònia, consistí a organitzar una lliga de les ciutats gregues. Però, decebut davant l'individualisme d'aquestes, acabà afavorint una política d'aliança amb ell. Intervingué en l'anomenada pau de Filòcrates, en la qual obtingué promeses de tolerància i diàleg per part de Filip. Aquesta actitud li feu guanyar l'acusació de traïció per part del seu rival Demòstenes. S'establí, a resultes d'això,

1123. Vitruvi (1995), llibre i, capítol 1, § 17, i llibre ix, capítol 8, § 1.

1124. Recordem-ne la magnífica escenificació cinematogràfica feta per Stanley Kubrik i interpretada per Kirk Douglas, Jean Simmons, Tony Curtis, Sir Laurence Olivier, Charles Laughton, Peter Ustinov i John Gavin.

una pugna entre dues concepcions: la lluita contra Macedònia per la defensa de la democràcia d'Atenes (Demòstenes) o l'aliança amb aquesta com a mitjà per a la unificació grega (Èsquines).

Després de la batalla de Queronea (338 aC), s'oposà a la concessió d'una corona a Demòstenes pel seu patriotisme. Vençut, però, pel seu rival, s'hagué d'exiliar d'Atenes. Visqué a Efes, primer, i després a Rodes, on morí. Se'n conserven tres petits discursos.

Estobeu, Joan (grec: Ἰωάννης ὁ Στοβαῖος; llatí: Joannes Stobæus) (finals del segle v?), escriptor grec pagà, nadiu de Stobi (Macedònia). Pel seu nom, podem deduir que fou fill de pares cristians. Recopilà extractes de nombrosos escriptors grecs i els publicà en quatre llibres amb el títol *Qüestions seleccionades, sentències i preceptes* (*Ἰωάννου Στοβαίοι ἐκλογῶν, ἀποφθεγμάτων, ὑποθηκῶν βιβλία τέσσαγα*).

Estrabó (Στράβων) (Amàsia [Turquia], 63 aC - ∼24 dC), escriptor i geògraf grec, autor de la famosa *Geografia*.

Estrató de Làmpsac (Στράτων) (Làmpsac, ? - Alexandria [Egipte], ∼268 aC), filòsof peripatètic, tutor de Ptolemeu II Filadelf. A la mort de Teofrast († 287 aC) s'encarregà de la direcció del Liceu.

Euclides (Εὐκλείδης) (?, ∼325 aC - Alexandria [Egipte], ∼265 aC), geòmetra grec.

Euclides de Mègara (Εὐκλείδης ο Μεγαρεῦς) (Mègara [Grècia], 435 aC - ?, 365 aC), filòsof contemporani de Plató i fundador de l'escola megàrica.

Eudem de Rodes (Εὔδεμος) (Rodes [Grècia], ∼370 - ∼316 aC), filòsof grec, deixeble i contemporani d'Aristòtil, i company de Teofrast. Destaquen els treballs que va publicar sobre història de les matemàtiques i astronomia.

Eudor (Εὔδωρος), heroi, fill d'Hermes i comandant dels mirmídons (grec: *μυρμιδών*; llatí: *myrmidones*) a la Guerra de Troia.

Èudox de Cnidos (Εὔδοξος ο Κνίδιος) (Cnidos [Grècia], 408 aC - Atenes [Grècia], 355 aC), matemàtic.

Euler, Leonhard (Basilea [Suïssa], 15 d'abril de 1707 - Sant Petersburg [Rússia], 18 de setembre de 1783), matemàtic.

Eunus (Εύνυς) (Apamea [Síria], ? - Morgàntia [Itàlia], 132 aC), esclau agrícola aclamat com a profeta. Fou el cap dels esclaus revoltats a Sicília durant la Primera Guerra Servil —Guerra dels Esclaus— iniciada vers el 136 aC.

Eurípides (Εὐριπίδης) (Salamina [Grècia], 485-406 aC), autor de tragicomèdies com ara *Ió (Ἴων), Ifigènia a Tàuride* (*Ἰφιγένεια ἐν Ταύροις*), *Ifigènia a Aulis* (*Ἰφιγένεια ἐν Αὐλίδι*), *Helena* (*Ἑλένη*) i *Les Bacants* (*Βάκχαι*).

Europa (Εὐριπίδης), deessa grega, mare de Minos.

Eustaci de Tessalònica (grec: Εὐστάθιος Θεσσαλονίκός; llatí: Eusthatius) (?, 1110 - Constantinoble [Imperi bizantí, avui Istambul, Turquia], 1198), erudit eclesiàstic. Les seves obres són comentaris sobre els antics poetes grecs, tractats teològics, homilies i epístoles. El seu treball més conegut és *Comentari sobre la* '*Ilíada*' *i l'*'*Odissea*' (*Παρεκβολαὶ εἰς τὴν Ὁμήρου Ἰλιάδα καὶ Ὀδυσείας*) que, de fet, és una compilació de comentaris d'antics autors sobre aquestes epopeies.

Eutoci d'Ascaló (Εὐτόκιος ο Ασκαλωνίτης), escriptor grec, comentarista d'Apol·loni i Arquimedes. Visqué cap a la meitat del segle vi. Es conserven els originals grecs de les seves obres següents: *Comentari del primer dels quatre llibres de les* '*Còniques*' *d'Apol·loni*, *Comentari de* '*De l'esfera i el cilindre*', *de* '*Sobre la quadratura del cercle*', i comentaris sobre dos llibres més referits a l'equilibri escrits per Arquimedes.

Eva, primera dona, segons el *Gènesi*.

Evandre (grec: Εὔανδρος; llatí: Euander), segons la mitologia grega, fou un heroi, fill d'Hermes (en la mitologia romana, Mercuri) i la nimfa Carmenta. Emigrà al Laci, on va ser acollit per Faune. Fundà la ciutat de Pal·lantea i introduí els cultes de Ceres i de Pan al país. Després de mort, fou divinitzat pels romans com un dels indigets.

Faune (Φαῦνος), segons la mitologia romana, rei llatí, pare de la deessa Bona Dea, també coneguda amb el nom de Faune, i pare de Llatí. Amb el temps s'identificà amb el sàtir grec Pan per les seves característiques força semblants.

Faustí (Faustinus), pastor romà, germà de Fàustul.

Fàustul (Faustulus), pastor que trobà abandonats Ròmul i Rem i els porta a casa seva, on ell i la seva esposa, Larència, els criaren com si fossin fills seus.

Fermat, Pierre de (Beaumont-de-Lomagne [Gascunya, França], 17 d'agost de 1601 - Castres [França], 12 de gener de 1665), jurista i matemàtic.

Fetti, Domenico (?, ∼1589 - 4 d'abril de 1623), pintor barroc italià. Treballà principalment a Roma, Màntua i Venècia. L'any 1620 pintà un quadre en el qual representava Arquimedes abstret en la seves recerques.

Fídias (Φειδίας) (segle iv-iii aC), pare d'Arquimedes i astrònom.

Fídies (Φειδίας) (490-432 aC), escultor grec, considerat universalment com el millor escultor clàssic i, probablement, el millor de tots els temps. Dissenyà estàtues gegantines de la deessa Atena al Partenó d'Atenes i la colossal de Zeus a Olímpia.

Fil, Luci Furi (Lucius Furius Philus) (? - ?, 170 aC), pretor, el 171 aC, en el govern de l'illa de Sardenya, la seva província. Gran orador i molt culte.

Filinna de Làrissa (Φίλιννα), cinquena esposa de Filip II, mare d'Arrideu, germanastra d'Alexandre el Gran.

Filip II de Macedònia (Φίλιππος Β′ ὁ Μακεδών) (Pel·la [Macedònia, Grècia], 382 aC - Vergina [Macedònia, Grècia], 336 aC), rei de Macedònia, zona al nord de Grècia, del 356 al 336 aC. La seva habilitat política i militar li permeté unificar tot el regne i crear un exèrcit i una economia forts. És el pare d'Alexandre el Gran.

Filip V de Macedònia (grec: Φίλιππος Ε′ ὁ Μακεδών; llatí: Philippus) (?, 238-179 aC), rei de Macedònia des del 220 aC fins a la seva mort. El 215 aC s'alià amb Anníbal. Durant la Primera Guerra Macedònica (216-205 aC) aconseguí combatre els aliats de Roma amb èxit. La República inicià, aleshores, la Segona Guerra Macedònica, i l'any 197 aC Quint Flamini el vencé en la batalla de Cinoscèfales i hagué de cedir totes les seves possessions llevat de Macedònia.

FILÓ DE BIZANCI (Φίλων ο Βυζάντιος), famós enginyer grec, probablement del segle II aC. La seva activitat principal fou en la construcció de ports i obres defensives. Vitruvi l'esmenta com a escriptor d'obres d'enginyeria militar.

FILÒCRATES (Φιλοκράτης) (Atenes [Grècia], segle IV aC), polític. Després de la caiguda d'Olint (348 aC), signà una pau desfavorable per a Atenes amb Filip II de Macedònia. Fou acusat de traïció i condemnat a mort, però s'exilià.

FILOTES (Φιλώτας) (? - 330 aC), fill de Parmenió i un dels generals macedonis més distingits. Ja era amic d'Alexandre el Gran abans que pugés al tron i, amb Hàrpal i Ptolemeu, participà en les intrigues per a l'enllaç entre el príncep i la filla de Pixòdar de Cària.

FÍNTIES D'AGRIGENT (Φιντάας), tirà d'Agrigent que es creu que establí el seu poder sobre aquesta ciutat durant el període de confusió després de la mort d'Agàtocles de Siracusa, el 289 aC, quan Hicetes II prengué el poder.

FLAMINI, Tit Quinti (Tiyus Quintius Flaminius) (?, 230-174 aC), general romà que l'any 197 aC vencé Filip V de Macedònia durant la Segona Guerra Macedònica en la batalla de Cinoscèfals.

FONTANA, Niccolò, anomenat TARTAGLIA (el Quec) (Brescia [Itàlia], ? 1499 - Venècia [Itàlia], 13 de desembre de 1557), matemàtic.

FORTUNAT, Atili (Atilius Fortunatus), escriptor llatí, mestre d'Horaci i autor d'un tractat de prosòdia escrit probablement abans del segle V, ja que esmenta Cassiodor en una graciosa dedicatòria a un senador.

FUFICI (Fufitius), arquitecte i primer escriptor romà que conreà aquest tema. L'esmenta Vitruvi, però el seu nom exacte presenta alguns dubtes.

Gai Mari o simplement Mari (Caius Marius) (Arpinum [Itàlia], 157 aC - Roma [Itàlia], 86 aC), cap del partit popular a Roma al final del segle ii aC i començaments de l'i aC. Amb les seves reformes transformà l'exèrcit. Es distingí vencent les tribus invasores dels cimbres (*κίμβροι*), dels teutons (*τεύτονεσε*) i dels ambrons (*ἄμβρωνεσε*), motiu pel qual li deien «El tercer fundador de Roma». Plutarc, en *Vides paral·leles*, l'aparella amb Pirros de l'Epir.

Gal, Gai Sulpici (Caius Sulpicius C. F. C. N. Gallus), magistrat romà. Ciceró l'elogia molt en els seus escrits. Diu que era el romà que sabia més grec, que era un orador destacat, una persona elegant i una ment refinada amb grans coneixements d'astronomia.

Galè de Pèrgam (grec: Γαληνός; llatí: Claudius Galenus) (Pèrgam [Àsia Menor], 129 - ∼200 o 216), conegut simplement com a Galè. Fou un metge molt important de l'època clàssica que es dedicà a l'anatomia.

Galilei, Galileo, en català Galileu (Pisa [Itàlia], 15 de febrer de 1564 - Arcetri [Itàlia], 8 de gener de 1642), físic, matemàtic i filòsof. Tingué un paper important durant la revolució científica. Millorà el telescopi i, per tant, l'observació astronòmica, i donà suport a la teoria heliocèntrica de Nicolau Copèrnic.

Gant, Jost de (o Joos van Wassenhove, Justus o Jodocus de Ghent, o Giusto da Guanto (Gant [Flandes, ara Bèlgica], ∼1435-1440 - ?, ∼1480), pintor del grup dels primitius flamencs que posteriorment treballà a Itàlia.

Gauss, Carl Friedrich (Braunschweig [Alemanya], 30 d'abril de 1777 - Göttingen [Alemanya], 23 de febrer de 1855), matemàtic.

Gea o Gaia (Γαία), deessa grega que personifica la fertilitat de la terra i, d'alguna manera, la Terra mateixa.

Gel·li, Aule (Aulus Gellius) (Roma [Itàlia], ∼115 - 180), escriptor romà que escrivia en llatí. Viatjà molt a Grècia i residí durant un cert període a Atenes. La seva obra coneguda és *Noctes*

*Atticæ*, en la qual agrupà informació sobre història, filosofia i filologia en vint llibres.[1125]

Geló I (Γέλων), tirà de Gela i, després, de Siracusa (segle v aC). Fundà aquesta ciutat i l'establí com a capital dels seus dominis.

Geló II (Γέλων), fill de Hieró II de Siracusa, associat al tron amb el seu pare (240-216 aC), al qual va premorir per pocs mesos. El succeí l'altre fill, Jerònim de Siracusa.[1126]

Gemine de Rodes (Γεμῖνος ὁ Ῥόδιος), astrònom i matemàtic grec.

Gerió (Γηρυών), monstre de la mitologia grega amb tres cossos humans sencers units per la cintura. Fou mort per Hèracles. Se li atribueix la fundació de Girona.

Giambologna, pseudònim de Jean de Boulogne (Douai [Flandes, ara França], 1529 - Florència [Itàlia], 1608), escultor flamenc actiu a Itàlia, en particular a Florència.

Gies (Γύης). En la mitologia grega era un hecatonquir, gegant de cent braços i cinquanta caps, fill d'Urà i Gea, i germà de Briàreu i Cotos. Pertany a la mateixa generació que els ciclops i, igual que ells, ajuden els olímpics i Zeus en la seva lluita contra els titans.

Ginouvès, René (Clarmont d'Erau [França], 12 de gener de 1926 - París [França], 10 de novembre de 1994), arqueòleg i professor d'universitat. És el responsable de l'edició de *La Macédoine de Philippe II à la conquête romaine* (1993).

Girard, Albert (Saint-Mihiel [Lorena, França], ∼1595 - Leiden [Holanda], 8 de desembre de 1632), matemàtic.

Gneu Gel·li (Gnæus Gellius) (segle ii aC), historiador romà, autor d'una història de Roma que anava des de la seva fundació fins al 145 aC. Una part important d'aquesta història estava dedicada a les llegendes connectades amb l'origen de la nació.

---

1125. Gel·li (1930).

1126. Vegeu «Els tirans de Siracusa. Jerònim de Siracusa» (pàgines 64-65).

Era molt més extensa que la de Tit Livi, però solament se'n conserven fragments.

Goodrich, Frances (Belleville [Nova Jersey, Estats Units d'Amèrica], 12 de desembre de 1890 - 29 de gener de 1984), dramaturga i escriptora de guions per a la pantalla, coneguda sobretot per la col·laboració amb el seu espòs, Albert Hackett.

Gregory, David (Aberdeen [Escòcia], 3 de juny de 1659 - Berkshire [Anglaterra], 10 d'octubre de 1707), matemàtic i divulgador de l'obra d'Isaac Newton.

Grenfell, Bernard Payne (Birmingham [Anglaterra], 16 de desembre de 1869 - 18 de maig de 1926), científic i egiptòleg. Amb el seu amic i col·lega A. S. Hunt, descobriren els manuscrits d'Oxirrinc (1897), considerats part dels documents més antics del Nou Testament. A partir de 1908 participà en la seva edició.

Guillem van Moerbeke, nom catalanitzat de Willem van Moerbeke (llatí: Gulielmus de Moerbecum; alemany: Willem van Moerbeke) (Moerbeke [Bèlgica], ∼1215 - Corint [Grècia], ∼1286), clergue flamenc que traduí amb perícia moltes obres d'autors clàssics. El 1277 fou nomenat bisbe de Corint, un enclavament de ritu llatí al territori ortodox. Tomàs d'Aquino li encarregà una traducció completa de l'obra d'Aristòtil. En les seves traduccions, fetes a partir del text original grec, corregí molts errors de traductors anteriors. La seva obra és realment important. Val la pena esmentar que traduí algunes obres d'Heró i d'Arquimedes.

Hackett, Albert Maurice (Nutley [Nova Jersey, Estats Units d'Amèrica], 16 de febrer de 1900 - Nova York [Nova York, Estats Units d'Amèrica], 16 de març de 1995), dramaturg i escriptor de guions per a la pantalla que treballà en col·laboració amb la seva esposa, Frances Goodrich.

Hankel, Hermann (Tübingen [Alemanya], 14 de febrer de 1839 - 29 d'agost de 1873), matemàtic.

Hannó el Gran (῎Ανον Μέγας), anomenat així pels seus èxits a l'Àfrica. Comandava la flota de Cartago que fou derrotada per la marina romana encapçalada per Gai Lutaci Catul en la batalla de les Àgates, lliurada el 10 de març de 241 aC, durant la Primera Guerra Púnica. La victòria romana fou definitiva. També participà, amb Amílcar Barca, en la guerra dels mercenaris que, l'any 237 aC, aconseguiren guanyar. Es dedicà a la política i, en contra de les decisions militars dels Barca, fou partidari de la pau amb els romans.

Hannó el Vell (Ἄνον), general cartaginès enviat a Sicília amb un exèrcit important en iniciar-se la Primera Guerra Púnica.

Hardy, Godfrey Harold (Cranleigh [Anglaterra], 7 de febrer de 1877 - Cambridge [Anglaterra], 1 de desembre de 1947), matemàtic.

Hàrpal (Ἅρπαλος), noble macedoni, amic d'Alexandre el Gran. Participà, amb Filotes i Ptolemeu, en intrigues per a l'enllaç del príncep amb la filla de Pixòdar de Cària.

Heath, Sir Thomas (Barnetby [Anglaterra], 5 d'octubre de 1861 - Ashtead [Anglaterra], 16 de març de 1940), matemàtic, historiador i traductor de la matemàtica grega antiga. Traduí a l'anglès, comentà i anotà l'obra d'Euclides, d'Arquimedes, d'Apol·loni i d'Aristarc.

Hecatonquirs (Εκατόνχειρες, 'els de cent mans'), coneguts també com *els centimani*, en llatí. Eren gegants amb cent braços i cinquanta caps, fills de Gea i Urà. S'anomenaven: Briàreu (Βριάρεως, 'vigorós'), Gies (Γύγης, 'de membres grossos') i Cotos (grec: Κοττος; llatí: *Cottus*, 'copejador').

Heemskerck, Maerten van (Heemskerk [Països Baixos], 1 de juny de 1498 - Haarlem [Països Baixos], 1 d'octubre de 1574), pintor neerlandès que desenvolupà gran part de la seva carrera a Haarlem. Feu molts dibuixos i gravats, i és especialment conegut per la seva interpretació de les set meravelles del món. Es considera un representant del manierisme.

Hèlios (Ἥλιος), personificació del Sol en la mitologia grega. Hesíode[1127] l'identifica com un fill dels titans[1128] Hiperió i Tea, i

1127. Hesíode (1914), p. 371.

1128. Recordem, tot de passada, que un tità ($\tau\iota\tau\acute{\alpha}\nu$) és, en la mitologia grega, una divinitat primordial gegantina que precedeix els déus de l'Olimp. Els titans i les titànides ($\tau\iota\tau\alpha\iota\delta\epsilon\sigma\nu$) són els sis fills i les sis filles d'Urà (el Cel) i Gea (la Terra).

germà de les deesses Selene (la Lluna) i Eos (l'Aurora). Sovint Homer l'anomena simplement Tità o Hiperió.

Hera (Ἥρα). En la mitologia grega, divinitat de l'Olimp, segona esposa de Zeus i deessa del matrimoni.

Hèracles (Ἡρακλῆς, 'glòria d'Hera'), en la mitologia era un semidéu, fill de Zeus i Alcmene. En la mitologia romana l'anomenaven Hèrcules.

Heràclides (Ἡρακλείδης) (iii aC), amic i biògraf d'Arquimedes, segons Eutoci.

Heràclit d'Efes (Ἡράκλειτος ὁ Ἐφέσιος) (Efes [Àsia Menor], ∼535 - ∼475 aC), filòsof presocràtic de l'Escola jònica, les opinions del qual diferien dels seus principis en alguns punts.

Hermes (Ἑρμῆς), segons la mitologia grega, missatger dels déus olímpics, de les fronteres i els viatgers, dels pastors, dels oradors, de l'enginy, dels literats i poetes, de l'atletisme, dels pesos i mesures, dels invents i, en general, del comerç i de l'astúcia, els lladres i els mentiders. Era fill de Zeus i la plèiade Maia, i pare d'Eudor i Evandre. En la mitologia romana, l'anomenaven Mercuri (Mercurius).

Hermòdor (Ἑρμ΄δωρος), filòsof grec deixeble de Plató que feu circular les obres del seu mestre i les vengué a Sicília, d'on ve el proverbi *λόγοισιν Ἑρμόδωρος ἐμπορεύεται* («Hermodor comercilitza la raó»). Escrigué dues obres: *Sobre la matemàtica* (*Περὶ μαθημάτων*) i *Sobre Plató* (*Περὶ πλάτωνος*).

Hermòtim de Colofó (Ἑρμότιμος), matemàtic del segle iv aC.

Heró d'Alexandria (Ἥρων) (Alexandria [Egipte], ∼10 - ∼70], matemàtic, físic i enginyer.

Heròdot d'Halicarnàs (Ἡρόδοτος Ἁλικαρνᾶσσεύς) (Halicarnàs [Grècia], 484 aC - Thuris [Grècia], 425 aC), historiador, autor d'*Història*, una investigació —*ἱστορία*— de les causes de les Guerres Mèdiques.

Heròfil de Calcedònia (Ἡρόφιλος της Χαλκηδόνας) (Calcedònia [Grècia], ∼330 - ∼260 aC), metge del museu d'Alexandria.

HERSÍLIA (Hersilia), segons Tit Livi i Plutarc, dona de Ròmul. Però d'altres en dubten.

HESÍODE (Ἡσίοδος) (Ascra [Beòcia], VIII aC), escriptor grec l'obra més notable del qual és *La teogonia* (*Θεογονία*).

HESIQUI DE MILET (Ἡσύχιος), historiador bizantí, de renom l'Il·lustre (Ἰλλούστριος), segurament per algun càrrec que exercia i que comportava aquest tractament.

HESTIA (Εστία), 'la llar', deessa de la llar en la mitologia grega. En la mitologia romana fou anomenada Vesta.

HICETES II DE SIRACUSA (Ἱκέτας) (segle III aC).[1129]

HIERÓ II (Ἵέρω) (Siracusa [Sicília], 306-261 aC), tirà de Siracusa, descendent de Geló i una serventa. Segons Polibi, derrotà els mamertins. Les seves aliances oscil·laven entre els cartaginesos i els romans fins que l'any 241 aC Roma el reconegué com a rei de Siracusa i hi establí una aliança permanent.[1130]

HIEROCLES (Ἰεροκλῆς), pare de Hieró II de Siracusa.

HILBERT, David (Königsberg [Prússia, ara Kaliningrad, Rússia], 23 de gener de 1862 - Göttingen [Alemanya], 14 de febrer de 1943), matemàtic.

HIMENEU O HIMEN (Ὑμήν o Ὑμέναιος), en la mitologia grega, déu dels casaments.

HIPARC DE NICEA (Ἵππαρχος) (Nicea [Bitínia, avui Turquia], ∼190 - ?, ∼120 aC), astrònom i matemàtic.

HIPÀTIA O HIPÀCIA D'ALEXANDRIA (Ὑπατία) (Alexandria [Egipte], ∼355 - març de 415), matemàtica.

HIPÈRIDES (Ὑπερείδης), orador i polític atenenc, deixeble d'Isòcrates.

HIPERIÓ (Ὑπερίων, 'el que mira des de dalt'), tità fill d'Urà (el Cel) i Gea (la Terra) en la mitologia grega.

1129. Vegeu «Els tirans de Siracusa. Hicetes II» (pàgines 59-60).
1130. Vegeu »Els tirans de Siracusa. Hieró II» (pàgines 62-64).

Hipòcrates de Cos (Ἱπποκράτης ὁ Κῶς) (∼460 - ∼370 aC), metge de l'època de Pèricles. D'ell és el famós jurament hipocràtic dels metges.

Hipòcrates de Quios (Ἱπποκράτης ὁ Ξιος) (segle v aC), matemàtic.

Hipòcrates de Siracusa (Ἱπποκράτης ὁ Συράκουσαι) (Cartago, ? - Siracusa [Sicília], ∼210 aC), tirà de Siracusa, juntament amb el seu germà petit Epícides (214-212 aC) durant la Segona Guerra Púnica.[1131]

Hipsicles (Ὑψικλῆς) (?, ∼190-?, ∼120 aC), matemàtic.

Homer (Ὅμηρος) (Grècia, segle viii aC), poeta, autor de la *Ilíada* (*Ἰλιάς*) i l'*Odisea* (*Ὀδύσσεια*). Se'l considera el pare de les obres èpiques, juntament amb Virgili.

Horaci Flac, Quint (Quintus Horatius Flaccus), conegut simplement com a Horaci (Venosa [Itàlia], 8 de desembre de 65 aC - Roma [Itàlia], 27 de novembre de 8 aC), poeta líric i satíric llatí.

Hultsch, Friedrich Otto (Dresden [Alemanya], 22 de juliol de 1833 - 6 d'abril de 1906), filòleg de les llengües clàssiques i historiador de la matemàtica de l'antiguitat.

Humboldt, Friedrich Wilhelm Heinrich Alexander von, o senzillament Humboldt, Alexander von (Berlín [Alemanya], 14 de setembre de 1769 - 6 de maig de 1859), explorador, naturalista i geògraf.

Hunt, Arthur Surridge (Essex [Anglaterra], 1 de març de 1871 - Oxford [Anglaterra], 18 de juny de 1934), papiròleg. Descobrí importants papirs en excavacions fetes a Egipte.

Iber, fill de Túbal.

Íbic (Ἴβικος) (Reggio de Calàbria [Itàlia], ? - Corint [Grècia], 540 aC), poeta grec. És el cinquè del cànon de poetes lírics d'Alexandria. Visqué la major part de la vida a la cort de Polícrates, a Samos.

---

1131. Vegeu «Els tirans de Siracusa. Hipòcrates de Siracusa» (pàgines 65-66).

ibn Qurra ibn Marwan al-Sabi al-Harrani, Abu-l-Hàssan Thàbit (AltṢābi Thābit ibn Qurra al Ḥarrānī) (Harran [Turquia], 836 - Bagdad [Iraq], 18 de febrer de 901), astrònom, musicòleg i matemàtic, conegut com a Thàbit ibn Qurra.

Ifigènia (Ἰφιγένεια), princesa micènica, filla d'Agamèmnon i Clitemnestra, segons la mitologia grega.

Iseu (Ἰσαῖος) (Calcis [Grècia], 420-340 aC), orador grec, deixeble d'Isòcrates i mestre de Demòstenes.

Isidor de Milet el Vell (Ἰσίδωρος) (Milet, ∼442 - ?, ∼537), arquitecte i professor. Malgrat que desenvolupà la tasca de professor de matemàtiques i física a Alexandria i Constantinoble durant pràcticament tota la seva vida, és més recordat per la seva obra com a arquitecte, especialment per la reconstrucció de Santa Sofia de Constantinoble (532), juntament amb Antemi de Tral·les. L'acabà en solitari l'any 537.

Isidor de Sevilla (Sevilla [Hispània], ∼559 - ∼636), teòleg i doctor hispanoromà de l'Església, autor d'*Etimologies* (*Etymologiæ* o *Originum sive etymologiarum libri viginti*).

Isòcrates d'Atenes (Ἰσοκράτης) (Atenes [Grècia], 436-338 aC), famós orador i retòric. Els crítics alexandrins li assignen el quart lloc entre els oradors àtics.[1132]

Ištar (Ἀστάρτη), deessa de l'amor i la guerra, de la vida, del sexe i la libido, de la fertilitat i la natura, atorgadora de fecunditat als éssers humans, animals i plantes, segons la mitologia babilònica.

Jacobi, Carl Gustav Jakob (Potsdam [Prússia, actual Alemanya], 10 de desembre de 1804 - Berlín [Alemanya], 18 de febrer de 1851), matemàtic prussià.

Jàmblic (Ἰαάμβλιχος) (Calcis [Grècia], segle iv), filòsof neoplatònic. Accentuà les tendències místiques del neoplatonisme i

1132. Els oradors àtics són els deu oradors considerats els més grans de l'era clàssica (segles v-iv aC). La llista varia en funció dels autors, però majoritàriament coincideix amb els noms donats per Aristòfanes de Bizanci i Aristarc de Samotràcia: Antifont, Andòcides, Lísies, Isòcrates, Iseu, Èsquines, Licurg, Demòstenes, Hipèrides i Dinarc.

propugnà la superioritat del politeisme sobre el cristianisme. Escriví, entre altres obres, *Vida de Pitàgores*.

Jàson (Ιάσων), heroi tessali promotor de l'expedició dels argonautes.

Jerònim de Càrdia Jerònim de Cardia (en grec: Ιερώνυμος; en llatí: Hieronimus) (Càrdia [Grècia], 354 aC - Pel·la [Grècia], 250 aC) historiador, esmentat sovint com una de les principals autoritats per a la història immediatament posterior a la mort d'Alexandre el Gran, perquè narra uns fets que havia viscut.

Jerònim de Siracusa (Ιερώνυμος των Συρακουσών), rei de Siracusa el 215 i el 214 aC, quan tenia quinze anys. Era net de Hieró II i fill de Geló. Després de la batalla de Cannes dubtà de la primacia romana i pactà amb els cartaginesos, cosa que comportà el setge de Siracusa en el qual morí Arquimedes.[1133]

Jesús (hebreu: Yehoshua; arameu: Jeixua o Jeixu; grec: Ιησούς Χριστός; àrab: Issa) (Betlem [Judea, Palestina], del 4 aC al 7 dC - Jerusalem [Judea, Palestina], 29 dC), predicador jueu conegut també com a Jesús de Natzaret. És la figura central del cristianisme, en què és conegut com a Jesucrist.

Joan (Yōḥānān) (Betsaida [Judea], ∼6 - Efes [Grècia], ∼100), un dels dotze deixebles de Jesús. Se'l coneix com a Joan l'evangelista. És autor d'*Apocalipsi* (*Αποκαλυψις Ιεσού Χριστού*) i l'únic dels apòstols que no morí màrtir.

Jordanus Nemorarius o Jordanus de Nemore (1225-1260), un dels més prominents científics de l'edat mitjana. Aprofundí la matemàtica i l'astronomia de l'època.

Juli Cèsar, Gai (Gaius Iulius Caesar) (?, 12 de juliol de 100 aC - Roma [Itàlia], 15 de març de 44 aC), general i polític que creà els fonaments del futur sistema imperial romà al final de la República. Vestí la toga, la corona i el ceptre d'un general triomfant, i utilitzà el títol d'*Imperator*. Fou assassinat durant els idus de març.

Juno, deessa romana assimilada a Hera, muller de Júpiter. Integrava la terna capitolina.

1133. Vegeu «Els tirans de Siracusa. Jerònim de Siracusa» (pàgines 64-65).

JÚPITER (Iuppiter), déu màxim del panteó romà, cap de la tríada del Capitoli (amb Minerva i Juno) i assimilat al Zeus grec.

JUSTÍ (llatí: Justinus; grec: Ἰουστῖνους), historiador que visqué probablement al final del segle I aC.

KEEL, Howard, nascut com a Harold Clifford Keel (Gillespie [Estats Units d'Amèrica], 13 d'abril de 1919 - Palm Desert [Estats Units d'Amèrica], 7 de novembre de 2004), actor i cantant que protagonitzà diversos musicals durant la dècada dels cinquanta.

KINGSLEY, Dorothy (Nova York [Nova York, Estats Units d'Amèrica], 14 d'octubre de 1909 - Monterey [Califòrnia, Estats Units d'Amèrica], 26 de setembre de 1997), escriptora de guions que treballà molt àmpliament per a la ràdio, la televisió i el cinema.

KOPERNIK, Mikołaj (Nicolau Copèrnic) (Toruń [regne de Polònia], 19 de febrer de 1473 - Frombork [regne de Polònia], 24 de maig de 1543), astrònom.

KUBRICK, Stanley (Nova York [Estats Units d'Amèrica], 26 de juliol de 1928 - Harpenden [Anglaterra], 7 de març de 1999), famós i controvertit guionista, productor i director de cinema, que destacà pel perfeccionisme tècnic i l'intens simbolisme intellectual. Fou guardonat amb un Oscar i catorze nominacions en els seus quaranta-quatre anys de carrera cinematogràfica.

LA PORTE DU THEIL, François-Jean-Gabriel de (París [França], 1742 - ?, 1815), historiador francès.

LADÓ (Λάδων), monstre, d'acord amb la mitologia grega. Era imaginat com un drac de cent caps que guardava les pomes d'or al jardí de les Hespèrides.[1134]

LAGRANGE, Joseph Louis (Torí [Itàlia], 25 de gener de 1736 - París [França], 10 d'abril de 1813), matemàtic italofrancès.

1134. El jardí de les Hespèrides (*μήλα των Εσπερίδων*) fou un lloc mitològic situat, segons alguns, als límits d'occident. Segons altres, més enllà del desert de Líbia o bé al nord llunyà. Sempre, però, més enllà dels límits coneguts, on només els herois s'aventuraven a la recerca de la immortalitat.

Laplante, Charles (Sévres [França], 14 de setembre de 1837 - París [França], 17 de juny de 1903), gravador i il·lustrador.

Larència (Acca Larentia), esposa del pastor Fàustul. Acollí Ròmul i Rem a casa seva.

Laughton, Charles (Yorkshire [Anglaterra], 1 de juliol de 1899 - Los Angeles [Califòrnia, Estats Units d'Amèrica], 15 de desembre de 1962), actor i director de cinema i teatre.

Legendre, Adrien-Marie (París [França], 18 de setembre de 1752 - Auteuil [França], 10 de gener de 1833), matemàtic conegut, sobretot, pels seus treballs sobre integrals el·líptiques i sobre teoria de nombres. És l'autor d'*Elements de geometria* (*Éléments de géométrie*).

Leodomant de Tassos, matemàtic grec del segle IV aC.

Leonardo da Pisa (Pisa [Itàlia], ∼1170 - ∼1250), matemàtic del segle XIII.

Leptines (Λεπτίνης), ciutadà notable de Siracusa, sogre de Hieró II.

Leto (Λητώ), deessa de la mitologia grega, l'equivalent grec de la Latona romana.

Lessing, Gotthold Ephraim (Kamenz [Saxònia, Alemanya], 22 de gener de 1729 - Brunsvic [Alemanya], 15 de febrer de 1781), poeta considerat el més important de la Il·lustració. Amb els seus drames i assajos teòrics tingué una influència significativa en l'evolució de la literatura alemanya. L'any 1773, mentre era bibliotecari de la Biblioteca Herzog August a Wolfenbüttel, trobà el «problema dels bous» d'Arquimedes i l'inclogué, a través d'un poema de quaranta-quatre versos, en un llibre de traduccions de clàssics grecs.

Licurg (Λυκοῦργος) (Atenes [Grècia], ∼396 - 323 aC), orador atenenc.

Lidos, fill d'Atis, rei de Lídia i germà de Tirrè, fundador de Tirrènia o, millor encara, del poble etrusc.

Lísies (Λυσίας) (Atenes [Grècia], ∼458 - 378 aC), orador.

Lisímac de Tràcia (∼350 - 281 aC), rei de Tràcia i Macedònia.

Liu Hui (Wei [Xina], ∼220 - ?, [Xina], ∼280), matemàtic.

Livi, Tit (Titus Livius) (Pàdua [Itàlia], 59 aC - 17 dC), historiador autor de *Des de la fundació de la ciutat* (*Ab Urbe condita*), una obra que descriu la història de Roma des del 753 aC fins a la mort de Drus Major l'any 9 dC, d'una magnitud colossal. Originalment, constava de 142 llibres, dels quals sols n'han sobreviscut 35: de l'1 al 10 i del 21 al 45, amb algunes llacunes.

Llatí (Latinus), segons la mitologia romana, rei del Laci quan arribà Enees, el príncep de Troia, a Itàlia.

Lleó, matemàtic de l'Acadèmia de Plató. Elaborà uns *Elements*.

Lleó de Tessalònica (Λέων), filòsof i eclesiàstic bizantí del segle IX, i del 832 al 842 patriarca de Constantinoble, conegut també com «el filòsof» (*ὁ φιλόσοφος*) o «el matemàtic» (*ὁ μαθηματικός*).

Llucià de Samòsata (grec: Λουκιανὸς ὁ Σαμοσατεύς; llatí: Lucianus Samosatensis) (Samòsata [avui Samsat, Turquia], ∼120 - Alexandria [Egipte], ?), important escriptor grec amb arrels sirianes. Es dedicà a l'estudi de la retòrica i la literatura.

Maharbal (Μαάρβας), destacat militar cartaginès de la Segona Guerra Púnica. Després d'algunes victòries contra els romans, indicà a Anníbal la conveniència d'avançar contra Roma. Quan Anníbal va rebutjar el seu consell li digué: «Vincere scis, Hannibal, victoria uti nescis».[1135]

Maia (Μαῖα), la més gran i la més tímida de les Plèiades, segons la mitologia grega. Posteriorment passà a ser identificada amb la deessa romana Bona Dea.

Manes (Μάνης), llegendari rei de Frígia, fill, segons algunes tradicions, de Zeus, el déu suprem, i Gea; pare d'Atis i progenitor de Lidos i Tirrè, herois epònims dels lidis i els tirrens o etruscos, segons la mitologia grega.

Manfred I de Sicília (Venosa [Itàlia], 1232 - Benevento [Itàlia], 1266), regent (1254-1258) i rei de Sicília (1258-1266).

1135. «Saps vèncer, Anníbal, però no saps aprofitar la victòria.»

Marc Antoni (Marcus Antonius) (Roma [Itàlia], 20 d'abril de 83 aC - Alexandria [Egipte], 30 aC), militar i polític de l'època final de la República.

Marcel, Marc (Marcus Marcellus), net de Marc Claudi Marcel i cònsol el 156 aC i el 152 aC.

Marcel, Marc Claudi (Marcus Claudius Marcellus) (?, 266-?, 208 aC), cinc vegades cònsol. Establí el setge, primer, i el bloqueig total, després, de Siracusa (214-212 aC) durant la Segona Guerra Púnica. La conquerí finalment el 212 aC, malgrat els esforços defensius atribuïts a Arquimedes.

Marci, Anc (Ancus Marcius) (?, 642 aC - Roma [Itàlia], 617 aC), quart rei de Roma, italosabí. Feu construir el pont Sublici (Pons Sublicius) sobre el riu Tíber per tal d'unir el Janícul a la ciutat.

Marí de Flàvia Neàpolis (grec: Μαρῖνος; llatí: Marinus), filòsof i retòric grec nascut a Flàvia Neàpolis (Palestina), deixeble i successor de Procle a l'Acadèmia platònica.

Mart (Μᾶρς), déu romà de la guerra, fill de Juno i una flor màgica. És a Roma el que Ares a Grècia.

Masinissa I (Μασσανάσσης), rei dels massils —una tribu numida de l'oest d'Argèlia, a les muntanyes de la Cabília (Tamurt n Iqbaylyen, 'terra dels cabdills', o Tamurt Idurat, 'terra de les muntanyes')— (206-202 aC) i del regne de Numídia (202-148 aC). En no voler ajudar els romans (149 aC), els donà un motiu per a iniciar la Tercera Guerra Púnica.

Mausol (Μαύσωλος) (377-353 aC), sàtrapa de Cària.

Medea (Μήδεια), heroïna de la mitologia grega, filla d'Eetes, rei de la Còlquida. La seva figura de fetillera resta vinculada a la llegenda dels argonautes i Jàson.

Megetius, geòmetra només conegut pel fet que Pappos li dedica el llibre v de la *Col·lecció matemàtica*.

Menandre d'Atenes (Μένανδρος) (Atenes [Grècia], ∼342/341 aC - ∼292/290 aC), el més distingit dels poetes de la nova comèdia.

Menecme (Μέναιχμος) (Alopeconnés [ara Turquia], ∼380 aC - Cízic [Àsia Menor], 320 aC), filòsof i matemàtic grec.[1136]

Menelau d'Alexandria (Μενέλαος), matemàtic i astrònom grec al qual devem l'anomenat *teorema de Menelau*.

Menó (Μαίνων) (segle iv aC), escriptor peripatètic que feu una història de la medicina.[1137]

Menó (Μαίνων) (segle iv aC), grec sicilià ciutadà de Segesta, que de molt jove caigué captiu d'Agàtocles de Siracusa i arribà a tenir el favor del tirà. El jove Arcàgat, net d'Agàtocles, el convencé perquè conspirés contra ell. Mentre Arcàgat era fora de Siracusa amb l'exèrcit, Menó enverinà el tirà. La ciutat proclamà el restabliment de la llibertat. Aleshores, Menó es reuní amb Arcàgat i no trigà gaire a eliminar-lo i a assolir el comandament de les forces, quasi totes mercenàries. Amb aquestes i el suport dels cartaginesos, feu la guerra als siracusans i imposà els termes de la pau a Hicetes II, amb la condició del retorn dels exiliats. Aconseguí una posició rellevant a Siracusa fins a la seva mort.

Menrva o Menerva, deessa del seny, la guerra, l'art, els sabers i els poders de la mitologia etrusca. Equival a Atena i a Minerva. Fou molt venerada en el temps dels Tarquini, que li dedicaren un temple al Capitoli (509 aC). Forma part de la tríada capitolina.

Mercer, John Herndon Johnny (Savannah [Geòrgia, Estats Units d'Amèrica], 18 de novembre de 1909 - Hollywood [Los Angeles, Estats Units d'Amèrica], 25 de juny de 1976), líric, escriptor de música i cançons. Fundà el Capitol Records i col·laborà en la música de *Set núvies per a set germans*.

Mersenne, Marin (Oizés [França], 8 de setembre de 1588 - París [França], 1 de setembre de 1649), il·lustre erudit del segle xvii, membre de l'orde dels Mínims. S'aplicà en els camps de la teologia, les matemàtiques i la teoria musical.

---

1136. N'hem parlat a Pla (2016*b*), p. 323-328.
1137. Copleston (1946), edició castellana, volum i, p. 281.

Minerva, deessa romana assimilada a Atena, molt venerada en el temps dels Tarquini, que li dedicaren un temple al Capitoli (509 aC). Forma part de la tríada capitolina.

Minos (Μῐ́νος), mític rei de Creta, fill de Zeus i d'Europa.

Moisès (hebreu: Moshé) (Terra de Goshen, ∼1300 aC - Moab [actual Jordània], febrer o març de 1271 aC), personatge bíblic que, segons el relat de l'*Èxode*, alliberà el poble jueu de l'opressió a la qual es veia sotmès per Egipte. Proporcionà, segons el mateix relat, les taules de la llei de Déu al seu poble. Segons els textos bíblics, fou un líder religiós, legislador i profeta, a qui tradicionalment es considera l'autor de la Torà.

Montaigne, Michel Eyquem de (castell de Montaigne [Perigord, França] 28 de febrer de 1533 - 13 de setembre de 1592), pensador i polític del Renaixement.

Montesquieu, nom amb el qual és conegut Charles Louis de Segonat, senyor de la Brède i baró de Montesquieu (La Brèda [Gascunya, França], 18 de gener de 1689 - París [França], 10 de febrer de 1755), filòsof del segle de les llums.

Mubarak, Hosni (Kafr - El Mesehla [Egipte], 4 de maig de 1928), president d'Egipte del 14 d'octubre de 1981 a l'11 de febrer de 2011, moment en el qual fou destituït com a conseqüència de la Primavera àrab. Posà la primera pedra de l'actual Biblioteca alexandrina.

Nabucodonosor II (accadi: Nabû-kudurri-uṣur; hebreu: Nabūkaden'eṣṣar; grec: Ναβουχοδονοσορ) (605-562 aC), rei de Babilònia, sobirà més important de la dinastia caldea o neobabilònica (626-529 aC).

Nàucrates d'Eritrea (Ναυκράτης), orador grec de sobrenom Erythræus, ja que era natural d'Eritrea. Fou deixeble d'Isòcrates d'Atenes. El 352 aC competí per un premi en oratòria ofert en el funeral de Mausol. Principalment escrigué discursos judicials i polítics, i oracions fúnebres.

Nausica (Ναυσικάα), filla d'Alcínous, rei dels feacis, i la reina Areté. Apareix en el llibre VI de l'*Odissea* d'Homer. El seu nom, en grec, vol dir «cremadora de vaixells». Homer la descriu com una noia a qui Ulisses fa una gran impressió.

NAUSICLES (Ναυσιςλης) (segle IV aC), general atenenc que derrotà Filip II de Macedònia i reconquerí Tessàlia.

NEARC (Νέαρχος), oficial d'Alexandre el Gran; de fet, almirall, i un dels més distingits amics seus.

NEPOS o NEPOT, Corneli (Ticinum [Gàl·lia Cisalpina, ~100 aC - Roma (Itàlia), ~25 aC), literat que va formar part del cercle d'amics d'Àtic i va morir després del 27 aC, és a dir, sota el mandat d'August.

NEPTÚ (Νεπτῡνυς), déu romà invocat per a protegir les persones de la calor estival. Enviava les pluges. Amb el contacte amb la cultura grega, s'associà a Posidó i perdé la seva identitat original, amb la qual cosa passà a ser el déu dels mars i els terratrèmols. Tanmateix, les representacions artístiques el mostren amb els atributs de Posidó aportats per la religió grega. Igual que el déu grec, Neptú fou venerat pels romans com el déu dels cavalls amb el nom «Neptú Eqüestre» (Neptūnus Equester) i invocat a les curses de carros.

NERÓ, Gai Claudi (Caius Claudius Nero), magistrat romà de la família Clàudia. Adoptà el nom de Sabí Neró, vigorós, i fou un militar brillant contra els cartaginesos d'Asdrúbal, als quals vencé en la batalla de Metaure (207 aC). Fou cònsol i censor.[1138]

NERVAL, Gérard de (París [França], 22 de maig de 1808 - 26 de gener de 1855), pseudònim literari de Gérard Labrunie, el més essencialment romàntic dels poetes francesos, assagista i traductor francès.

NEWTON, Sir Isaac (Woolsthorpe-by-Colsterworth [Lincolnshire, Anglaterra], 4 de gener de 1643 - Kensington [Middlesex, Anglaterra], 31 de març de 1727), físic, matemàtic i filòsof.

NICOLAU V, de nom Parentucelli, Tommaso (Sarzana [Itàlia], 15 de novembre de 1397 - Roma [Itàlia], 24 de març de 1455), papa de l'Església catòlica de 1447 a 1455.

1138. Censor: a l'antiga Roma, cadascun dels dos magistrats encarregats de fer el cens o el registre dels ciutadans i llurs béns. El càrrec fou establert el 443 aC. Inicialment només ho podien ser els patricis, però els plebeus aconseguiren aquest privilegi a partir del 351 aC.

Nicòmac de Gerasa (Νικόμαχος ο Γερασηνός) (Gerasa [Síria], 60 - ?, 120), matemàtic.

Nicomedes (Νικομήδης) (?, ∼280 aC - ?, ∼210 aC), matemàtic grec.

Ninus (Νῖνος), rei mític assiri fundador de la ciutat de Nínive, esmentada a partir de 1800 aC com el lloc on s'adorava la deessa Ištar.

Noè (hebreu: Nōah ben Lemech), constructor de l'Arca de Noè i antecessor de tota la humanitat, ja que fou el patriarca de la família que se salvà del diluvi universal, segons el judaisme, el cristianisme i l'islam. És citat en el *Gènesi*, des del capítol cinquè fins al desè.

Numa Pompili (Numa Pompilius) (?, 715 aC - Roma [Itàlia], 673 aC), segon rei de Roma, sabí. Fixà les normes del dret sagrat i el calendari que distingeix els dies fasts (fastos), en els quals podien dur-se a terme els sacrificis, l'activitat judicial i la creació d'empreses, i nefasts, en els quals no es podien fer totes aquestes activitats per motius religiosos.

Numitor (Νουμίτωρ), rei d'Alba Longa, fill de Proca. Fou destronat i expulsat pel seu germà Amuli, que va obligar la filla d'ell, Rea Sílvia, a fer-se vestal per a evitar que tingués descendència. Va tenir, però, dos nets, Ròmul i Rem, que s'alçaren contra l'usurpador i li tornaren el regne. Per agrair-los aquest servei, Numitor els atorgà unes terres a la vora del Tíber, on pogueren fundar la ciutat de Roma.

Ocrísia (Ὀκρησία), serventa de Tarquini Prisc i mare de Servi Tul·li.

Octavi August, Gai Juli Cèsar (Caius Iulius Caesar Octavianus) (Roma o Veltræ [Itàlia], 23 de setembre de 63 aC - Nola [Nàpols, Itàlia], 19 d'agost de 14 dC), conegut també com a Octavià. Fou el successor de Juli Cèsar i el primer emperador.

Olimpíada de l'Epir (Ὀλυμπιάς), reina de Macedònia, esposa de Filip II de Macedònia i mare d'Alexandre el Gran.

Olivier, Laurence Kerr, baró Olivier i Sir (Dorking [Surrey, Anglaterra], 22 de maig de 1907 - Steyning [West Sussex, Anglaterra], 11 de juliol de 1989), conegut popularment com a Sir

Laurence Olivier, actor i director de cinema i teatre, i productor. Fou un dels actors més famosos i reverenciats del segle XX.

Òmfale (᾿Ομφάλη), reina de Lídia i mare d'Atis, segons la mitologia grega.

Onòmarc (᾿Ονόμαρχος) (segle IV aC), general dels focis en la guerra sagrada entre Atenes i els seus aliats i Filip II de Macedònia i els seus. Amb un exèrcit de vint mil homes i cinc-cents cavallers tornà a Tessàlia, però Filip II el derrotà i el feu crucificar després de mort (352 aC).

Orestes (᾿Ορέστης), heroi tràgic grec, fill d'Agamèmnon i Clitemnestra, protagonista d'*Orestea* (*Ορέστεια*), en la qual el destí el porta a venjar la mort del pare i a assumir-ne les conseqüències que li imposen els déus.

Orfeu (Ορφεύς) (llatí: Orpheus), personatge mític enormement polifacètic, les llegendes del qual donen encara avui grans problemes als estudiosos, ja que els orígens d'aquest poeta i músic encantador de feres es perden en la boira del temps.

Orosi, Pau (Braga [Galícia, Hispània romana], ∼385 - ?, ∼420), historiador, teòleg i apologista cristià. Hi ha qui diu que era natural de Tarraco.[1139]

Otacili Cras, Tit (Titus Otacilius Crassus), general actiu durant la Segona Guerra Púnica. A Sicília fou pretor el 217 aC, i propretor l'any següent. Envià una carta a Hieró II de Siracusa al Senat demanant ajut contra els cartaginesos.

Ovidi (Publius Ovidius Naso) (Sulmona [Itàlia], 20 de maig de 43 aC - Tomis [avui Constanta], 17 dC), poeta conegut en el món catalanoparlant com a P. Ovidi Nasó. Escrigué sobre temes d'amor, dones abandonades i transformacions mitològiques.

Pàmfila (Παμγίλη) (segle I dC), historiadora natural d'Epidaure i membre d'una família procedent d'Egipte. La seva obra principal és *Comentaris històrics* (*᾿Υπονήματα ἱστορικά*).

1139. Vegeu, en línia, <https://en.wikipedia.org/wiki/Orosius#Birthplace>.

Pan (Πάν), déu dels pastors i els ramats, en la mitologia grega, especialment venerat a l'Arcàdia tot i no tenir-hi grans santuaris. És el déu de la fertilitat i la sexualitat masculina desenfrenada. Es diu que perseguia les nimfes pels boscos. També se'l considera el déu salvatge dels boscos i els llocs naturals on els humans no han arribat encara.

Pappos d'Alexandria (Πάππος) (Alexandria [Egipte], ∼290 - ∼350), geòmetra.

Parigi, Giulio (Florència [Itàlia], 1571-1635), arquitecte, gravador, pintor de l'escola florentina i matemàtic.

Parmenió (Παρμενίων) (∼400 - 330 aC), pare del general Filotes. Fou un general macedoni. Serví el rei Filip II de Macedònia i després Alexandre el Gran, encara que es desconeix ben bé com ho feu.

Pascal, Blaise (Clarmont d'Alvèrnia [França], 19 de juny de 1623 - París [França], 19 d'agost de 1662), filòsof, matemàtic, físic, inventor, escriptor, moralista, místic i teòleg occità.

Paul, Gene de (Nova York [Estats Units d'Amèrica], 17 de juny de 1919 - ?, 27 de febrer de 1988), pianista, compositor i escriptor de música que va participar a *Set núvies per a set germans.*

Pausànies d'Orèstia (Παυσανίας ἐκ τῆς Ὀρεστίδος), militar macedoni de la casa reial dels orestes que fou guarda personal de Filip II de Macedònia. Era molt bell i havia estat amant del rei. I, tanmateix, segons una versió —potser la més plausible—, fou qui l'assassinà amb una espasa (336 aC).

Pell, John (Southwick [Sussex, Anglaterra], 1 de març de 1611 - Westminster [Londres, Anglaterra], 12 de desembre de 1685), matemàtic.

Pelòpides (Πελοπίδας), general i home d'estat, tebà i de família noble.

Perdicàs I (Περδίκκας) (Argos [Grècia], segle vii aC - Macedònia, segle vii aC), rei de Macedònia. Segons Heròdot i Tucídides —a diferència de Justí i Diodor de Sicília, que creuen que ho fou Caranos—, esdevingué el fundador de la monarquia macedònia.

Perdicàs III (Περδίκκας) (Macedònia, IV aC - 359 aC), rei de Macedònia que regnà del 365 al 359 aC.

Pèricles (Περικλῆς) (Atenes [Grècia], 495-429 aC), home d'estat atenenc tan important que donà nom a tot el segle V aC, el segle de Pèricles.

Perseu de Macedònia (grec: Περσεύς; llatí: Perseus) (Pel·la [Grècia], ∼212 aC - Alba Fucens [Itàlia], 165 aC), fill de Filip V de Macedònia i darrer rei macedoni. Fou vençut pels romans en la Tercera Guerra Macedònica (171-168 aC).

Pilat, Ponç (Pontius Pilatus), governador de la província romana de Judea entre els anys 26 i 36 de la nostra era.

Píndar (Πίνδαρος) (Tebes [Grècia] 522/518 aC - Argos [Grècia], 455/438 aC), poeta líric. Nascut en el si d'una família noble i acomodada, autor d'importants epinicis,[1140] és considerat un dels més grans exponents de la lírica coral. Viatjà moltíssim i escrigué per a reis i famílies importants.

Pirene (Πυρήνη), personatge de la mitologia grega, filla del rei Túbal, net de Noè. Per tal d'evitar que fugís del seu costat, Gerió incendià la serralada —el Pirineu, a la qual donà nom. Quan en sentí els laments, Hèracles acudí a treure-la de les flames i la trobà greument ferida. Abans de morir, li explicà que Gerió havia destronat el seu pare, Túbal, rei d'Ibèria, i que ella hagué de fugir. Però Gerió temia que algun dia tornés a reclamar el tron i, per això, calà foc a la muntanya. Hèracles l'enterrà a l'indret on l'havia trobada.

Pirros de l'Epir (Πύῤῥος) (Epir [Grècia], 318 aC - Argos [Grècia], 272 aC), rei de l'Epir, amb una vida de conquestes que el va convertir en un gran general i amb victòries pírriques que provocaven una gran pèrdua d'homes i material de guerra. Fou tirà de Sicília del 278 al 276 aC.[1141]

Pisano, Nino (Pisa [Itàlia], ∼1315 - 1370), el darrer escultor del Trecento. Se'l coneix pel relleu d'Euclides que es pot veure al campanar de Santa Maria dei Fiore (Florència).

1140. GEC (1965), «Cant de victòria».

1141. Vegeu «Els tirans de Siracusa. Pirros de l'Epir» (pàgines 61-62).

Pitàgores (Πυθαγόρας) (Samos [Grècia], 581 aC - Metapont [Grècia], 475 aC), filòsof i matemàtic.[1142]

Píteas (Πυθέας) (380-310 aC), explorador que navegà des del sud de França a les illes Britàniques per la banda de l'Atlàntic, descrivint les regions que anava visitant en una obra perduda durant l'incendi de la Biblioteca d'Alexandria, però citada per autors de l'època com Estrabó.

Pixòdar de Cària (grec: Πιξώδαρος; llatí: Pixodarus) (Halicarnàs [Grècia], ? - ∼334 aC), sàtrapa, rei de la dinastia de Cària. Fou embaixador a Atenes (337 aC). Governà durant cinc anys. El 337 aC oferí la mà de la seva filla gran a Arrideu, fill primogènit de Filip II i príncep de Macedònia. En aquests moments, Alexandre el Gran estava enfrontat amb ell i això el portà a erigir-se també com a pretendent de la princesa cària, cosa que Pixòdar admeté, però que Filip II anul·là amb la detenció de tots els amics d'Alexandre que havien participat en l'afer. L'aliança de Macedònia i Cària trontollà.

Plató (Πλάτων), l'autèntic nom del qual era, potser, Aristocles, el nom del seu avi (Atenes [Grècia], ∼21 de maig de 427 aC - 347 aC), filòsof d'immensa influència a la Grècia clàssica. Fou deixeble de Cràtil i Sòcrates, i mestre d'Aristòtil. Fundà l'Acadèmia (Ἀκαδήμεια) i és autor dels famosos *Diàlegs socràtics* (*Σωκρατικός λόγος*).

Playfair, John (Benvie [Escòcia], 10 de març de 1748 - Burntisland [Escòcia], 20 de juliol de 1819), matemàtic.

Plini el Vell (Gaius Plinius Secundus) (Como [Itàlia], 23 - Pompeia [Itàlia], 79), exercí durant quatre anys el càrrec de procurador a la Tarraconense, juntament amb Neró. Fou un navegant expert i comandà diverses flotes romanes.

1142. Pla (2016*b*), § 2.4, p. 87-151. Voldríem fer constar que la frase en la qual es parla del *tetraglufon*, a la p. 95, l'hem manllevat de <https://www.filosofar.cat/index.php/historia-de-la-filosofia/pensament-antic/54-presocratics/213-preceptes-pitagorics> i no ho vam consignar, com ens ha fet notar Arnau Sánchez en un correu electrònic que ens ha enviat. Li volem agrair que ens ho hagi fet notar. Això no obstant, aquest terme el trobem molt ben explicat a Dacier (1706), p. 125.

PLUTARC, Luci Mestri (Πλούταρθος) [Queronea [Grècia], ∼46 aC - Delfos [Grècia], ∼120 aC), historiador i assagista que visqué en temps de la Grècia romana. És conegut sobretot per la col·lecció de biografies de personatges grecs i romans titulada *Vides paral·leles* (*Βίοι Παράλληλοι*).

PLUTARC D'ATENES (Πλούταρχος) (Atenes [Grècia]?, 350-430), filòsof neoplatònic eclèctic o sincretista.[1143] Dirigí l'escola neoplatònica d'Atenes a començaments del segle V. Fou mestre de Sirià, al qual succeí al capdavant de l'escola, i de Procle.

POINCARÉ, Jules (Nancy [França], 29 d'abril de 1854 - París [França], 17 de juliol de 1912), matemàtic.

POLIBI (Πολύβιος) (Megalòpolis [Grècia], 205-120 aC), historiador que, entre altres obres, ens ha deixat històries de les guerres púniques i de la Guerra de Numància, que cobreixen amb detall el període que va del 246 al 146 aC. És un avantpassat remot de la historiografia de Roma i la criptografia, gràcies al mètode de senyals lluminosos bisellats en «quadrat» que duen el seu nom.

POLÍCRATES DE SAMOS (Πολυκράτης) (Samos [Grècia], 574 aC - Sardes [Àsia Menor], 615 aC), tirà.

PÓLYA, George (Budapest [Hongria], 13 de desembre de 1887 - Palo Alto [Califòrnia, Estats Units d'Amèrica], 7 de setembre de 1985), matemàtic.

POMPEU MAGNE, Gneu (Cnaeus Pompeius Magnus) (Roma [Itàlia], 29 de setembre de 106 aC - Egipte, 29 de setembre de 48 aC), militar i home d'estat. Feu construir el Teatre de Pompeu al Camp de Mart, a Roma, entre el 61 i el 55 aC, el primer teatre monumental bastit de manera perdurable.

PORFIRI (Πορφύριος) (Tir [Fenícia], ∼232 - Roma [Itàlia], ∼304), filòsof neoplatònic que fou important per a la història de les matemàtiques per la seva *Vida de Pitàgores* (*Πυθαγ΄ρειος Βίος*) i el seu comentari als *Elements* d'Euclides, utilitzat per Pappos per a elaborar el seu propi comentari. No obstant això, la

1143. L'eclecticisme és, en síntesi, el mètode filosòfic que consisteix a escollir les idees més acceptables de diferents doctrines, tant culturals com religioses, i reinterpretar-les amb vista a formar un cos doctrinal.

seva aportació més important la feu en l'àmbit de la filosofia i la religió.

Poros d'Hispasdes (sànscrit: Pururava), cabdill i militar. S'enfrontà a Alexandre el Gran a la riba del riu del Penjab Jhelum (en grec: Υδάσπες; ara: Jehlum), on fou derrotat pel macedoni.

Posidó (Ποσειδών), déu dels oceans, segons la mitologia grega. Malgrat que era el rei dels mars, no es traslladava mai amb vaixell, sinó que ho feia amb una quàdriga impulsada per dofins. En la mitologia romana, el seu equivalent és Neptú. Els seus atributs són: el trident, els dofins, els tritons i el cavall.

Posidoni d'Apamea (Ποσειδώνιος) (Apamea [Síria], 135 aC - Rodes [Grècia], 51 aC), polític, geògraf, astrònom, historiador i filòsof estoic grec.

Proca, rei d'Alba Longa, pare d'Amuli i de Numitor, al qual va nomenar hereu del regne mentre llegava els seus tresors a Amuli.

Procle d'Alexandria (Πρόκλος) (Constantinoble [Imperi bizantí, avui Istanbul, Turquia] 412 - Atenes [Grècia], 485), filòsof neoplatònic.

Pròdic de Queos (Πρόδικος) (Yulis [Grècia], 465 aC - Atenes [Grècia], 395 aC), sofista i filòsof nadiu de l'illa de Queos, a les Cíclades. Pertany a una nova generació de sofistes. Com els altres, viatjà per moltes ciutats, entre les quals Atenes.

Prúsies I (Προυσίας) (regió de Bitínia, segle iii aC - Bursa [Turquia], 182 aC), rei de Bitínia del 228 al 180 aC, conegut com a Χωλός, 'el Coix'. Donà asil a Anníbal, que l'ajudà en la contesa militar contra Pèrgam. Però, forçat per Roma, es veié empès a lliurar-lo i el cartaginés preferí suïcidar-se.

Ptolemeu, Claudi (Κλαύδιος Πτολεμαίος) (Ptolemais Hermiu [Egipte], ∼85 - Canop [Egipte], ∼165), astrònom, matemàtic i geògraf.

Ptolemeu I Soter, «El salvador», (Πτολεμαῖος Σωτήρ) (regne de Macedònia, 367 aC - Alexandria [Egipte], 282 aC), general d'Alexandre el Gran, del qual era amic des de la jovenesa, i un dels principals diàdocs que es convertí en sàtrapa d'Egipte

(321 aC). L'any 305 aC, esdevingué rei, però no pas faraó, una dignitat que rebé, en canvi, el seu fill Ptolemeu II. Inicià la dinastia ptolemaica, que regnà Egipte fins a l'any 30 aC, moment en el qual caigué en mans de l'Imperi romà. Feu construir el famós far d'Alexandria i l'encara més famós museu amb la gran biblioteca. Regnà del 305 al 285 aC.

Ptolemeu II Filadelf, «El que estima el germà, la germana» (Πτολεμαίος Φιλάδελφος) (illa de Cos [Grècia], 309 aC - Alexandria [Egipte], 29 de gener de 246 aC), rei d'Egipte de la dinastia ptolemaica, successor del seu pare. Regnà del 285 al 246 aC.

Ptolemeu III Evergetes, «El benefactor» (Πτολεμαῖος Εὐεργέτης) (illa de Cos [Grècia], 285 aC - Alexandria [Egipte], 222 aC), rei d'Egipte de la dinastia ptolemaica, successor de Ptolemeu II Filadelf. Regnà del 246 al 221 aC.

Ptolemeu IV Filopàtor, «L'estimat del pare» (Πτολεμαῖος Φιλοπάτωρ), rei d'Egipte del 221 al 205 aC.

Ptolemeu V Epífanes, «L'il·lustre» (Πτολεμαῖος Ἐπιφανής), (209-180 aC), rei d'Egipte de 197 al 181 aC.

Queril de Samos (Χοιρίλος) (Samos [Grècia], ∼480 aC - Macedònia [regne de Macedònia], 399 aC), poeta èpic autor d'una obra sobre les guerres entre els grecs i els perses, coneguda amb el nom de *Perse* (*Περσηΐς* o *Περσικά*).

Quirí (Quirinus), déu sabí de la guerra, assimilat al déu romà Mart. Deïficació de Ròmul.

Rafael (Raffaello Sanzio o Rafael d'Urbino) (Urbino [ara Itàlia], 6 d'abril de 1483 - Roma [Itàlia], 6 d'abril de 1520), pintor i arquitecte de l'Alt Renaixement. És cèlebre per la perfecció i la gràcia dels seus dibuixos i pintures.

Ratdolt, Erhard (Augsburg [Alemanya], 1447 - Venècia [Itàlia], ∼1527), editor que desenvolupà la seva tasca a Venècia de 1476 a 1486. Fou el responsable de la primera edició dels *Elements* d'Euclides (1482).

Rem (Remus), cofundador de Roma i el Senat Romà.

RENAULT, Mary (Forest Gate [Londres, Anglaterra], 4 de setembre de 1905 - Ciutat del Cap [Sud-àfrica], 13 de desembre de 1983), escriptora anglesa, coneguda per les seves novel·les històriques ambientades a l'antiga Grècia. A més de vius retrats de ficció de personatges clàssics com Teseu, Sòcrates, Plató i Alexandre el Gran, va escriure una biografia sobre aquest darrer.

RIEMANN, Bernhard (regne de Hannover [Alemanya], 17 de setembre de 1826 - Verbania [Itàlia], 20 de juliol de 1866), matemàtic.

RÒMUL (Romulus) i Rem, fundadors de Roma i del Senat Romà.

RUSSELL, Bertrand (Trellech [Gal·les], 18 de maig de 1872 - Penrhyndeudraeth [Gal·les], 2 de febrer de 1970), lògic, filòsof i matemàtic.

SAINT-VINCENT, Grégoire de (Gregorius de Sancto Vincentio) (Bruges [Bèlgica], 22 de març de 1584 - Gant [Bèlgica], 5 de juny de 1667), matemàtic. En l'obra *Obra geomètrica: la quadratura del cercle i les seccions còniques* (*Opus Geometricum Quadraturæ Circuli et Sectionum Coni*) (1647), introduí l'expressió «mètode d'exhaustió» per tal de referir-se al que emprava Èudox i recollia Euclides a EX 1 i en el llibre XII. També recorre al mètode cinemàtic per a determinar les tangents de les corbes.

SALMONEU (Σαλμωνεύς), rei de l'Èlide (Ἠλεία). Construí un pont de bronze per on passava amb el seu carro, que tenia rodes de ferro i arrossegava cadenes perquè sonés com un tro. Des d'allà llançava torxes enceses per imitar els llamps. Zeus, irritat per aquesta suplantació, el fulminà i el precipità al Tàrtar (Τάρταρος), que, segons la *Teogonia* d'Hesíode, és la regió més profunda del món, situada per sota dels mateixos inferns.

SARGON D'ACCAD, EL GRAN (accadi: *Šarru-kīnu*, 'el Legítim') (2371-2316 aC), rei semític fundador de la seva dinastia.

SARTON, George Alfred Leon (Gant [Bèlgica], 31 d'agost de 1884 - Cambridge [Massachusetts, Estats Units d'Amèrica], 22 de març de 1956), fundador de la història de la ciència com a disciplina acadèmica.

Sàtir (Σάτυρος) (Cal·latis [Romania], segle III aC - Alexandria [Egipte], segle III aC), filòsof peripatètic i historiador grec que visqué, segurament, durant o després de Ptolemeu IV Filopàtor.

Schiaparelli, Giovanni Virginio (Savigliano, prop de Cuneo [Piemont, Itàlia], 14 de març de 1835 - Milà [Itàlia], 4 de juliol de 1910), astrònom.

Schreiber, Peter (Dresden [Alemanya], 23 de juny de 1938), matemàtic i historiador de la matemàtica, especialista en fonaments de la matemàtica i la geometria.

Segonat, Charles Louis de. Vegeu Montesquieu.

Selene (Σελήνη), personificació de la Lluna, filla dels titans Hiperió i Teia, i germana d'Hèlios, segons la mitologia grega.

Seleuc de Selèucida (Σέλευκος ὁ Σελεύκειος) (Selèucida [Iraq], 190 aC - ?, 150 aC), astrònom, professor i filòsof. Fou un dels pocs defensors de la teoria heliocèntrica d'Aristarc de Samos.

Seleuc I Nicàtor (regne de Macedònia, 358 aC - Lisimàquia [Grècia], 281 aC), sàtrapa de Babilònia, rei de Síria i fundador de l'Imperi selèucida. Era fill d'Antíoc de Macedònia, general del rei Filip II de Macedònia.

Semíramis (grec: Σεμίραμις; assiri: Šammuamat), llegendària reina. Ella i el seu espòs, Ninus, són considerats els mítics fundadors de l'Imperi assiri de Nínive. La seva història és narrada per Diodor de Sicília.

Serapis (Σάραπις), déu grecoegipci. Ptolemeu I el declarà patró d'Alexandria i déu oficial d'Egipte i Grècia, amb el propòsit d'unir culturalment tots dos pobles.

Sili Itàlic (Titus Caius Silius Italicus), poeta èpic llatí nascut l'any 25. Fou procònsol d'Àsia, càrrec que desenvolupà amb rectitud. La seva obra poètica abraça els disset llibres del poema èpic titulat *Les guerres púniques* (*Bella Punica*).

Sílvia, Rea (Rhēa Silvĭa), coneguda també com a Ília, filla de Numitor i mare de Ròmul i Rem.

Simmons, Jean Merilyn (Londres [Anglaterra], 31 de gener de 1929 - Califòrnia [Estats Units d'Amèrica], 22 de gener de 2010), actriu. Entre les seves pel·lícules destaquen la versió dirigida per Laurence Olivier de *Hamlet*, *Espàrtac* de Stanley Kubrick i *Elmer Gantry*, de Richard Brooks.

Simplici de Cilícia (Σιμπλίκιος) (Cilícia [Àsia Menor, ara Turquia], ∼490 - ∼560), filòsof, un dels darrers membres de l'escola neoplatònica. Tractà de defensar l'antiga mitologia grega contra l'expansió del cristianisme.

Simson, Robert (West Kilbride [Ayrshire, Escòcia], 14 d'octubre de 1687 - Glasgow [Escòcia], 1 d'octubre de 1768), matemàtic.

Sirià d'Alexandria (Συριανός) (Alexandria [Egipte], segle v), filòsof neoplatònic. Estudià a Atenes i tingué com a mestre Plutarc, cap de l'escola neoplatònica, que el tenia en alta consideració i el nomenà el seu successor. El més destacat dels seus deixebles fou Procle.

Slodtz, Sébastien (Anvers [Bèlgica], 1655 - París [França], 1726), escultor barroc.

Sòcrates d'Atenes (Σωκράτης) (Atenes [Grècia], ∼470 - ∼399 aC), filòsof. Se'l considera el fundador de la filosofia occidental.

Sòfocles (Σοφοκλῆς) [?, ∼496 aC - ?, hivern de 406 o 405 aC], dramaturg, autor, entre d'altres, d'*Antígona* (*Ἀντογόν*), *Èdip tirà* (*Οἰδίπος Τύραννος*) —coneguda com a *Èdip rei*—, *Electra* (*Ἠλέκτρα*), *Àiax* (*Αίας*), *Les Traquínies* (*Τραχίνιαι*), *Filoctetes* (*Φιλοκτήτης*) i *Èdip a Colonos* (*Οἰδίπος ἐπὶ Κολωνῷ*).

Sosígenes (Σωσιγένης) (Alexandria [Egipte], segle i aC), filòsof peripatètic i astrònom. Juli Cèsar li encarregà la correcció del calendari (46 aC). De la seva personalitat només en sabem que era un astrònom de cert renom i, segons Simplici, que escrigué sobre astronomia. Segurament visqué a Roma fins al temps d'August i col·laborà en l'establiment del nou calendari, que després August retocà contra la seva voluntat.

Sosístrat II de Siracusa (Σωσὅστρατος β), tirà de Sicília, junt amb Tonió, del 279 al 277 aC.[1144]

1144. Vegeu els «Els tirans de Siracusa. Sosístrat» (pàgines 60-61).

SÒSTRAT DE CNIDOS (Σώστρατος), arquitecte i escultor que visqué en temps d'Alexandre el Gran. Construí el far d'Alexandria per a Ptolemeu I Soter. La llegenda diu que, com que el rei no li permeté gravar-hi el seu nom, el deixà cisellat en una pedra enterrada a sota d'una altra que duia el del rei. També feu diverses obres que embelliren la ciutat de Cnidos.

STEVIN (Bruges [Bèlgica], 1548 - La Haia [Holanda], 1620), matemàtic i físic.

SUÏDA (Σουίδας) (segle X), autor d'una gran enciclopèdia bizantina sobre el món antic, la *Suda*, escrita en grec vers el segle X i que es coneix amb el nom grec *Σοῦδα* i el llatí *Suidæ lexicon*. Però, molt probablement, no en fou l'únic responsable; hi devien intervenir diversos erudits.[1145]

TACI, Tit (Titus Tacius) (Cures [Itàlia], ? - Lavínium [Itàlia], 745 aC), rei de Roma durant cinc anys, juntament amb Ròmul, segons la llegenda.[1146] Però, per tal de venjar el rapte de les dones sabines, dones del seu poble, declarà la guerra a Roma.

TÀCIT, Publi o Gaius Corneli (Gàl·lia Narbonesa, 56 - Imperi romà, 118), historiador, senador, cònsol i governador. El seu mètode històric es caracteritza per l'intent d'assolir la imparcialitat. Ho sintetitza la seva locució «sense rancúnia i sense parcialitat» («sine ira et studio»), lema que ha inspirat els historiadors i els homes de ciència al llarg del temps. Escrigué *Annals*, obra històrica sobre el període comprès entre la mort d'August i la de Neró. Aquesta segona potser és més coneguda perquè s'hi atribueix l'origen dels cristians.[1147] És considerada una prova de l'existència de Jesús de Natzaret.

TALASSI, personatge desconegut que apareix en el rapte de les sabines de Tit Livi.

TALES (Θαλῆς ὁ Μιλέσιος) (Milet [Grècia], ∼624 - ∼547 aC), matemàtic i filòsof.

1145. L'entrada *Suda* de GEC (1965) l'atribueix a Hesiqui de Milet.

1146. PLUTARC (1926-1946), 23, 1-3.

1147. TACIT (1930-1970), llibre XV, 44, edició catalana, volum VI, p. 116-117: «Aquest nom els ve de Crist, el qual, sota el principat de Tiberi, el procurador Ponç Pilat havia lliurat al suplici.»

TARCONT, personatge molt proper a Tirrè, cofundador de les dotze ciutats etrusques. Donà nom a la ciutat de Tarquínia.[1148]

TARQUINI, Luci, conegut com a Tarquini el Superb (Lucius Tarquinius Superbus) (Laci [Itàlia], ∼534 aC - Cumes [Itàlia], 509 aC), setè rei de Roma. Embellí la ciutat però, a causa d'una ofensa infringida pel seu fill, hagué d'abandonar-la.

TARQUINI PRISC (Lucius Tarquinius Priscus) (Roma [Itàlia], ∼616 - 579 aC), cinquè rei de Roma. Es preocupà molt de l'obra pública i feu construir la Cloaca Màxima i el Circ Màxim. Fou assassinat pels fills d'Anc Marci.

TARTAGLIA («El Quec»), sobrenom de Niccolò FONTANA.

TEETET D'ATENES (Θεαίτητος) (Atenes [Grècia], ∼417- ?, ∼369 aC), filòsof i matemàtic.

TEIA —o TIA o TEA—, una de les titànides de la mitologia grega, progenitora d'Hèlios i Selene.

TEÓ D'ALEXANDRIA (Θέων ὁ Ἀλεξανδρεύς) (Alexandria [Egipte], ∼370 - ∼415), matemàtic i astrònom grec, pare d'Hipàtia d'Alexandria.

TEÓ D'ESMIRNA (Θέων ὁ Σμυρναίος) (Esmirna [Àsia Menor], ∼70 - ?, ∼135), filòsof.

TEODOR DE CIRENE (Θεόδωρος) (Cirene [Líbia], 465-398 aC), filòsof pitagòric del temps de Pèricles.

TEODOSI DE TRÍPOLI (Θεὸδοσιος) (Trípoli [Grècia], 160 aC - ?, ∼100 aC), matemàtic i astrònom, filòsof de la secta dels escèptics i autor d'*Esfèriques* (*Σφαιρικά*).

TEODOSI I EL GRAN (Flavius Theodosius) (Cauca [Segòvia, península Ibèrica], 11 de gener de 347 - Mediolanum [Milà, Itàlia], 17

1148. «Tarcont, comandant dels etruscos, fill de Mefenci i fundador de *Tarquinii*. El seu nom és veritablement etrusc.» VIRGILI (1972), edició catalana, volum III, 506, p. 105 i nota 115. I també la nota 1151 (pàgina 410). Les citacions que fa Virgili d'aquest heroi etrusc són en el llibre VIII, 506, 603, edició catalana, volum III, p. 105 i 110. I també en el llibre X, 153, p. 290-310, nota 78, i 184, 727, 746, edició catalana, volum IV, p. 29, 36, 78, 101 i 102.

de gener de 395), emperador romà del 379 al 395. Promulgà l'Edicte de Teodosi o de Tessalònica (380, al mateix indret i el mateix any en els quals el batejaren), que proclamava la unitat religiosa de l'Imperi sota l'autoritat dels bisbes de Roma i Alexandria. El cristianisme passava a ser la religió oficial de l'Imperi romà.

TEOFRAST (Θεόφραστος) (Eresos [Grècia], 372 aC - Atenes [Grècia], 287 aC), filòsof. Fou nomenat successor d'Aristòtil al capdavant del Liceu, quan aquest darrer anà a Calcis.

TEOPOMP DE QUIOS (Θεόπομπος) (Quios [Grècia], ∼378 aC - Alexandria [Egipte], ∼303 aC), historiador, deixeble d'Isòcrates d'Atenes, del qual aprengué la tècnica oratòria que aplicava a la història. Escrigué diverses obres: un epítom a l'obra d'Heròdot; una continuació, en dotze llibres, de la història de Grècia de Tucídides, i *Filípiques* (*Φιλιππικὰ*), una història de Filip en 58 llibres.

TESEU (Θησεύς), llegendari rei d'Atenes que visqué una generació abans de la Guerra de Troia. El seu nom prové de la mateixa arrel que *θεσμος*, 'institució'.

TEUDI DE MAGNÈSIA (Θεύδιος ο Μάγνης), matemàtic grec del segle IV aC.

TIBERI (Tiberius Claudius Nero), emperador romà. Governà des del 18 de setembre de 14 fins a la seva mort, el 16 de març de 37. Fou el successor d'Octavi August.

TIMÀRIDES DE PAROS (Θυμαρίδας) (Paros [Grècia], IV aC - ?, IV aC), matemàtic.[1149]

TIMEU DE LOCRES (Τίμαιος ὁ Λοκρός) (Locres [Grècia], segle II aC - I aC), filòsof pitagòric, suposat mestre de Plató. És un dels personatges dels diàlegs de Plató *Timeu* (*Τίμαιος*) i *Críties* (*Κριτίας*).

TIMOCARIS D'ALEXANDRIA (Τιμόχαρις) (Alexandria [Egipte], 320-260 aC), astrònom i filòsof contemporani d'Euclides.

TÍNIA, déu del cel de la mitologia etrusca.

1149. PLA (2016*b*), p. 331-333.

Tinió (Θινιὸν) (? - Siracusa, 276 aC), tirà de Siracusa, junt amb Sosístrat II del 279 al 277 aC.[1150]

Tirrè (grec: Τιρρηνός; llatí: Tirrenus). Segons la mitologia etrusca i grega, juntament amb el seu germà Tarcont, un dels fundadors de la federació etrusca formada per dotze ciutats.[1151]

Todhunter, Isaac (Rye [East Sussex, Anglaterra], 23 de novembre de 1820 - Cambridge [Anglaterra], 1 de març de 1884), matemàtic.

Tomàs (segle i), un dels dotze apòstols, conegut també com a Dídim, el bessó. Joan, en el seu evangeli, el descriu com un incrèdul perquè es resistia a acceptar la resurrecció de Jesús.[1152]

Tomàs d'Aquino (italià: Tommasso d'Aquino; llatí: Thomas Aquinas) (Rocasecca [Laci, Itàlia], 28 de gener de 1225 - abadia de Fossanova [Itàlia], 7 de març de 1274), un dels filòsofs i teòlegs més notables de l'edat mitjana. Proporcionà bases importants per a la teologia cristiana en incorporar gran part del llenguatge i les idees aristotèliques.

Torelli, Giuseppe (Verona [Itàlia], 3 de novembre de 1721 - 18 d'agost de 1781), matemàtic i lletrat.

Torricelli, Evangelista (Faenza [Estats Pontificis], 15 d'octubre de 1608 - Florència [Itàlia], 25 d'octubre de 1647), matemàtic.

Trajà, Marc Ulpi (Itàlica [prop de l'actual Sevilla], 18 de setembre de 53 - Selinos [Cilícia], 9 d'agost de 117), general i emperador romà del 98 al 117.

Trasó (Θρασον) (segle iii aC), conseller de Jerònim de Siracusa. Fou partidari de l'aliança amb els romans.

Trifó, Salvi (Tryphon, Salvius) (Atenes [Grècia], ? - Siracusa [Sicília], 100 aC), juntament amb Atenió, líder de la Segona Guerra Civil.

---

1150. Vegeu «Els tirans de Siracusa. Tinió» (pàgines 60-61).

1151. Vegeu la nota 117 de Virgili (1972), edició catalana, volum iii, p. 105: «Tirrè: etrusc, equivalència normal en Virgili. De fet, els lidis arribats a Itàlia, sota comandament de *Tyrrhenus*, prengueren, de llur rei, el nom de Tirrens. Hom deia que Tarcont era germà o fill de Tirrè.»

1152. Joan (1970), p. 427-428.

TÚBAL (hebreu: Tubal ben lafeth), net de Noè, rei d'Ibèria. Després del diluvi universal, Noè encarregà als seus fills repartir-se pel món. A Túbal li tocaren les costes occidentals de la Mediterrània. En arribar a un indret, anomenà *Tarraho* (actual Tarragona) la població, *Ebre* el gran riu, i *Ibèria*, en honor al seu segon fill Íber, tot el territori.

TUCÍDIDES (Θουκυδίδης) (Halimous [Grècia], ∼455 aC - Atenes [Grècia], ∼400 aC), historiador autor de la *Història de la guerra del Peloponès* (*Ιστορία του Πελοποννησιακού Πολέμου*), en què recull les lluites del segle V aC entre Esparta i Atenes. Es considera el primer treball històric científic, ja que descriu el món protagonitzat pels humans, amb motius senzills i sense cap intervenció dels déus.

TUL·LI, Servi (Servius Tullius) (?, 578 aC - Roma [Itàlia], 535 aC), sisè rei de Roma, fill de Tarquini Prisc i Ocrísia, serventa del rei. Eixamplà la ciutat de Roma i hi feu construir una muralla que inclogués els turons Quirinal, Viminal i Esquilí.

TÚL·LIA, coneguda com la més petita (Tulia Minor), filla de Servi Tul·li. Conspirà contra el seu pare juntament amb Tarquini el Superb.

TUL·LUS HOSTILI (Tullius Hostilius) (?, 672 aC - Roma [Itàlia], 642 aC), tercer rei sabí de Roma. Conquerí Alba Longa, actual Castel Gandolfo. Se li atribueix la creació de la institució dels «fecials» —magistrats de caràcter religiós que actuaven representant la població en qüestions relatives a altres nacions— i de la cúria —divisió de la primitiva ciutat de Roma presidida per un curiós i formada per deu membres de cada tribu.[1153]

UNI, deessa suprema de la mitologia estrusca, equivalent a Hera i a Juno.

URÀ (Οὐρανός), un dels déus primordials de la mitologia grega, en concret el del Cel.

VACUNA, deessa sabina adorada pels camperols.

1153. DIEC (2007).

VALENCIENNES, Pierre-Henri de (Tolosa [França], 6 de desembre de 1750 - París [França], 16 de febrer de 1819), pintor autor del quadre que representa la troballa de la tomba d'Arquimedes per part de Ciceró (1787).

VALERI MÀXIM (conegut com a Marc Valeri Màxim i com a Publi Valeri Màxim) (Valerius Maximus) (segle I), compilador romà d'anècdotes històriques en l'obra *Dates i fets meravellosos* (*De Factis Dietisque Memorabilibus Libri IX*).[1154] Visqué en temps de Juli Cèsar i Octavi August.

VALLA, Giorgio (Piacenza [Itàlia], 1447 - Venècia [Itàlia], 1500), humanista i escriptor del Renaixement, conegut sobretot per la seva enciclopèdia, *Sobre què cal recercar i de què cal fugir* (*De expetendis i fugiendis rebus*). Hi apareixen, editats per primera vegada, alguns fragments de l'obra d'Arquimedes.

VARRÓ, Marc Terenci (Marcus Terentius Varro) (Reate, ara Rieti [Sabínia, ara Itàlia], 116-27 aC), polígraf, escriptor, militar i magistrat romà. És considerat un dels erudits més grans de la història de Roma. Quan tenia vint-i-cinc anys es dedicà a l'estudi de la literatura grega. De la seva vida personal no se'n sap res més. La major part de la seva obra, com ara *Disciplinæ*, s'ha perdut.

VERGILIUS, vegeu VIRGILI.

VESTA, deessa de la llar en la mitologia romana. Correspon a Hestia (Ἑστια) en la mitologia grega, encara que assumí més rellevància en el culte romà.

VIBENNI, Celi o Celes (Cœlius Vibenni), cap etrusc que s'establí al turó Celi. Col·laborà amb Ròmul contra Tit Taci en les contestes que tingueren lloc arran del rapte de les sabines.

VICTORÍ, Gai Mari (Caius Marius Victorinus) (?, 290 - Roma [Itàlia], 364), gramàtic i retòric. Ensenyà retòrica a la Roma de la meitat del segle IV i obtingué tanta reputació que n'erigiren una estàtua al fòrum de Trajà. Ja era vell quan estudià les escriptures i esdevingué teòleg cristià.

1154. En línia a <http://www.tdx.cat/handle/10803/283115>.

VICTÒRIA (Victoria), en la mitologia romana, era la deessa que personificava la victòria, el triomf. En destaquen els temples del Palatí i el Capitoli de Roma, on encara es conserven les estàtues que li dedicaven els vencedors de les batalles i competicions. August feu aixecar, al Senat, un altar en honor seu per a commemorar la batalla d'Àccium. Era representada com una dona alada, habitualment en actitud de cenyir una corona de llorer als vencedors i cèsars.[1155] S'identifica amb la deessa grega de la guerra Nikē i és una adaptació de Vacuna, la deïtat agrícola dels sabins.

VIÈTE, François (Fontenay-le-Comte [França], 1540 - París [França], 23 de febrer de 1603), matemàtic.

VIMONT, Édouard (París [França], 8 d'agost de 1846 - 1 de gener de 1930), pintor famós per un oli que representava la mort d'Arquimedes però que, malauradament, s'ha perdut.

VIRGILI, conegut també com a Publi Virgili Maró (VERGILIUS, Maro Publius) (Andes [prop de Màntua, Itàlia], 15 d'octubre de 70 aC - Brindes [ara Bríndisi, Itàlia], 21 de setembre de 19 aC), poeta romà, autor de les *Bucòliques* (*Bucolica*),[1156] les *Geòrgiques* (*Georgica*)[1157] i l'*Eneida* (*Æneis*).

VITRAC, Bernard, historiador francès de la matemàtica, en particular de la matemàtica grega.

VITRUVI POL·LIÓ, Marc (Marcus Vitruvius Pollio) (Roma, [Itàlia], 75 aC - ?, 10 aC), arquitecte i enginyer. És l'autor de *De Architectura*, l'únic tractat grecoromà d'arquitectura que ens ha arribat, font d'inspiració artística durant segles.

WALLIS, John (Ashford [Kent, Anglaterra], 23 de novembre de 1616 - Oxford [Anglaterra], 28 d'octubre de 1703), matemàtic.

---

1155. Magnífica la *Victòria de Samotràcia* (*Νίκη τῆς Σαμοθράκης*) del Museu del Louvre. És una escultura de marbre de l'antiga Grècia que representa la deessa Atena Nikē (Atena portant la victòria). Pertany a l'escola de Rodes i és del període hel·lenístic.

1156. Prové de la paraula grega *βουκολικά*, que deriva de *βουκόλος*, 'pastor'. També se les anomena *Ἐκλογαί*, èglogues de poesia excelsa.

1157. Del grec: *γεωργικός*, 'granger'.

WASSERMANN, Jakob (Fürth, [Alemanya], 10 de març de 1873 - Altaussee [Àustria], 1 de gener de 1933), escriptor jueu. Se'l considera austríac malgrat haver nascut a Alemanya.

WEHRLI, Fritz (Zuric [Suïssa, 9 de juliol de 1902 - 27 d'agost de 1987), estudiós de la Grècia clàssica i editor de la col·lecció de fragments *L'escola d'Aristòtil* (*Die Schule des Aristoteles*).

WOEPCKE, Franz (Dessau [Saxònia-Anhalt, Alemanya], 6 de maig de 1826 - París [França], 25 de març de 1864), historiador, orientalista i matemàtic. Se'l recorda per les traduccions i edicions de matemàtics àrabs medievals.

XENÒCRATES DE CALCEDÒNIA (Ξενοκράτης), filòsof de Calcedònia, Bitínia.

XENOFONT (Ξενοφῶν) (428 aC - entre el 355 i el 350 aC), escriptor, historiador i militar. Cèlebre pels seus escrits sobre la cultura i la història gregues, en particular les molt conegudes *Anàbasis* (*Ἀνάβασις*) i *Apologia de Sòcrates davant el jurat* (*Ἀπολογία Σωκράτους πρὸς τοὺς Δικαστας*).

ZENARC (segle VI aC), avi d'Euclides.

ZENÓ D'ELEA (Ζήνων) (Elea [Magna Grècia, ara Itàlia], ∼490 - ∼430 aC), filòsof eleàtic.

ZENÓ DE CÍTION (Ζήνων ὁ Κιτιεῦς) (Cítion [Xipre], ∼334 aC - Atenes [Grècia], ∼262 aC), filòsof fundador de l'estoïcisme.

ZENÓ DE SIDÓ (Ζήνων) (Sidó [Imperi selèucida, ara Líban], ∼150 aC - Atenes [Grècia], ∼75 aC), filòsof epicuri, contemporani de Ciceró, al qual sentí a Atenes. Parlava d'altres filòsofs en termes poc respectuosos, per exemple, es mofava de Sòcrates. Fou deixeble d'Apol·lodor Epicur. Diògenes Laerci el descriu com un pensador preclar i intel·ligent, i com un gran transmissor d'idees. Ciceró comparteix aquestes consideracions i Procle s'hi refereix com un crític d'Euclides.

ZENÒBIA (grec: Ζηνοβία; arameu: Bat-Zabbai) (Palmira [Síria], 240 - Roma [Itàlia], 275), reina de Palmira (269-275). Es revoltà contra Roma i fou vençuda per Aurelià.

Zenòdor (Ζηνόδωρος) (Atenes [Grècia], 200 aC - ?, 140 aC), matemàtic i autor de *Sobre les figures isoperimètriques* (*Περὶ ισομετρων σχημάτων*).

Zenòdot d'Efes (Ζηνόδοτος) (Efes [Grècia], 320-240 aC), gramàtic alexandrí. Fou el primer bibliotecari de la Biblioteca d'Alexandria.

Zeus (Ζέυς), déu suprem de l'Olimp, segons la mitologia grega.

Zeuxip (*Ζεὔξιππος*), polític beoci partidari dels romans.

Zonares, Joan (grec: Ἰωάνης ὁ Ζωναρᾶς; llatí: Joannes Zonaras), teòleg i historiador bizantí del segle XII.

# Bibliografia


Abbott, Jacob (1854). *The history of Pyrrhus*. Nova York: Harper & Brothers. [En línia a <https://archive.org/details/historyofpyrrhus1854abbo>]

Acerbi, Fabio (2007). *Euclide*: *Tutte le opere*. Milà: Bompiani. [Traducció italiana i notes de l'autor]

——— (2010). «Homeomeric lines in Greek mathematics». *Science in Context*, 23, p. 1-37.

Aeci, F. (1874). *Placita philosophorum*. [El text s'atribueix al Pseudo-Plutarc. Traducció anglesa de W. W. Goodwin. En línia, en grec i anglès, a http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus%3Atext%3A2008.01.0404>, i, en grec i francès, a <http://remacle.org/bloodwolf/historiens/Plutarque/opionionsphilo.htm>]

——— (2005). *Sobre la naturalesa*. [El text s'atribueix al Pseudo-Plutarc. En línia, en grec i francès, a <http://remacle.org/bloodwolf/historiens/Plutarque/opionionsphilo3.htm#117>]

Agustí de Nipona (2007). *Confessions*. Barcelona: Proa. [Traducció de M. Dolç. En línia, en castellà, a <http://www.iesdi.org/universidadvirtual/Biblioteca_Virtual/Confesiones%20de%20San%20Agustin.pdf>]

Allman, George Johnston (1899). *Greek geometry*. Dublín: Dublin University. [En línia a <https://archive.org/details/greekgeometryfro00allm>]

Álvarez, Carlos J. (2012). *El papel de un porismo euclidiano en la comprensión de las propiedades proyectivas*. Mèxic: UNAM. Departamento de Matemáticas. [En línia a <http://gcfcf.com.br/pt/files/%2012/06/Carlos-%Alvarez-NPSF-Vol.-1-N.-1.pdf>]

Antifont (2002). *Antiphont the sophist: the fragments*. Cambridge: Press Syndicate of the University of Cambridge. [En línia a <https://books.google.es/books?id=0WztQ-6DnIcC&printsec>]

Antípater de Sidó (1916). *Fragment*. Londres: W. Heinemann; Nova York: G. P. Putnam's Sons. [A Autors diversos (1916), volum iii, llibre ix. 58, p. 31]

Apol·loni de Perge (1923). *Les còniques*. París: Blanchard. [En grec i llatí, a Heiberg (1891-1893). Traducció francesa, amb introducció i notes, a Eecke (1923), i, castellana parcial, a Vera (1970), volum ii, p. 299-464. Adaptació i anàlisi, a Heath (1876)]

Apol·loni de Rodes (2002). *Argonàutiques* (*Ἀργοναυτικά*). Barcelona: La Magrana. [Traducció catalana de F. Cuartero]

Arat (1996). *Fenòmens*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de J. Almirall]

Aristarc de Samos (2007). *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna*. Cadis: Universidad de Cádiz. [Traducció castellana anotada de M. R. Massa]

Aristòtil (1863). *Météorologie d'Aristotle*. París: Librairie Philosophique de Ladrange. [Traducció francesa i notes de J. Barthélemy. En línia a <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/tablemeteorologie.htm>]

——— (1964). *Obras*. Madrid: Aguilar. [Traducció castellana, estudi preliminar i notes de F. P. de Samaranch. Reeditat per Aguilar, 1997. En línia, en francès, a <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/table.htm>, i, en anglès, a <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/searchresults?q=Aristotle>]

——— (1987). *Tratados de lógica*. Mèxic: Porrúa. [Vegeu Aristòtil (1964), p. 527-564; (1964), p. 351-414, i (1988), p. 300-441. En línia a <http://classics.mit.edu/Aristotle/posterior.html> i a <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/analyt2.htm>]

——— (1988*a*). *Organon*: *Tratados de lógica*. Madrid: Gredos. [Vegeu Aristòtil (1964), p. 217-561. En línia a <https://enblancoe.files.wordpress.com/2013/11/aristoteles-tratados-de-logica.pdf> i a <https://drive.google.com/file/d/0By4kcbi6MzzdUHhVQnUtcTNUdk0/edit?pli=1>. *Categories*, p. 29-87]

——— (1988*b*). *Categories*, a Aristòtil (1988*b*), p. 29-87.

——— (1995). *Física* (*Πϵρά τά φύσικα*). Barcelona: Librería Bergua. [Vegeu Aristòtil (1964), p. 565-703. Traducció anglesa de T. Taylor, en línia, a <http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=nyp.33433000341705;view=1up;seq=9>]

——— (2007). *Prior analytics*. Austràlia Sud: The University of Adelaide. [Traducció anglesa d'A. J. Jenkinon. Vegeu Aristòtil (1964), p. 527-564, i (1988), p. 85-300. En línia a <http://classics.mit.edu/Aristotle/prior.html> i a <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/tableanal1.htm>]

Arnaud, Bernadette (2011). «Le lent réveil d'un géant englouti». *Sciences et Avenir, hors-série*, núm. 165. [Text elaborat a partir d'un interviu a Isabelle Hairy]

Arnold, Thomas (1843). *History of Rome*: *From the end of the first to the end of the second Punic war.* Volum III. Londres: Fellowes. [En línia a <https://books.google.es/books?id=PnhSAAAAcAAJ&printsec=frontcover&hl=ca&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>]

Arquimedes (1997). *Mètode.* Barcelona: Bernat Metge. [En català, González Urbaneja i Vaqué (1997); en castellà, Vera (1970), volum II, p. 94-147, González Urbaneja i Vaqué (1993) i Ortiz-García (2009), p. 265-320; en anglès, Heath (1894), p. 99-150, o Heath (1912), en francès, Eecke (1960), volum I, p. 135-236, i, en italià, Frajese (1974), p. 555-610]

——— (2010). *Sobre l'esfera i el cilindre.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. [2 llibres. En català, Masià (2010), p. 47-160 i 162-201; en castellà, Vera (1970), volum II, p. 23-94, i Ortiz-García (2005*a*), p. 99-234; en anglès, Heath (1894), p. 1-90; en francès, Eecke (1960), volum I, p. 1-124, i, en italià, Frajese (1974), p. 49-212]

——— (2016). *Sobre les conoides i les esferoides.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. [En català, Masià (2016), p. 13-129; en castellà, Vera (1970), volum II, p. 94-147, i Ortiz-García (2005*a*), p. 189-247; en anglès, Heath (1894), p. 99-149; en francès, Eecke (1960), volum I, p. 137-236, i, en italià, Frajese (1974), p. 233-310]

Arrià, Flavi (1884). *The Anabasis of Alexander.* Londres: Hodder & Stoughton. [Traducció anglesa d'E. J. Chinnock i, castellana, d'A. Gonz (llibres I-VII), *Anábasis de Alejandro Magno.* En línia a <https://sites.google.com/site/adduartes/home/anabasis_arriano>]

——— (1893). *Indica.* Nova York: George Bell & Sons. [Traducció anglesa d'E. J. Chinnock i, castellana, d'A. Gonz (llibre VIII), *Índica.* En línia a <https://sites.google.com/site/adduartes/home/anabasis_arriano>]

Autors diversos (1916). *Antologia grega.* Londres: W. Heinemann; Nova York: G. P. Putnam's Sons. [En línia a <https://fr.wikipedia.org/wiki/Anthologie_grecque>]

——— (1970). *La Bíblia.* Andorra: Casal i Vall. [Versió dels textos originals i notes dels monjos de Montserrat. En línia a <http://www.lluisvives.com/servlet/SirveObras/jlv/12048621999195962976846/>]

Autors grecs i llatins (2013). *L'antiquité grecque et latine*: *Du moyen âge.* Londres: W. Heinemann; Nova York: G. P. Putnam's Sons. [En línia a <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/>]

Ballet, Pascale (2003). *La vie quotidienne à Alexandrie (331-30 av. J. C.).* París: Hachette. (Pluriel)

Bankston, John (2014). *Alexander the Great.* París: Mirchell Lane. [En línia a <https://books.google.es/books?id=2OCXBgAAQBAJ&pg=PA20&lpg=PA20&dq=Charles+Laplante+Alexander+and+Aristote#v>]

Batten, A. H. (1981). «Aristarchus of Samos». *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, 75, p. 29-35. [En línia a <http://adsabs.harvard.edu//full/seri/JRASC/0075//0000029.000.html>]

Bodnár, Istvan i Fortenbaugh, William W. (ed.) (2002). *Eudemus of Rhodes.* New Brunswick: Transactions Publishers. [En línia, parcialment, a <https://books.google.cat/books?id=HZTJadMo6GUC&printsec=frontcover&vq=Damas&hl#v=onepage&q=Damas&f=false>]

Bohec, Yann Le (1995). *Histoire militaire des guerres puniques.* Mònaco; París: Rocher. (L'Art de la Guerre)

Boyer, Carl Benjamin (1949). *The concepts of the Calculus*: *A critical and historical discussion of the derivative and the integral.* Nova York: Hafner. [Reeditat, amb el títol actual, *The history of the Calculus and its conceptual development: the concepts of the Calculus*. Nova York: Dover, 1959. En línia a <http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015021557627;view=1up;seq=9>]

——— (1968). *A history of mathematics.* Nova York: John Wiley & Sons. [Revisat per U. C. Merzbach el 1989. Traducció castellana de la primera edició de M. Martínez Pérez, *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza, 1986. En línia a <https://archive.org/stream/AHistoryOfMathematics/Boyer-AHistoryOfMathematics#page/n0/mode/2up>]

Braccesi, Lorenzo i Millino, Giovanni (2006). *La Sicilia greca.* Roma: Carocci.

Brack-Bernsen, Lis i Schmidt, Olaf (1990). «Bisectable Trapezia in Bablonian Mathematics». *Centaurus*, 33, p. 1-38.

Brandis, Christian August (ed.) (1836). *Scholia in Aristotelem.* Berlín: Hermann. [En línia a <https://archive.org/stream/aristotelisopera04arisrich#page/95/mode/1up>]

Bretschneider, Carl Anton (1870). *Die geometrie und die geometer vor Euklides.* Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner. [En línia a <https://archive.org/stream/bub_gb_sKdD05_b16UC#page/n177>]

Briant, Pierre (1974). *Alexandre le Grand.* París: Presses Universitaires de France. [Traducció castellana de C. Gutiérrez, *Alejandro Magno*. Madrid: Siglo XXI, 2012]

Brizzi, Giovanni (2007). *Scipione e Annibale, la guerra per salvare Roma.* Roma: Laterza.

Bulmer-Thomas, Ivor (1970). «Eudemus of Rhodes». A: Gillispie (ed.) (1970), volum ii. [En línia a <https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/eudemus-rhodes>]

Canfora, Luciano (1986). *La biblioteca scomparsa*. Palerm: Selerio. [En línia a <http://monoskop.org/images/6/63/Canfora Luciano La biblioteca scomparsa.pdf>. Traducció castellana de X. Llano, *La biblioteca desaparecida*. Gijón: Ediciones Trea, 2010, i francesa de J.-P. Manganaro i D. Dubroca, *La Véritable histoire de la Bibliothèque d'Alexandrie*. París: Desjonquères, 1988]

Casanova, Paul (1923). «L'incendie de la bibliothèque d'Alexandrie par les Arabes». *Comptes Rendus des Séances de l'Acadèmie des Inscriptions et Belles-Lettres*, 67 (2), p. 25-81.

Casiri, Michælis (1760). *Bibliotheca arabico-hispana Escurialensis*. Madrid: Antonius Perez de Soto. [En línia a <https://books.google.es/books?id=kjv5Qh-q1gYC&printsec=frontcover&hl#v>]

Casson, Lionel (2001). *Libraries in the ancient world*. New Haven (Connecticut): Yale University. [En línia, parcialment, a <https://boooks.google.es/books?hl=ca&id=ECBkVPQkNSsC&q=pinakes#v=snippet&q=pinakes&f=false>]

Censorí (1843). *Sur le jour natal*. París: C. L. F. Panckouckes. [En línia a <http://penelope.uchicago.edu/Thayer/F/Roman/Texts/Censorinus/text*.html>]

Chamoux, François (1981). *La civilisation hellénistique*. París: Arthand. [Traducció anglesa de M. Roussel, *Hellenistic Civilization*. Londres: Blackwell, 2002. En línia a <https://books.google.com.au/books?id=T1kr4YGTA2AC&printsec=frontcover&hl=ca&source#v>]

Chasles, Michel (1837). *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. París: Gauthier-Villars. Reed., París: Gabbay, 1989. [En línia a <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k65439706.texteImage>]

——— (1860). *Les trois livres de porismes d'Euclide, rétablis pour la première fois, d'après la notice et les lemmes de Pappus, et conformément au sentiment de R. Simon sur la forme des énoncés de ces propositions*. París: Mallet-Bachelier. [En línia a <https://ia601404.us.archive.org/24/items/lestroislivres00euclrich/lestroislivres00euclrich.pdf>]

Chesterton, Gilbert Keith (1925). *The everlasting man*. Londres: Hodder & Stoughton. [En línia a <https://books.google.es/books?id=OdTFtRT3ztIC&printsec=frontcover&hl#v>]

Ciceró, Marc Tul·li (1988-2003). *De la naturalesa dels déus*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. 2 v. [En línia a <http://remacle.org/bloodwolf/orateurs/index.htm>]

Clavius, Christopher (1574). *Euclidis Elementorum Libri XV*: *Accessit xvi de solidorum regularium comparatione*: *Omnes perspicuis demonstrationibus, accuratisque scholiis illustrati.* Roma: Vicentium Accolium. [En línia a <https://books.google.cat/books?id=uW0WVOlJyc8C>]

——— (1591). *Euclidis Elementorum Libri XV*. Colònia: Ciotti. [En línia a <https://bildsuche.digitale-sammlungen.de/index.html?c=viewer&bandnummer=bsb00015050]

Clayton, Peter i Price, Martin J. (1990). *The seven wonders of the ancient world*. Londres: Routledge. [En línia, parcialment, a <https://books.google.es/books?id=vGhbJzigPBwC&printsec=frontcover&hl=ca&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>]

Cloché, Paul (1959). *Dislocation d'un empire*: *Les premiers successeurs d'Alexandre le Grand*. París: Payot.

Collins, Nina L. (2000). *The Library in Alexandria and the Bible in Greek.* Leiden: Brill Academic. (Supplements to Vetus Testamentum, lxxxii)

Cònsul, Arnau (2009). «I Anníbal va travessar els Pirineus». *Sàpiens*, 82, p. 20-27.

Copleston, Frederick (1946-1974). *A history of philosophy.* Nova York: Dubledey. 12 v. [Traducció castellana de J. M. García de la Mora, *Historia de la filosofía*. Barcelona: Ariel, 1969-1985. 9 v.]

Cornford, Francis Macdonald (1939). *Plato and Parmenides*: *Parmenide's way of truth and Plato's Parmenides*. Londres: Roudledge & Kegan Paul. [Traducció castellana de F. Giménez, *Platón y Parménides*. Madrid: Visor, 1989. En línia, parcialment, a <https://books.google.es/books?id=PU7JAwAAQBAJ&printsec = frontcover&dq=Cornford+Parmenides+and+Plato&hl#v>]

Curnow, Trevor (2011). *The philosophers of the ancient world*: *An A-Z Guide*. Bloomsbury: Bloomsbury Publishing. [En línia a <https://books.google.es/books?id=6lnwAgAAQBAJ&pg=PA21&lpg=PA21&dq=Amphinomus+greek+philosopher&source#v=onepage&q>]

Dacier, André (1706). *La vie de Pythagore, ses symboles, ses vers dorez & la vie d'Hierocles*. [Traducció castellana amb una introducció de R. Urbano, *Pitágoras*: *Su vida, sus símbolos y los versos dorados con los comentarios de Hierocles*. Barcelona: Juan Torrents, 1906. En línia a <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k942517.r=dacier.langFR> i a <https://josefranciscoescribanomaenza.files.wordpress.com/2018/05/dacier-a-pitagoras.pdf>]

Davis, Harold Thayer (1957). *Alexandria, the golden city.* Evaston: Principia Press of Illinois. 2 v.

Demòstenes (1932). *Arengues*. Volum I. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [En línia, en grec i català, a <https://books.google.es/books?stenes+id=M2gPSbH_CsIC&printsec=frontcover&dq=Dem%C3%B2Bernat+Metge&hl=ca&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q=Dem%C3%B2stenes>, i, en grec i castellà, a <http://clasicosgriegosylatinos.blogspot.com.es/2011/03/demostenes-filipica-i.html>]

——— (1950). *Arengues*. Volum II. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [En línia, en grec i català, a <https://books.google.es/books?idN_JHfJP2pT8C&pg=PA75-IA1&lpg=PA75-IA1&dq=Demostenes+Arengues+II&source>, i, en grec i castellà, a <http://clasicosgriegosylatinos.blogspot.com.es/2011/03/demostenes-filipica-i.html>]

——— (1951). *Arengues*. Volum III. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [En línia, en grec i català, a <https://books.google.es/books?id=OEmju8Jk5EwC&pg=PP1&dq=Demostenes+Arengues+III>, i, en grec i castellà, a <http://clasicosgriegosylatinos.blogspot.com.es/2011/03/demostenes-filipica-i.html>]

——— (1932-1951). *Filípiques*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [En grec i català, a Demòstenes (1932), p. 35-54; Demòstenes (1950), p. 19-32, i 75-95; Demòstenes (1951), p. 11-36. Respectivament, segona, tercera i quarta filípica. En línia, en castellà, a <http://constitucionweb.blogspot.com.es/2010/02/primera-filipica.html>]

DIEC (2007). *Diccionari de la llengua catalana.*Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. [Editat, revisat i ampliat el 1995. En línia a <http://dlc.iec.cat/>]

Diels, Hermann (1879). *Doxographi Græci*. Berlín: G. Reimer. [En línia a <https://archive.org/details/doxographigraec00dielgoog/>]

Diodor de Sicília (1976). *Biblioteca històrica*. París: PUF. [Traducció francesa de P. Goukowsky. En línia, en francès, a <http://remacle.org/bloodwolf/historiens/diodore/index.htm>, i, en anglès, a <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus%3Atext%3A1999.01.0084&redirect=true>]

Diògenes Laerci (1925). *Lives of the eminent philosophers*. Londres: Loeb Classical Library. 2 v. [Traducció anglesa de R. Drew Hicks. En línia a <http://en.wikisource.org/wiki/Lives_of_the_Eminent_Philosophers>]

——— (1988). *Vides dels filòsofs*. Barcelona: Laia. 2 v. [Traducció catalana i edició a cura d'A. Piqué; castellanes, Diògenes Laerci (1988), (1999) i (2003); anglesa, Diògenes Laerci (1925). En línia a <http://www.e-torredebabel.com/Biblioteca/Diogenes-Laercio/Diogenes-Laercio-Vida-Filosofos.htm>. El text grec el podem trobar a Autors grecs i llatins (2013), Laerci]

——— (1999). *Vidas de los más ilustres filósofos griegos*. Barcelona: Folio.

Diògenes Laerci (2003). *Vidas de los filósofos más ilustres*. Mèxic: Porrúa. [Traducció castellana amb pròlegs de J. Ortiz i J. M. Riaño. En línia a <http://www.cervantesvirtual.com/servlet/SirveObras/12140528718935940987213/>]

Dionís d'Halicarnàs (1937). *The Roman antiquities*. Londres: Loeb Classical Library. [En línia, en anglès, a <http://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/Dionysius_of_Halicarnassus/home.html>, i, en francès, a <http://remacle.org/bloodwolf/historiens/denys/index.htm>]

Dodge, Theodor Ayrault (1995). *Hannibal: A history of the art of the war among carthaginians and romans down to the battle of Pydna*. Nova York: Da Capo. [En línia a <https://archive.org/details/hannibalhistoryo00dodguoft>]

Dorce, Carlos (2013). *Història de la matemàtica: Des de Mesopotàmia al Renaixement*. Barcelona: Universitat de Barcelona.

Dreyer, J. L. E. (1953). *A history of astronomy from Thales to Kepler*. Nova York: Dover. [En línia a <https://archive.org/details/AHistoryOfAstronomyFromThalesToKepler>]

Durham, Frank i Purrington, Robert D. (1983). *Frame of the universe: A history of physical cosmology*. Columbia: Columbia University. [Traducció castellana de J. J. Utrilla, *La trama del universo: Historia de la cosmología física*. Mèxic: Fondo de Cultura Económica, 1989]

Düring, Ingemar (ed.) (1932). «Porphyry». *Göteborgs Högskolas Arsskrift*, 38, 114.23-115.9.

Eecke, Paul ver (1923). *Les còniques*. Bruixes: Desclée de Brouwer. [Traducció francesa amb introducció i notes. Reed., París, Blanchard, 1963]

——— (1927). *Les esphériques de Théodose de Tripoli*. Bruixes: Desclée de Brouwer. [Traducció francesa amb introducció i notes. Reed., París, Blanchard, 1959]

——— (1948). *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*. Bruixes: Desclée de Brouwer. [Edició francesa amb traducció i notes. Reed., París, Blanchard, 1969]

——— (1958). *L'Optique et la Catoptrique*. Bruixes: Desclée de Brouwer. [Edició francesa amb traducció, introducció i notes. Reed., París, Blanchard, 1959]

——— (1960). *Les œuvres complètes d'Archimède*. Brussel·les: Vaillant-Carmanne. [Traducció i notes. Reed., París, Blanchard, 1980, 2 v.]

Eggers Lan, Conrado (1985). «Eudemo y el "catálogo de geómetras" de Proclo». *Emerita*, 53 (1), p. 127-157. [Reeditat a Eggers Lan (1995), p. 43-75]

EGGERS LAN, Conrado (1995). *El nacimiento de la matemática en Grecia.* Buenos Aires: Eudeba.

EMILSSON, Eyjólfur Kjalar (2005). «Porphyry». A: *Stanford encyclopedia of philosophy.* [Revisat el 2015. En línia a <https://plato.stanford.edu/entries/porphyry/]

EMPEREUR, Jean-Yves (2004). *Le phare d'Alexandrie, la merveille retrouvée.* París: Gallimard. (Découvertes)

ÈSQUINES (1999). *Discursos.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. 2 v.

ESTOBEU, Joan (1575). *Ioannis Stobæi Eclogarvm libri dvo*: *quorum prior Physicas, posterior Ethicas complectitur, nunc primum Græce editi/interprete Gulielmo Cantero. Vnà & G. Gemisti Plethonis De rebvs Peloponnes. Orationes dvæ, eodem Gulielmo Cantero interprete; Accessit & alter eiusdem Plethonis libellus Græcus De virtutibus*: *ex bibliotheca C. V. I. Sambvci.* [En línia a <http://en.wikipedia.org/wiki/Stobaeus>. Autor addicional: Gemisthos Plethon, Giorgios, 1389-1464. *De rebus Peloponnesiaco orationes duæ Canter, Willem, 1542-1575*, traducció de CH. Plantin, ~1520-1589, impr. Universitat de Barcelona]

ESTRABÓ (1867). *Géographie de Strabon.* París: Hachette. [Traducció francesa d'A. Tardieu. En línia, en grec i francès, a <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/strabon/livre21.htm>]

EUCLIDES (1676). *Les quinze livres des éléments géométriques d'Euclide.* Tom I. Rouen: Juan Lucas. [En línia a <https://books.google.es/books?id=Rm0-AAAAcAAJ&pg=RA15-PA9&lpg=RA15-PA9&dq=Livre+XiV+des+Elements>]

——— (1915). *Euclide's book on divisions figures, with a restoration based on Woepcke's text and on the 'Practica Geometricæ' of Leonardo Pisano.* Cambridge: Cambridge University. [Obra realitzada per R. C. Archibald. En línia a <https://archive.org/stream/euclidsbookondiv00archuoft#page/n6/mode/1up>]

——— (2000*a*). *Òptica.* [En castellà, a ORTIZ-GARCÍA (2000), p. 135-197, i, en francès, a EECKE (1959), p. 1-51]

——— (2000*b*). *Catòptrica.* [En castellà, a ORTIZ-GARCÍA (2000), p. 211-240, i, en francès, a EECKE (1959), p. 99-123]

——— (2000*c*). *Fenòmens.* [En castellà, a ORTIZ-GARCÍA (2000), p. 241-324]

——— (2003). *Euclide's Data* (*Δεδομένα*). Copenhaguen: Museum Tusculanum. [En francès, a PEYRARD (1814-1818), volum III, p. 301-480; en italià, a ACERBI (2007), p. 439-554 i 1859-1989, i, en llatí i anglès, a ITO (1980)]

——— (2018). *Online books by Euclid.* [En línia a <http://onlinebooks.library.upenn.edu/ webbin/ book/ lookupname?key=Euclid>. Conté moltes de les edicions de l'obra d'Euclides. Editat per J. M. Ockerbloom]

Euclides (2018-2019). *Elements*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. [Vegeu Pla (2018) i (2020)]

Eudem (1866). *Eudemi Rhodii Peripatetici Fragmenta quæ supersunt*. Berlín: S. Calvary [Aplegats per Leonardus Spengel. En línia a <https://books/google.be/books?id=73k-AAAAcAAJ&printsec=frontcover&hl=nl>]

Eurípides (1966). *Tragèdies.* Volum I. Barcelona: Fundació Bernat Metge.

Eusebi de Cesàrea (1818). *Chronicorum Canonvm, libri duo*. Mediolani: Regiis Typis. [Traducció de l'armeni al llatí d'A. Maius i J. Zohrabus. I, en anglès, a R. Bedrosian, *Chronicle*. New Jersey: Long Branch, 2008. En línia a <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=.mdp39015086699173;view=1up;seq=11>]

Eves, Howard (1953). *An introduction to the history of mathematics*. Filadèlfia: Saunders College. [Reeditat el 1964 i el 1983. L'edició de 1990 conté connexions culturals degudes a Jamie H. Eves]

Eyssonius Wichers, Rudolph Helprich (1829). *Theopompi Chii Fragmenta*. Leiden: Lugduni Batavorum. [En línia, en llatí, a <https://books.google.es/books?hl=ca&id=NllNAAAAcAAJ&q=249#v=onepage&q&f=false>]

Fermat, Pierre de (1891). *Œuvres de Fermat*. París: Gauthier-Villars. 4 v. (1891, 1894, 1897 i 1912). [Editats per P. Tannery i Ch. Henry. En línia a <http://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=umhistmath&idno=ABR8792>]

Ferraris, Maurizio (2002). *Historia de la hermenéutica*. Mèxic: Siglo XXI.

Figuier, Louis (1866). *Vie des savants illustres*. París: Hachette. 5 v. [En línia a <https://play.google.com/store/books/details/Louis_Guillaume_Figuier_Vies_des_savants_illustres?id=3T-1ENGM73AC>]

Forster, Edward Morgan (1922). *Alexandria: A history and a guide*. Cambridge: Provost and Scholars of King's College. [Traducció castellana de J. Beltrán, *Alejandría*. Barcelona: Seix Barral, 1984]

Fortenbaugh, William Wale i Schütrumpf, Eckart (2000). *Demetrius of Phalerum*. Londres: Transaction.

Frajese, Attilio (1974). *Opere di Archimede*. Torí: Unione Tipografico-Editrice Torinese.

Galè, Claudi (1936). *Galeni in Hippocratis epidemiarum librum* III *commentaria* III: *Corpus medicorum græcorum*. Leipzig: E. Wenkebach. [En línia a <http://cmg.bbaw.de/epubl/online/cmg_05_10_02_01.html>]

Garouphalias, Petros (1974). *Pyrrhus: King of Epirus*. Londres: Stacey International.

Gauss, Carl Friedrich (1801). *Disquisitiones arithmeticæ*. Leipzig: Gerhard Fleischer. [Traducció catalana, Pascual (1986)]

GEC (1965). *Gran enciclopèdia catalana*. Barcelona: Enciclopèdia Catalana. 25 v. [En línia a <http://www.enciclopedia.cat/>]

Gel·li, Aule (1930). *Nits àtiques*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. 3 v. (1930, 1934 i 1988). [En línia a <http://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/Gellius/10*.html>]

Gillispie, Charles Coulston (ed.) (1970). *Biographical dictionary of mathematicians*: *Reference biographies from the dictionary of scientific biography*. Nova York: Charles Scribner's Sons. 4 v. [Reeditat en moltíssimes ocasions. Edició consultada de 1991]

Gómez, Alberto G. (2013). *Aristarchos of Samos, the polymath*: *A collection of interrelated papers*. Bloomington: AuthotHouse.

Gómez, Pilar i Miralles, Carles (1997). *Literatura grega*. Barcelona: Universitat Oberta de Catalunya. [En línia, parcialment, a <https://books.google.es/books?id=KAJXGI5i4nEC&pg=PA70&lpg=PA70&dq=Quèril+grec&source>]

Gomperz, Theodor (1903-1905). *Griechische denker*: *Eine geschichte der antiken philosophie*. Leipzig: Verlag von Veit & Comp. 3 v. [En línia a <https://archive.org/details/griechischedenke01gomp> (volum i), <https://archive.org/details/griechischedenke02gomp> (volum ii) i <https://archive.org/details/griechischedenke03gomp> (volum iii). Traducció castellana de C. G. Körner (volum i), P. von Haselberg (volum ii) i J. R. Bumantel (volum iii), *Pensadores griegos*: *Historia de la filosofía de la antigüedad*. Buenos Aires: Guaranai, 1951; Barcelona: Herder, 2000]

González Urbaneja, Pedro M. i Vaqué, Josep (1993). *Arquímedes*: *el método relativo a los teoremas mecánicos*. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona. [Traducció castellana de J. Vaqué i edició crítica dels autors]

——— (1997). *Mètode d'Arquimedes sobre els teoremes mecànics dedicat a Eratòstenes*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de J. Vaqué i edició crítica dels autors]

Grafton, Anthony T. i Swerdlow, Noel M. (1986). «The horoscope of the foundation of Rome». *Classical Philology*, vol. 81 (2), p. 148-153.

Hairy, Isabelle (2006). «Le phar d'Alexandrie, concentré de géometrie». *La Recherche*, 394. [En línia a <https://www.academia.edu/4465794/]

Hardy, Godfrey Harold (1940). *A mathematician's apology*. Cambridge: Cambridge University. [Traducció castellana de J. Fernández, *Apología de un matemático*. Madrid: Nivola, 1999. Traducció catalana de M. Merín, *Apologia d'un matemàtic*, amb una introducció de J. Pla. Santa Coloma de Queralt: Obrador Edèndum, 2008. En línia a

<http://www.math.ualberta.ca/mss/misc/A%20Mathematician's%20Apology.pdf>]

HEATH, Thomas L. (1876). *Apollonius of Perga: Treatise on conic sections* [*edited in modern notations*]. Cambridge: Cambridge University. [En línia a <https://www.wilbourhall.org/millionbookspdfs/treatiseonconics00apolrich.pdf>]

——— (1894). *The works of Archimedes, edited in modern notation.* Cambridge: Cambridge University. [Reeditat com a *The works of Archimedes and the method of Archimedes*. Nova York: Dover, 2002. En línia a <https://archive.org/stream/treatiseonconics00apolrich#page/n0/mode/2up>]

——— (1912). *The method of Archimedes, recently discovered by Heiberg.* Cambridge: Cambridge University. En línia, parcialment, a <https://books.google.es/books?id=jxgRtVb8X40C&printsec=frontcover&dq#v=onepage&q&f=false>]

——— (1913). *Aristarchus of Samos, the ancient Copernichus: A history of greek astronomy to Aristarchus, together with Aristarchus's treatise on the size and distances of the Sun and Moon.* Oxford: Clarendon. En línia a <https://books.google.es/books?id=rZmHAAAAQBAJ&printsec=frontcover&dq=Aristarchus+of+Samos,+the+ancient+Copernichus&hl#v>]

——— (1921). *A history of greek mathematics.* Toronto: General Publishing Company. [Reeditat, en 2 v., com a *Greek mathematics.* Nova York: Dover, 1981. En línia a <https://archive.org/stream/cu31924008704219#page/n7/mode/2up> (volum I) i <https://archive.org/stream/ahistorygreekma00heatgoog#page/n7/mode/2up> (volum II)]

——— (1925). *The thirteen books of Euclid's Elements.* Toronto, Canadà: General Publishing Company. [Reeditat a Nova York, 1956, en 3 v. Edició de la traducció, sense notes, en un volum, *Euclid's Elements.* Ann Arbor, Michigan: Green Lion, 2002. Reeditat el 2003 i el 2007. En línia a <http://en.wikisource.org/wiki/The_Elements_of_Euclid>]

HEIBERG, Johan Ludvig (1853). *Archimedis opera omnia: cum commentariis Eutocii: E codice florentino recensuit by Archimedes; Eutocius, of Ascalon; Heiberg, J. L. (Johan Ludvig), 1854-1928.* Leipzig: Teubner. 3 v. (1853, 1880 i 1928). [En línia a <https://archive.org/details/archimedisoperao01arch> i a <https://archive.org/details/archimedisopera00heibgoog>]

Heiberg, Johan Ludvig (1891-1893). *Apollonii Pergæi quæ Græce exstant cum commentariis antiquis.* Leipzig: Teubner. 2 v. (1891 i 1893). [En línia a <http://www.wilbourhall.org/index.html#apollonius>]

Heiberg, Johan Ludvig i Menge, Heinrich (1883-1916). *Euclides opera omnia.* Leipzig: Teubner. 5 v. [En línia a <http://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/book/lookupname?key=Euclid>]

Hérault, Jean-Marc (2010). *La fin de l'empire d'Alexandre le Grand: vu au travers du personnage d'Eumène de Cardia.* París: Larousse.

Hernández, David (2011). *Vidas de Pitágoras.* Vilaür, Girona: Atlanta. [Inclou la traducció castellana de totes les biografies del filòsof: les de Porfiri, Jàmblic, Diògenes Laerci i Foci, patriarca de Constantinoble (858-867 i 878-886)]

Heròdot (2000). *Història.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de M. Balasch. En línia, en castellà, a <http://es.wikisource.org/wiki/Los nueve libros de la Historia>]

Hesíode (1914). *Homeric Hymns, Epic Cycle, Homerica.* Cambridge: Harvard University. [Traducció anglesa, amb el text grec, de H. G. Evelyn-White. Conté, entre d'altres, *Els treballs i els dies* (p. 2-65), *Himne* (p. 66-73) i *Teogonia* (p. 78-155). En línia a <http://archive.org/stream/hesiodhomerichym00hesiuoft#page/n9/mode/2up> i a <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus%3Atext%3A1999.01.0131%3Acard%3D1>. En francès, a traduït per M. A. Bignan, a <http://remacle.org/bloodwolf/poetes/falc/hesiode/intro.htm>, i, en castellà, a <http://www.imperivm.org/cont/textos/txt/hesiodo los-trabajos-y-los-dias.html> i a <http://es.wikisource.org/wiki/Hes%C3%ADodo>]

Hipsicles (1676). *Llibre* xiv *dels «Elements» d'Euclides.* A: Euclides (1676), p. 500-520.

Homer (1978). *La ilíada.* Barcelona: Alpha. [Traducció catalana amb el text grec de M. Peix, i castellana de L. Segalá. En línia a <http://es.wikisource.org/wiki/La_Il%C3%ADada>. En grec i anglès, de S. Butler (1898), a <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus:text:1999.01.0134>]

——— (1983). *L'Odissea.* Barcelona: La Magrana. [Traducció catalana de C. Riba, reimprès en 2 v. Barcelona, 1993. En línia, en castellà, a <http://es.wikisource.org/wiki/Odisea>, i, en anglès, a S. Butler (1919), a <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus:text:1999.01.0136>]

Hooper, John (2014). «Archaeologists' findings may prove Rome a century older than thought». *The Guardian* (13 d'abril). [En línia a <http://www.theguardian.com/world/2014/apr/13/archaelogists-find-rome-century-older-than-thought>]

HUMBOLDT, Alexander von (1850). «Cosmos». A: *Sketch of a physical description of the universe*. París: Hermann. 2 v. [En línia a <https://books.google.es/books?id=5oMOAAAAYAAJ&redir_esc=y>]

ITO, Shuntaro (1980). *The medieval Latin translation of the data of Euclid*. París: University of Tokyo. [Conté el text en llatí i en anglès]

JANER, Antoni (2009). «Mitologia i astronomia: les històries que amaguen les estrelles». *Sàpiens*, número 75, p. 1-15. [En línia a <https://blocs.xtec.cat/elceldelsmites/2013/05/15/les-histories-que-amaguen-les-estrelles-de-la-revista-sapiens/>]

JOAN (1970). «Evangeli de Joan». A: AUTORS DIVERSOS (1970), p. 336-431. Andorra: Casal i Vall. [En línia a <http://books.google.es/books?hl=ca&id=ZD_aE10Pb1IC&q=Mate+22+21#v=onepage&q=Mate%2022%2021&f=false>]

JUSTÍ (2003). *Compendi de les històries filípiques*. París: Digital Library of Latin Literature. [Traducció francesa de M.-P. Arnaud-Lindet, *Abrégé des Histoires Philippiques* de *Trogue Pompée*. En línia, en llatí i francès, a <http://www.forumromanum.org/literature/justin/index.html>]

KAYAS, Georges J. (1978). *Euclides*: *Les Éléments* = *Ευκλειδου: ˜Στοιϑεια*. París: CNRS.

KLINE, Morris (1972). *Mathematical hought from ancient to modern times*. Oxford: Oxford University. [Traducció castellana de C. Fernández i A. Garciadiego, sota la coordinació de J. Hernández, *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza, 1992. 3 v.]

KNORR, Wilbur Richard (1982). «Infinity and continuity: the interaction of mathematics and philosophy in antiquity». A: KRETZMANN (ed.) (1982), p. 112-145.

KOVALIOV, Sergei Ivanovitx (1948). *Historia de Roma* Leningrad: Universitat de Leningrad. [Traducció castellana de M. Ravonien en 2 v. Buenos Aires: Futuro, 1964. Edició revisada i ampliada per D. Plácido. Madrid: Akal, 2007. En línia a <https://books.google.?id=eYlb7XrVOKIC&printsec=frontcover&hl=ca&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>]

KRETZMANN, N. (ed.) (1982). *Infinity and continuity in ancient and medieval thought*. Londres: Cornell University.

LANE FOX, Robin (1973). *Alexander the Great*. Londres: Allen Lane. [Va rebre el James Tait Black Memorial Prize (1973), corresponent a la categoria «Biografies», i el Duff Cooper Prize (1973). Traducció castellana de M. Solana, *Alejandro Magno*: *Conquistador del mundo*. Barcelona: Acantilado, 2007]

Livi, Tit (2002). *Història de Roma.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Volums I i XI. En línia, en anglès, a <https://oll.libertyfund.org/titles/livy-the-history-of-rome-by-titus-livius-in-6-vols>, i, en francès, a <https:// fr.wikisource.org/wiki/Histoire_romaine_(Tite-Live)>]

MacLeod, Roy (2000). *The alibrary of Alexandria*: *Centre of learning in the ancient world*: *Revised edition.* Londres: I. B. Tauris & Co. [Reeditat el 2005. En línia, parcialment, a <https://books.google.es/books?id=k9ipHYpQ47IC&pg=PA1&hl=ca#v=onepage&q&f=false>]

Martínez Pérez, Patricia Verónica (2009). *Realidad bibliotecaria, Bibliotecarios famosos de la biblioteca de Alejandría.* San Miguel: El Salvador.

Masià, Ramon (2010). *Sobre l'esfera i el cilindre.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Text d'Arquimedes: introducció, revisió, traducció, notes i figures]

——— (2016). *Sobre les conoides i les esferoides*: *La mesura del cercle*: *La quadratura de la paràbola.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Text d'Arquimedes: introducció, revisió, traducció i notes]

Massa, Maria Rosa (2003). «Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de les matemàtiques». *Biaix*, 21, p. 4-9.

——— (2005). «L'ensenyament de la trigonometria: Aristarc de Samos». A: *Actes de la I Jornada sobre Història de la Ciència i l'Ensenyament «Antoni Quintana Marí»*, 21, p. 95-101.

——— (2009). «Una aproximació a l'obra d'Aristarc de Samos (ca. 310 aC - 230 aC)». A: *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, nova època, volum 2 (1), p. 157-167.

May, Elmer [*et al.*] (1984). *Ancient and medieval warfare*: *The history of the strategies, tactics, and leadership of classical warfare.* New Jersey: Avery.

McKenzie, Judith (2007). *The architecture of Alexandria and Egypt, c. 300 B.C. to A.D. 700.* New Haven, Connecticut: Yale University.

Michel, Paul-Henry i Louis, P. (1957). «Aristote et son école». A: Taton (1957), p. 287-306.

Mongitore, Antonino (1714). *Bibliotheca Sicula, Sive De Scriptoribus Siculis, Qui Tum Vetera.* Angeli Felicella. [En línia a <https://books.google.es/books?id=YQY_AAAAcAAJ&printsec> i a <https://books.google.it/books?id=gZlVAAAAcAAJ&printsec>]

Montaigne (1595). *Essais.* Bordeus: Éditions de Bordeaux. [En línia a <https://fr.wikisource.org/wiki/Essais/Livre_III>]

Montesquieu (1734). *Considérations sur les causes de la grandeur des Romains et de leur décadence.* París: Garnier. [En línia a <http://classiques.uqac.ca/classiques/montesquieu/considerations/Considera

tionsguioromains.pdf>. En castellà, traducció de M. de Huici, *Grandeza y decadencia de los romanos*. Madrid: Espasa Calpe, 1962]

Moreno Villa, Mariano (2003). *Filosofía*: *Temario*. Volum III: *Ética, política e historia de la ciencia*. Sevilla: MAD-Eduforma.

Morrow, Glenn R. (1970). *A commentary on the First Book of Euclid's «Elements»*. Princeton: Princeton University. [En línia, parcialment, a <https://books.google.es/books?id=JZEHj2fEmqAC&pg=PR28&lpg=PR28&dq=Proclus+Morrow&source>]

Motz, Lloyd i Weaver, Jefferson Hane (1995). *The story of astronomy*. Nova York: Spinger-Verlag. En línia, parcialment, a <https://books?id=tRTyBwAAQBAJ&pg=PA40&lpg=PA40&dq = Astronomy++Thales+hipparchus&source#v>]

Mugler, Charles (1971). *Archimedes*. Volum II: *Des spirales. De l'équilibre des figures planes. L'arénaire. La quadrature de la parabole*. París: Les Belles Lettres.

——— (1972). *Archimedes*. Volum IV: *Commentaires d'Eutocius. Fragments*. París: Les Belles Lettres.

Müller, Karl Wilhelm Ludwig (1841-1870). *Fragmenta historicorum Græcorum*. París: Ambrosio Firmin Didot. 5 v. [En línia a <https://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Wilhelm_Ludwig_M%C3%BCller>]

Nepos, Corneli (1923). *Vides d'homes il·lustres*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció castellana, *Vidas*, en 4 v. (1984, 1988 i 1989). En línia, en llatí i castellà, a <http://bdh-rd.bne.es/viewer.vm?id=0000091512&page=1>; en anglès, a <https://books.google.cat/books?id=zBApw8_3T8oC&hl=ca&pg=PP5#v=onepage&q&f=false>; en francès, a <https://fr.wikisource.org/wiki/Auteur:Cornèlius_Népos>, i, en llatí i francès, a <http://agoraclass.fltr.ucl.ac.be/concordances/cornelius_nepos_Vies/lecture/24.htm>]

Nerval, Gérard de (1854). *Les filles du feu*. París: Michele Lévy Frères. [En línia a <https://fr.wikisource.org/wiki/Les_Filles_du_feu>]

Orosi, Pau (1857). *Historiarum Adversum Paganos Libri VII*. Toruń: Ernesti Lambecii. [En línia, en llatí, a <http://www.thelatinlibrary.com/orosius/orosius4.shtml#1>, i, en anglès, a <https://archive.org/adversuspaganosh00oros#page/n6/mode/1up/search/Pyrr>]

Ortiz-García, Paloma (2000). *Aristóteles*: *Sobre las línias indivisibles. Euclides. Òptica. Fenómenos*. Madrid: Gredos. [Introducció, traducció i notes de P. Ortiz-García. En línia a <http://gredos.usal.es/jspui/handle/10366/83099>]

——— (2005*a*). *Arquímedes*: *Tratados I*. Madrid: Gredos. [Introducció, traducció i notes de P. Ortiz-García]

——— (2005*b*). «Eutocio: Comentarios». A: Ortiz-García (2005*a*), p. 357-434.

Ortiz-García, Paloma (2009). *Arquímedes: Tratados II*. Madrid: Gredos. [Introducció, traducció i notes de P. Ortiz-García]

Ovidi (1991). *Faustos*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. 2 v.

Padilla Segura, José Antonio (2000). *Universidad: Génesis y evolución*. San Luis de Potosí, Mèxic: Universidad Nacional del Litoral.

Pappos (1932). *Pappus d'Alexandrie: La Collection Mathématique*. París: Albert Blanchard. [Traducció i notes de Paul ver Eecke. Reeditat el 1982. En línia a <https://archive.org/stream/pappialexandrin00hultgoog> i a <https://archive.org/stream/pappialexandrin01hultgoog> i a <https://archive.org/stream/pappialexandrin02hultgoog>]

——— (1970). *Comentario al libro x de los Elementos de Euclides*. Madrid: Aguilar. [Edició anglesa de W. Thomson, amb notes i comentaris de G. Junge i W. Thomson, *The commentary of Pappus on book x of Euclide Elements*. Harvard: Harvard University, 1930. En línia a <http://www.wilbourhallorg/pdfs/pappus/PappusBookX.pdf>]

Parson, Edward Alexander (1952). *The Alexandrian library, glory of the Hellenic world; its rise, antiquities, and destructions*. Nova York: Elsevier.

Paruta, Filippo (1612). *Della Sicilia di Filippo Parvta descritta con medaglie*. Palerm: Appresso Gio. Battista Maringo. [En línia a <https://archive.org/details/dellasiciliadifi00paru>]

Pascal, Blaise (1670). *Pensées*. París: Guillaume Desprez. [2a ed., 1670. En línia a <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8606964f.image.r>]

Pascual, Griselda (1986). *Disquisicions aritmètiques de Gauss*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Societat Catalana de Matemàtiques. [Reproducció parcial a <http://books.google.es/books?id=gYxXFX0IPqIC&printsec=frontcover&hl=ca&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>]

Pericot, Luis i Ballester, Rafael (1963). *Historia de Roma*. Barcelona: Montaner y Simon.

Peyrard, François (1814-1818). *Les œuvres d'Euclide: traduites en latin et en français, d'après un manuscrit très-ancient qui était resté inconnue jusqu'a nos jours*. París: C. F. Patris. 3 v. [En línia a Euclides (2018)]

Pfeiffer, Rudolf (1968). *History of classical scholarship: From the beginnings to the end of the Hellenistic age*. Oxford: Clarendon Press.

Phillips, Heather (2010). «The Great Library of Alexandria?». *Library Philosophy and Practice* [San Diego: US Courts] (september), p. 1-22. [En línia a <https://digitalcommons.unl.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1427&context=libphilprac>]

Pla, Josep (1987). «La *Géométrie* com un exemple de *la méthode* de René Descarte». A: *Actes del Tercer Congrés de Llenguatges Naturals i*

*Formals*. Volum 3. Barcelona: Universitat de Barcelona. Facultat de Filologia, p. 821-864.

Pla, Josep (2009). *Liu Hui*: *Nueve capítulos de la matemática china*. Madrid: Nivola.

——— (2010*a*) *Els nombres*: *Una aproximació a la història de la matemàtica*. Barcelona: Universitat de Barcelona. [Apunts de classe]

——— (2010*b*). *Una aproximació* [*εἰσαγωγή*] *a la filosofia de la matemàtica grega des d'un punt de vista matemàtic*: *De Tales de Milet als Elements d'Euclides*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Societat Catalana de Filosofia.

——— (2012). *Euclides*: *La geometría*. Barcelona: RBA.

——— (2016*a*). *Història de la matemàtica*: *Egipte i Mesopotàmia*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

——— (2016*b*). *Història de la matemàtica*: *Grècia I. De Tales i Pitàgores a Plató i Aristòtil*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

——— (2018). *Història de la matemàtica*: *Grècia IIa*: *Els Elements d'Euclides: llibres i, ii, iii, iv, v i vi*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

——— (2020). *Història de la matemàtica*: *Grècia IIb*: *Els Elements d'Euclides: llibres vii, viii, ix, x, xi, xii i xiii*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

——— (En premsa *a*). *Història de la matemàtica*: *Grècia IIIb*: *Arquimedes, vida i obra* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. [Pendent de publicació]

——— (En premsa *b*). *Història de la matemàtica*: *Grècia IIIc*: *Apol·loni, vida i obra*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. [Pendent de publicació]

——— (En premsa *c*). *Història de la matemàtica*: *Grècia IIIc*: *Aportacions de Conó i Dositeu, de Nicomedes i Eratòstenes, i de Diosínodor i Diocles*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. [Pendent de publicació]

Pla, Josep i Viader, Pelegrí (1999). *René Descartes*: *La geometria*. Vic: Eumo. [Traducció catalana amb introducció i comentaris dels autors]

Plató (1871). *Obras completas de Platón*. Madrid: Medina y Navarro. [Traducció castellana de P. de Azcárate. En línia a <http://www.filosofia.org/cla/pla/azcarate.htm>]

——— (1931-2009). *Diàlegs*. Barcelona: Fundació Bernat Metge.

——— (1932). *Càrmides. Lisis. Protàgoras*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de M. Balasch que correspon al volum ii de Plató (1931). Traducció castellana de J. A. Mínguez, *Protágoras o los sofistas*, *Càrmides o de la sabiduría moral* i *Lisis o de la amistad*, a Plató (1966-1969), p. 155-198, 265-286 i 309-328]

Plató (1952). *Cràtil* i *Menexen*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de J. Olives Canals que correspon al volum IV de Plató (1931). Traducció castellana de J. A. Mínguez, *Crátilo o de la exactitud de las palabras* i *Menéxeno, o de la oración fúnebre*, a Plató (1966-1969), p. 497-554 i 413-432]

——— (1956). *Menó*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de J. Olives que correspon al volum V de Plató (1931). Traducció castellana de J. A. Mínguez, *Menón, o de la virtud*, a Plató (1966-1969), p. 435-462]

——— (1962). *Fedó*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de J. Olives que correspon al volum VII de Plató (1931). Traducció castellana de J. A. Mínguez, *Fedón, o del alma*, a Plató (1966-1969), p. 601-654]

——— (1966-1969). *Obras completas*. Madrid: Aguilar. [Plató (1871)]

——— (1992). *Parmènides*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de M. Balasch que correspon al volum XIII de Plató (1931). Traducció castellana de J. A. Mínguez, *Parménides o de las ideas*, a Plató (1966-1969), p. 945-992]

——— (1995*a*). *Diálogos*. Volum VI: *Parmenides, teaitetos, sofista, político*. Madrid: Ediciones Ibéricas. [Traducció i notes de J. B. Bergua]

——— (1995*b*). *Teetet*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de M. Balasch que correspon al volum XIV de Plató (1931). Traducció castellana de J. A. Mínguez, *Teeteto, o de la ciencia*, a Plató (1966-1969), p. 885-941]

——— (2000). *Timeu* i *Crítias*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de J. Vives que correspon al volum XVIII de Plató (1931). Traducció castellana de J. A. Mínguez, *Timeo, o de la ciencia*, a Plató (1966-1969), p. 1105-1140, i *Critias o Atlántida*, a Plató (1966-1969), p. 885-942]

——— (2009). *Cartes*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de R. Garrigasait. Traducció castellana de J. A. Mínguez, *Cartas*, a Plató (1966-1969), p. 653-844]

Playfair, John (1792). «On the origens and investigations on porisms». *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* [Edimburg: T. Cadell], volum III (1794), p. 154-204. [En línia a <https://books.google.es/books?id=nTEeAQAAMAAJ&pg=PA158&lpg>]

Plini (2002). *Naturalis Historiæ*. Madrid: Cátedra. [Traducció de J. Cantó i I. Gómez: *Historia natural*. En línia, en castellà, a <https://archive.org/stream/historianatural00segogoog#page/n368/mode/1up/search/Marcelo>; en llatí, a <http://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/Pliny_the_Elder/home.html>; en anglès, a <http://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/Pliny_the_Elder/home.

html>, i, en francès, a <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/plinean cien/index.htm]

PLUTARC (1926-1946). *Vides paral·leles.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. 15 v.

——— (1936). *Sobre la sort o la virtut d'Alexandre el Gran.* Londres: Loeb. [Traducció anglesa de J. Philips que correspon a PLUTARC (1987), volum I, p. 405-513. En línia, en francès, a <http://remacle.org/bloodwolf/historiens/Plutarque/fortunealex.htm>]

——— (1987). *Moralia.* Boston: Littel, Brown & Cia. [Sovint traduït per *Qüestions relacionades amb els hàbits i els costums.* Traducció corregida per W. W. Goodwin, amb introducció de R. W. Emerson, *Plutarch's Morals*, en 5 v. En línia a <http://www.attalus.org/info/moralia.html>]

POINCARÉ, Henri (2003). *La valeur de la science.* París: Flammarion. [En línia a <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2071994/f1.image>]

POLIBI (1837). *Histoire générale.* París: Pierre Gandouin. 6 v. [Traducció francesa de V. Thuillier. També en línia a <http://catalog.hathitrust.org/Record/008641000> i a <http://remacle.org/bloodwolf/historiens/polybe/index.htm>]

——— (1925). *Història.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. 12 v. (1925-1987). [En francès, a POLIBI (1837)]

PÓLYA, George (1977). *Mathematical methods in science.* Victoria: Leon Bowden. [En línia a <https://books.google.es/books/about/Mathematical_Methods_in_Science.html?id=j5RnI92SsLIC&redir_esc=y>]

POTTER, David S. (2009). *Rome in the ancient world: From Romulus to Justinian.* Londres: Thames & Hudson.

PROCLE DE LÍCIA (1873). *Primum Euclidis elementorum libri commentarii.* Leipzig: G. Teubner. [En línia, en grec, a <http://www.wilbourhall.org/millionbookspdfs/proclidiadochiin00procuoft.pdf>. Traducció anglesa amb notes a MORROW (2003); francesa, a EECKE (1948); italiana, a TIMPANARO (1978), i, castellana, parcialment, a VERA (1970), volum II, p. 1141-1184]

PTOLEMEU, Claudi (1988). *L'Almageste de Ptolémée.* París: Blanchard. 2 v. [Traducció francesa de M. Halma i notes de M. Delambre. En línia a <http://www.cpt.univ-mrs.fr/~rovelli/Almagest.pdf>. Traducció anglesa de G. J. Toomer, *Almagest.* Nova York: Springer, 1984]

QUINT CURCI (1794). *Història d'Alexandre el Gran.* Madrid: Ramón Ruiz. [Traducció castellana de M. Ibáñez de Segovia, *De la vida y acciones de Alejandro el Grande.* En línia a <http://fama2.us.es/fde/ocr/2008/deLaVidaYAccionesDeAlexandroElGrande.pdf>]

Renault, Mary (1975). *The nature of Alexander*. Nova York: Veb Deuttsher Verlag der Wissenchaften Pantheon Books. [Traducció castellana d'H. González Trejo, *Alejandro Magno*. Barcelona: Edhasa, 2002]

Render, Angela (2006). *Forged by lightning*: *A novel of Hannibal and Scipio*. Raleigh, Carolina del Nord: Lulu.

Reventós, Agustí (2014). *Temes diversos de fonaments de les matemàtiques*. Bellaterra: Publicacions de la UAB.

Rouse Ball, W. W. (1892). *Recreations and problems mathematics*. Cambridge: Cambridge University. [En línia a <http://www.gutenberg.org/files/26839/26839-pdf.pdf?session_id=c7823d18d702cf21ca21b83e8ade0a5e5f9be903>. Edició francesa de la quarta edició de J. Fitz-Patrick, *Récréations et problèmes mathématiques*. París: Jacques Gabay, 1907. I una edició més actualitzada amb la col·laboració de H. S. M. Coxeter, *Recreations mathematics and essays*. Nova York: Dover, 1987]

Roy, Jean-René (1982). *L'astronomie et son histoire*. París: Masson.

Sarton, George (1952*a*). *A history of science*. Volum I: *Ancient science through the golden age of Greece*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University. [Reeditat per Nova York: Dover, 1993. Traducció castellana de J. Babini, *Historia de la ciencia*: *La ciencia antigua durante la edad de oro griega*. Buenos Aires: EUDEBA, 1965. 2 v. En línia, parcialment, a <http://books.google.es/books/about/Ancient_Science_Through_the_Golden_Age_o.html?id=VcoGIKlHuZcC&redir_esc=y>]

——— (1952*b*). *A history of science*. Volum II: *Hellenistic science and culture in the last three centuries B.C.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University. [Reeditat per Nova York: Dover, 1993. Traducció castellana de J. Babini, *Ciencia y cultura helenísticas en los tres últimos siglos antes de Cristo*. Buenos Aires: EUDEBA, 1965. 2 v.]

Schiaparelli, Giovanni Virgini (1873). *I precursori di Copernico nell'antichità*: *Ricerche storiche*. Milà: Hoepli. [En línia a <https://archive.org/details/precursori>]

Schreiber, Peter (1987). *Euklid*. Leipzig: G. Teubner.

——— (1875). *Le sfere omocentriche di Eudossso, di Callippo e di Aristotle*. Milà: Hoepli. [En línia a <https://archive.org/details/LeSfereOmocentricheDiEudossoDiCall>]

Scullard, Howard Hayes (1970). *Scipio Africanus soldier and politician*. Londres: Thames and Hudson.

Sili Itàlic (1979). *La guerre punique*. París: Belles Lettres. [Traducció de P. Minconi i G. Delvallet]

Simon, G. (1988). *Le regard, l'être et l'apparence dans l'Optique de l'Antiquité*. París: Le Seuil.

SIMPLICI (1806). *The works of Aristotle*: *Physics*. Londres: Thomas Taylor. [També a ARISTÒTIL (1995) de T. Taylor. En línia a <http://capricorn.bc.edu/siepm/DOCUMENTS/SIMPLICIUS/Simplicius_In%20Phys%20I-IV.pdf>]

——— (1894). *Comentaris al «De Cælo» d'Aristòtil*. Berlín: Georgh Reimneri. [En línia a <https://archive.org/stream/inaristotelisdec07simp#page/n4/mode/1up>]

SIMSON, Robert (1722). «Pappi Alexandrini Propositiones duæ Generales, Quibus Plura ex Euclidis Porismatis Complexus Est, Restitutæ a Viro Doctissimo Rob. Simson, Math. Prof. Glasc. Vid. Pappi Præfationem ad Lib. 7. Coll. Math. Apollonii de Sectione Rationis Libris Duobus a Clariss. Hallejo Praemissam Pag. VIII. & XXXIV». *Philosophical Transactions*, 32, p. 330-340. [En línia a <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstl.1722.0065>]

——— (1756). *Euclidis Elementorum*. Londres: Glasgow University. [Traducció anglesa de R. Simson, *Elements of Euclid*: *The first six books*. Filadèlfia: De Silver, 1838. En línia a <https://archive.org/stream/elementseuclid00euclgoog#page/n6/mode/2up>]

——— (1776). «Porismatibus Tractatus; quo Doctrinam Parismatum satis Explicatam, ei in Posteram ab Oblivione Tutam Fore Sperat». A: *Opera Quædam Reliqua*. Editat per J. Clow. Glasgow: Lucem, p. 323-594. [En línia a <http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/1237074>. Traducció anglesa d'I. Tweddle, *Simson on porisms*: *An annotated translation of Robert Simsons posthumous treatise on porisms and other items on this subject*. Londres: Springer, 2000. En línia, parcialment, a <https://books.google.es/books?id=05zSBwAAQBAJ&pg>]

SMITH, William (ed.) (1844*a*). *A dictionary of Greek and Roman biography and mythology*. Harvard: Taylor and Walton. 3 v. [En línia a <http://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=moa;idno=ACL3129.000*i*.001>, amb *i*=1, 2 i 3, i <http://www.perseus.tufts.hopper/text?doc=Perseus:text:1999.04.0104:entry=phintias-bio-2&toc=Perseus%3Atext%3A1999.04.0104%3Aalphabetic+letter%3DA>]

——— (1844*b*). «Apollonius Rhodius». A: SMITH (ed.) (1844*a*), § 23, p. 240-241. [En línia a <http://quod.lib.umich.edu/m/moa/acl3129.0001.001/255?page=root;size=100;view=image>]

STHAL, W. H. (1970). «Aristarchus of Samos». A: GILLISPIE (ed.) (1970), volum I.

SUÏDA (1834). *Suda or Souda*. Oxoni: Typographeo Academico. [Ressenyat per T. Gaisford. En línia a <https://en.wikipedia.org/wiki/Suda>]

TÀCIT (1930-1970). *Annals*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. 6 v.

TANNERY, Paul (1883). «Aristarque de Samos». *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bourdeaux*, 2a sèrie, 5, p. 237-290. [TANNERY (1912-1950), volum I, p. 371-396]

——— (1888). «La Grande Anné d'Aristarque de Samos». *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bourdeaux*, 3a sèrie, 4, p. 79-96 [TANNERY (1912-1950), volum I]

——— (1912-1950). *Mémoires scientifiques*. París: Gauthier Villars. [Editats per J. L. Heiberg i H. G. Zeuthen. Reeditats per París, Jacques Gabbay, 1995-1996]

TATON, René (1957). *La science antique et médiévale (des origins à 1450)*. París: Presses Universitaires de France. [Traducció castellana de M. Sacristán, *La historia de la ciencia*. Barcelona: Destino, 1961. Reeditat amb un volum afegit, el XVIII, Barcelona, Orbis, 1988]

TEODOSI (1927). *Les esfèriques*. [Traducció francesa a EECKE (1927)]

THOMAS, Ivor (1939). *Greek mathematical works*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University. [Reeditat l'any 1980 en 2 v. En línia a <https://archive.org/stream/selectionsillust0*i*bulmuoft#page/280/mode/2up>, amb *i* igual a 1 o 2, per als volums I i II]

TILLIER, Mathieu (2015). «Qui a (vraiment) détruit la bibliothèque d'Alexandrie?». *Historia*, vol. 24, p. 30-33.

TIMPANARO, Maria (1978). *Commento al I libro degli Elementi di Euclide*. Pisa: Giardini. [Traducció italiana amb introducció i notes]

TINSLEY, Barbara Sher (2006). *Reconstructing western civilization*: *Irreverant essays on antiquity*. Selingsgrove, PA: Susquehanna University. [Reeditat per Carbury, Nova Jersey: Associated University Presses, 2010. En línia, parcialment, a <https://books.google.es/books?id=xwrC2CC_QBsC&printsec>]

TUCÍDIDES (1953-1981). *La Guerra del Peloponès*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana dels cinc primers volums de J. Berenguer i dels tres darrers de M. Balasch. En línia, en castellà, a <http://interclassica.um.es/index.php/interclassica/divulgacion/mapas/datos/personajes/autores_griegos/tucidides>; en francès, a <http://remacle.org/bloodwolf/historiens/thucydide/table.htm>, i, en grec i anglès, a <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus:text:1999.01.0199>]

VALERI MÀXIM, Publi (1471). *Dicta et facta memorabilia*. Magúncia: P. Schöffer. [Introducció, traducció i notes de S. López, M. L. Harto i J. Villalba, *Dichos y hechos memorables*. Madrid: Gredos, 2003. 2 v. En línia, en castellà, a <https://books.google.com.ar/books?id=gdj18toPwXMC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>]

VARRÓ, Marc Terenci (1938). *Llengua llatina*. Londres: W. Heinemann. [Text en llatí i en anglès, traducció de R. G. Kent, *Varron*: *On the*

*Latin language*. Londres: William Heinemann. En línia a <https://archive.org/details/onlatinlanguage01varruoft/page/n7/mode/2up> i a <http://www.attalus.org/info/varro.html>]

Vera, Francisco (1970). *Científicos griegos*. Madrid: Aguilar. 2 v.

Viète, François (1591). *Isagoge in artem analyticem*. París: Iametivm Mettayer. [Traducció francesa de J. L. Sieur de Vaulézard, *La nouvelle algèbre de M. Viète*. París: Fayard, 1986, p. 7-66. En línia a <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k108865t>]

Villalba, Pere (1996). *Roma a través dels historiadors clàssics*. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Virgili (1956). *Geòrgiques*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Editat per M. Dolç]

——— (1972). *Eneida*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. 4 v. (1972, 1975, 1977 i 1978). [Editat per M. Dolç]

Vitrac, Jean (1990). *Euclide*: *Les Éléments. Livres i à iv*. París: PUF.

——— (1994). *Euclide*: *Les Éléments. Livres v à ix*. París: PUF.

——— (1998). *Euclide*: *Les Éléments. Livre x*. París: PUF.

Vitruvi Pol·lió, Marc (1995). *De architectura*: *Libri decem*. Madrid: Alianza. [Text en llatí i castellà. Traducció castellana de J. L. Oliver, *Los diez libros de arquitectura*: *Vitruvio*. En línia, en castellà, a <http://www.anarkasis.net/Vitruvio/index.htm#1911>; en anglès, a <http://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/Vitruvius/7*.html>, i, en francès, a <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/Vitruve/index.htm>]

Voltaire (1764). *Dictionnaire philosophique*. París: Garnier. [Edició de 1878. En línia a <https://fr.wikisource.org/wiki/Dictionnaire_philosophique/Garnier_(1878)>]

Waerden, Bartel Leendert van der (1954). *Science awakening*. Groningen: P. Noordhoff. [Reeditat per Oxford: Oxford University Press, 1961. Per Nova York: John Wiley, 1963. I per Dordrecht, Països Baixos: Kluwer Academic Publishers, 1975 i 1988]

Wassermann, Jakob (1928). *Der fall Maurizius*. Berlín: S. Fischer. [En línia a <https://freeditorial.com/es/books/der-fall-maurizius>. Traducció castellana de C. de Miguel i J. Seca, *El caso Maurizius*. Barcelona: Acantilado, 2018]

Wehrli, Fritz (1969). *Die Schule des Aristoteles, texte und kommentare (1944-1960)*. Volum VIII: *Eudemus von Rodos*. Sttugart: Schwabe.

Yavetz, Ido (1998). «On the homocentric spheres of Eudoxus». *Archive for Histoty of Exact Sciences*, volum 82 (3), p. 221-278.

Zeuthen, Hieronimus Georg (1886). *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. Copenhaguen: Fischer-Benzon.

# Índex de mots i formes


alemanys
- alemannen, 361

cèltics
- alp, 57

grecs
- ἀήρ, 43
- αἰγοκερώς, 141
- αἰθήρ, 43
- αἰτήματα, 212
- αἴτια, 217
- ἀκροαματικός, 178
- ἀμβλυγωνιόυ κώνον τομή, 6
- ἄμβρωνεσε, 379
- ἄν ἔτι μίαν μάχην νικήσωμεν, ἀπολώλαμεν, 62
- ανάκλασις, 295
- ἀνακλάω, 295
- ἀναλογία, 300
- ἀνηγμένη, 243
- αξιώματα, 212
- ἀπαγωγή, 77, 92, 225
- ἄπειρον, 294
- ἀπὸ
  - δεδομένου, 108
  - το σύστημα του κόσμου, 137
  - τῶν ἐπιπέδων ἐνόπτρων καὶ κυρτῶν καὶ κοίλων αἱ ὄψεις ἐν ἴσαις γωνίαις ἀνακλῶνται, 295
- ἀποδεικτικος, 207
- ἀπόδειξις, 96, 97, 102, 225
- ἄργιος, 172
- αργοναύται, 357
- Ἀρισταρχος τὸ ἥλιον ἴστησι μετὰ των ακλανων, την δε γην κινειεθαι περι τον ηλιακον και κατα τας ταυτεε εγκλιασεις ακιαζεσθαι,137
- ἀρχαι, 84
- βακχεία, 371
- βιβλιοθήκη, 34
- βουκολικά, 413
- βουκόλος, 413
- Γάγγην περᾶσαι ποταμόν, 181
- γεωργικός, 413
- γῆ, 43
- γνησιώτατος, 12
- γυμνοσοφισται, 369
- δαπανωμένου, 19
- δεδομένα τῷ μεγέθει, 241
- δεδόσθαι, 109
- δεικτικῆς, 228
- δέχεσθαι δορίκτητον, 180
- διὰ τί, 217
- διάδοχοι, 31
- διάγραμμα, 226
- διαίρεσις, 82
- διαιρητικός, 225
- διάστημα, 236
- δίδυμοι, 141
- διορισμός, 81, 96, 97, 216
- διορίζω, 81

δις, 75
διχοτομία, 165
δυνάμεις, 231
δύναμις, 207
εἴδεῖ δεδόσθαι, 108, 241
ειδογράφος, 39
ἐκαλεῖτο δὲ ἡ γεωμετρία πρὸς Πυθαγόρου ἱστορία, 13
εκατόνχειρες, 362
ἔκθεσις, 96, 97
ἐκλογαί, 413
ελλεῖπον γίνεται, 284
ἐλλειψη, 6
ἔλλειψις, 284
ἑλληνοδίκαι, 172
ἐν
  τῖς ούσιώδεσι λόγος, 207
  τῷ δευτερῳ βιβλίῳ, 260
ἐνάλλάξ, 243
ἔνστασις, 92, 225
ἐπίγονοι, 32
ἐπίπεδος, 235
ἐπιφάνεια, 235
ἐποπτικὰς, 178
ἐπώνυμος, 51
ἔσχατος, 224
ἑταίρα, 187
ἑταῖροι, 11
εξεδρα, 37
ἐξηκοστά, 303
  μ′ μ', 303
  μξ′, 303
ευ, 75
εὐκλεής, 75
εὐπόριστος, 213
ἐφ′ ἕν διεστὼς τοῦτο, 236
ἐφαρμόζω, 93
ζητητικόν, 211
ζυγός, 141
ζῴδιυ, 140, 301, 309
ἡ
  διὰ τοῦ ἀδύνατου δεῖξις,102
  εἰς τὸ ἀδύνατον
    ἄγουσα ἀπόδειξις, 102
    ἀπαγωγή, 102
  κερατοιειδής γωνία, 233
θεαἴτητος, 170
θέσει δεδόσθαι, 241
θεσμος, 409
θεωρητικόν, 211
ἱστορία, 13, 384
ἰχθύες, 141
καὶ
  ἐπτὶ ὑπόκειται ἡ σελήνη ὑπὸ "ιέ μέρος ζῳδιον" ὑποτείνουσα, ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΑΔ γωνία βέβηκεν ἐπὶ "ιε′ μέρος ζῳδιου", 317
  πάντα πρὸς πάντα, 281
  πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας λλήλαις εἶναι, 94
  τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽λλήλα ἴσα λλήλοις ἐστιν, 94
  τῶν ᾽ντικειμένων, 285
καρκίνος, 141
κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεραι ἡ ὑπὸ ΒΜΑ γωνία ἀρθὴπρὸς τὸν μέγιστον κύκλον, 322
κατασκευή, 96, 97, 225
κατηγμένη, 242
κερατοειδής, 296
κεφάλαιον, 164
κίμβροι, 379
κλεος, 75
κλίσις, 232, 236
κοναὶ
  ἀρχαί, 212
  ἔννοιαι, 213
κόσμος, 43
κριός, 141
κύκλος, 79
κωνική

εστίας, 129
κατευθυντήρια γραμμή, 129
λαγίδαι, 73
λέγειν, 207
λέγω, ὥτι ἴεν ἐστὶν ἡ Γ, Φ γωνία τῇ, 296
λέων, 141
λῆμμα, 84, 91, 220, 225
λογισμός, 257
λόγοισιν Ἑρμόδωρος ἐμπορεύεται, 384
λόγος δεδόσθαι, 241
μαυσολ μειον, 34
μαυσωλείο, 34
μαυσωλείον, 34
μεγέθει δεδόσθαι, 108
μεγεθῶν μεγάλων, 289
μετά, 38
μετάθεσις, 226
μεταφυσική, 38
μῆκος, 230
μήλα των Εσπερίδων, 389
μικτός, 233, 234
μουσείον, 34
μυρμιδών, 376
νέμω, 25
νομάδες, 58
νομαδος, 58
νομάς, 58
νομοί, 25
νόμος, 25
ὀ
ἀστρονομούμενος τόπος, 308
βιβλιοθήκη τῆς Ἀλεξανδρείας, 37
γεωμέτρης, 210
μαθηματικός, 391
μουσείον τῆς Ἀλεξανδρείας, 43
στοιχειωτής, 73, 210
φάρος τῆς Ἀλεξανρείας, 36
φιλόσοφος, 391
ὁμιομερής, 216
ὀξυγωνιόυ κώνον τομή, 6
ὀρθογωνίου κώνον τομή, 6
ὁριζων, 308
ὅροι, 212, 213, 289
ούτε τὸ ἱστορικὸν τὸ ιατρικὸν, 13
παθός, 233
πάντα, 224
παρά, 243, 248, 257
θέσει, 243
παραβαλλόμενον, 285
παραβολή, 6, 216
παραθέσει, 264
παραλλάττειν, 328
παραλλάττοι, 328
παράλλελος, 243
παρθένος, 141
πεποιωμένον ποσόν, 235
περάς, 224
περιπατητικός, 11
πίνακες, 38
πίπτω, 92
πίστις, 225
ποιεῖ τὸ ἐπίταγμα, 279
ποιός τις, 235
πολλῷ
ἐλάσσων, 318
μείζων, 318
πόρισμα, 92, 120, 225, 258
ποριστικόν, 211
πορίσω, 92
πρόβληματικον, 211
προμήκη, 230
ἀριθμόν ἐκαλέσαμεν, 230
πρότασις, 96, 97
πρῶτος δὲ τὰ πέντε καλόυμενα στερεὰ, 170
πτολεμαῖοι, 73
πτῶσις, 92, 225
πῦρ, 43
πύρρεις νίκη, 62
σάρισα, 26
σατράπης, 32

σε εκείνον θα ὲχει το πιο κοφτερό σπαθί, 62
σεραπῖον, 41
σήνωες, 50
σκάφη, 139
σκορπιός, 141
στοιχεῖα, 219, 220
στοιχειόω, 207, 219
στοιχειώδη, 219
στοιχείωσις, 219, 206
στρογγυλότης, 87
συμπέρασμα, 96, 97
σύμπτομα, 220
συναύγεα, 288
σχῆμα, 14, 262
σχήματα, 224
σχολάρχης, 358
τὰ
  κα᾽ αύτὰ συμβεβηκότα, 81
  λήμματα τὰ ζητούμενα, 240
  πλατή, 111
ταῦρος, 141
τέλεια μέρη, 164
τελείωσις, 219
τεταγμένα, 157
τετράγωνόν τε καὶ ισόπλευρον προσείπομεν, 230
τετράγωνος, 230, 284
τεύτονεσ, 379
τιτάν, 383
τιτανιδες, 383
τὸ
  ὁπιόν, 81
  ὁποῖόν, 217
  σχῆμα, 249
τοξότης, 141
τόποι
  ἐπιπεδοι, 128
  στέρεοι, 128
τρίγονος ἀριθμός, 263
τριὼβολος, 209
τρόποι, 219, 257
τῷ λόγω, 253
τῶν
  ἀπλανῶν, 302
  πρός τι, 234
  στερεῶν τόπων, 285
ὑδροχόος, 141
ὓδωρ, 43
υκλι, 75
ὑμὴν, ὦ ᾽μέναιε, 193
ὑπερβάλλει, 284
ὑπερβολή, 6, 284
ὑποθέσεις, 212
ὑποκειμένης ἐν τῷ μεγέθει, 235, 236
ὕπτιον, 262
ὑπτίου ἤ παρυπτίου, 262
φάρος, 34
φυσικά, 38
χαος, 43
χρώματα, 224
χωλός, 402
ψευδάρια, 218
ψευδής, 218

llatins
  a fortiori, 157, 318
  ager publicus, 68
  alter Romulus, 51, 52
  alternando, *vegeu* operacions de la proporció a l'índex de termes
  canæ, 58
  capra ibex, 178
  celeres, 365
  censor, 395
  centimani, 362
  Clades Alliensis, 50
  componendo, *vegeu* operacions de la proporció a l'índex de termes
  conditor alter urbis, 52
  Consuales Ludi, 192
  Consualia, *vegeu* Consuales Ludi
  consul, 373, 395

convertendo, *vegeu* operacions de la proporció a l'índex de termes
curia, 411
de facto, 364
dictatŏr, 373
dinamis, 231
etrusci, 48
ex æquali, *vegeu* operacions de la proporció a l'índex de termes
fastos, 396
hetæra, 187
imperium, 51, 395
in extenso, 14, 85, 168, 272, 300
insociabile regnum, 46
invertendo, *vegeu* operacions de la proporció a l'índex de termes
lex curiata, 51
Liber Res Publica Romana, 50
limes, 361
lupa, 185, 187
mausoleum, 34
myrmidŏnes, 376
ne ego si iterum eodem modo uicero, sine ullo milite Epirum reuertar, 62
non auro sed ferro liberanda est patria, 51
paralogismus, 257
parva Hannibalis, 58
pater patriæ, 52
patria Hannibalis, 58
permutando, *vegeu* operacions de la proporció a l'índex de termes
pœnicus, *vegeu* pūnicus
pomœrium, 46
postmœrium, 189
publicani, 68
pūnicus, 53
quirites, 45
rara avis, 296
ruma, 188
ruminalis ficus, 185
separando, *vegeu* operacions de la proporció a l'índex de termes
serapeum, 41
sic deinde, quicumque alius transiliet mœnia mea, 189
sine ira i studio, 407
talassie, 193
taurinis, 57
trans Tiberis, 47
tusci, 48
væ victis, 51
vincere scis, Hannibal; victoria uti nescis, 391

perses
xšaϑrapā, 32

sabins
albus, 57

semites
barak, 355

# Índex de noms propis: antropònims, topònims i altres noms

## Antropònims i altres noms


Abel, 183, 351, 363
Abū-l-Wafā', al-Buzğānīī Muhàmmad, 113, 351
Adam, 183, 351, 363
Adelard de Bath, 351, 352
Aeci, 137, 307, 351
Aenobarb, Gneu Domici, 67, 351
Agamèmnon, 352, 367, 369, 373, 387, 397
Agàtocles, 60, 202, 352, 358, 379, 393
Agustí, 39, 183, 352
Agustí d'Hipona, *vegeu* Agustí
Àiax, 180, 352
al-Ba'labakkī, Qusā ibn Lqā, 146, 352
al-Ma'mūm, 352
al-Mansur, Abu-Jāfar Abd-Al·lāh, 353
al-Rašīd, Abu-Jàfar Hārūn, 353
al-Sijzí, Abu Said Ahmed, 113, 353
al-Tusī, Nāṣir al-din, 146, 353
Alceu, 40, 354
Alcínous, 354, 358, 394
Alcman, 40, 354
Alcmene, 354, 384
Alexandre d'Afrodísia, 102, 229, 354
Alexandre I de Macedònia, 172, 354
Alexandre el Gran, XIV, 24, 26, 28-34, 37, 61, 66, 67, 172, 176-181, 347, 354, 359, 360, 363, 366, 369, 374, 378, 379, 383, 388, 395, 396, 398, 400, 402-404, 407
    capacitat de lideratge, 29
    constructor, 30
    depredador, 30
    estàtua de Tessalònica, 30
    gestos simbòlics, 31
    guerra de les represàlies, 28
    herència política, 31
    i Aristòtil, 28, 347
    Imperi d', XIV, 28, 30, 66
    mort d', 33
    mosaic d', 29, 30
    restitució de l'honor grec, 28
    tomba d'Anfípolis, 30, 178, 179

Allman, George Johnston, 7, 8, 355

Ambròs, 39, 183, 355

Ambròs de Milà, *vegeu* Ambròs

Amílcar, 24, 55, 198, 199, 355, 360, 365, 382

Amílcar Barca, *vegeu* Amílcar

Amuli, 184, 186, 187, 355, 373, 396, 402

an-Naīrīzī, Abū-l-'Abbās al-Faḍi ibn Ḥātim, 87, 355

Anaxarc, 177, 355

Andòcides, 355, 387

Andranòdor, *vegeu* Andranòdoros

Andranòdoros, 65, 66, 355

Andrònic de Rodes, 38, 356

Anfinomi, 217, 356

Anníbal, 24, 55-58, 62, 65, 198-200, 349, 356, 360, 374, 375, 378, 391, 402
- animant les tropes, 57
- estàtua, 55
- mort d', 59
- naixement d'
  - llegenda del, 58
- pare de l'estratègia, 59

Antemi, 356, 387

Antifont, 19, 20, 168, 356, 362, 387

Antifont de Rhamnous, *vegeu* Antifont

Antígon el Borni, 32, 356

Antíoc de Macedònia, 199, 356, 405

Antíoc III de Síria, 23, 67, 356

Antípater de Macedònia, 32, 357

Antípater de Sidó, 35, 357

Apol·lodor Epicur, 357, 415

Apol·loni, XI, XIII, XIV, 2, 4-6, 21, 44, 74, 85, 106, 129, 130, 137, 155, 170, 208, 216, 219, 231, 234-236, 240, 258, 261, 273-275, 283-287, 300, 357, 377, 383
- lloc de les tres o les quatre rectes, 285-287

Apol·loni d'Alexandria, 39, 357

Apol·loni de Perge, *vegeu* Apol·loni

Apol·loni de Rodes, 38, 43, 357

Apol·loni Eidògraf, *vegeu* Apol·loni d'Alexandria

Appi Claudi Caudex, 63, 358

Aquil·les, 179, 180, 352, 358

Arcàgat, 60, 358, 393

Arcesilau de Pítana, 358, 361

Arete, 358, 394

Aristarc, XI, XIII, XIV, 44, 131, 135-140, 142-147, 149, 152, 290, 299-301, 304, 305, 307-309, 318, 320, 325, 326, 328, 340, 358, 383, 405
- any gran, 139
- astronomia geometritzada, 140
- hipòtesi d', 138
  - qualitativa, 140
  - quantitativa, 140
- i l'heliocentrisme, 136, 137, 301, 308
- mirall
  - còncau, 307
  - hemisfèric, *vegeu* còncau
  - pla, 307
- paral·laxi del Sol, 138, 142
- pare de l'heliocentrisme, XIII
- relació trigonomètrica, 142, 143

Aristarc de Samos, *vegeu* Aristarc

Aristarc de Samotràcia, 39, 358, 387

Aristeu, XII, XIII, XIV, 1-9, 16, 44, 74, 129, 130, 155, 158,

159, 162, 208, 210, 240, 273, 283-286, 358
i les còniques, XII, 2, 5, 44
principi directriu focus, *vegeu* teorema d'
sòlids platònics, 5
teorema d', 7, 8, 155, 158, 159, 162, 272
teoremes de llocs, 4
Aristeu de Crotonoa, *vegeu* Aristeu
Aristeu el Vell, *vegeu* Aristeu
Arístil·los d'Alexandria, 43, 136, 359
Aristocles, *vegeu* Plató
Aristòcrit, 176, 359
Aristòfanes, 357, 359
Aristòfanes de Bizanci, 39, 71, 358, 359, 387
Aristòtil, 11-14, 19, 28, 38, 76, 79, 80, 89, 90, 101, 102, 139, 163, 168, 177, 178, 207, 212, 213, 217, 228, 229, 300, 307, 354, 356, 359, 363, 374, 376, 378, 382, 396, 409
existència en, 79
instruint Alexandre, 28
l'estagirita, 13, 16
Liceu d', 11, 37, 369, 409
resultats geomètrics d', 77
sistema sinteticodeductiu d', 79
successió d', 163
Aristoxen, 13, 71, 359
Aristoxen de Tàrent, *vegeu* Aristoxen
Arouet, François Marie, *vegeu* Voltaire
Arquimedes, XI-XIV, 2, 5, 6, 20, 21, 44, 59, 64, 69, 71, 73, 74, 85, 90, 93, 99, 129, 137, 138, 140, 142, 150, 171, 198, 201, 206, 210, 219, 232, 283, 301, 338, 359, 372, 373, 377, 378, 381-384, 390, 392, 412, 413
i el moviment, 93
i el problema dels bous, 390
i els ginys mecànics, 59
mort d', 44, 59, 171, 198, 200, 201
obra d', XIV
vida d', XIV
Arquites, 20, 21, 137, 170, 300, 359
Arquites de Tàrent, *vegeu* Arquites
Arrià, Flavi, 30, 359
Arrideu, 176, 360, 378
Asdrúbal, 24, 58, 360, 395
mort d', 58
Asdrúbal Barca, *vegeu* Asdrúbal
at-Tussí, Nàssir-ad-Din, 360
Àtal, 177, 360, 367
Àtal III de Pèrgam, 67, 360
Atena, 360
Atena Nikē, *vegeu* Atena
Atenió, 68, 360, 411
Atis, 196, 197, 360, 390, 391, 397
Aurelià, Luci Domici, 42, 361, 415
Ausoni, Dècim Magne, 361
Autòlic de Pítana, 146, 358, 361

Baal, 361
Babini, José, 361
Barrias, Louis-Ernest, 68, 350, 361
Benét, Stephen Vincent, 191, 361
Berenice, 75, 208, 362
Bona Dea, 362
Boulogne, Jean de, *vegeu* Giambologna
Brenne, 50, 51, 362
Bretschneider, Carl Anton, 6, 362
Briant, Pierre, 30, 31
Briàreu, 362, 368, 381, 383

Brisó d'Heraclea Pòntica, 19, 168, 362
Brooks, Richard, 362

Caín, 183, 351, 363
Calanos, 177, 363
Cal·límac de Cirene, 38, 71, 357, 363
Cal·líp, 139, 363
Camil, Marc Furi, 51, 363
Caracal·la, 41, 363
Caranos de Macedònia, 25, 26, 172, 363, 398
Cares de Lindos, 35, 364
Càrmides, 364
Carpos d'Antioquia, 236, 364
Carroll, Lewis, 83, 364, 372
Cassandre, 32, 357, 364, 370
Cassiodor, 365, 379
Cassiodor, Magne Aureli, *vegeu* Cassiodor
Catriste, 225, 365
Catul, Gai Lutaci, 64, 365
Catul, Gai Valeri, 71, 365
Cauchy, Augustin Louis, 365
Cavalieri, Bonaventura, 365
Caveing, Maurice, 106
Celer, 191, 365
Censorí, 139, 365
Chandragupta Maurya, 366
Chaplin, Saul, 191, 366
Chasles, Michel, 3, 120-122, 127, 261, 270, 366
Ciceró, Marc Tul·li, 62, 71, 366, 380, 412, 415
Cinees, 202, 203, 366
Cíntia, 367
Claudià, Claudi, 367
Clavius, Christopher, 234, 367
Cleantes, 138, 301, 367
Cleònides, 106, 367
Cleòpatra, 37
Cleòpatra de Macedònia, 177, 360, 367
Clitemnestra, 352, 367, 369, 373, 387, 397
Commandino, Federico, 146, 276, 283, 367
Conó, XI, XIII, XIV, 2, 21, 44, 367
Conó de Samos, *vegeu* Conó
Constantí I el Gran, 47, 368
Copèrnic, Nicolau, 135, 136, 145, 307, 308, 380, 389
Corinna de Tebes, 40, 368
Coriolis, Gaspard-Gustave, 138, 368
    acceleració de, 138, 368
Cotos, 368, 381, 383
Cras Dives I, Marc Licini, 71, 368
Cràtil, 224, 368, 400
Creont, 177, 368
Cressus, 368
Creüsa, 177, 368
Crisòtemis, 367, 369
Críties, 369
Cronos, 369
Curci Ruf, Quint, 30, 369
Curtis, Tony, 68, 369, 375

Damas, 12, 369
Damó d'Atenes, 71, 369
Dandamis, 177, 369
Darios III Condomà, 30, 33, 369
deesses
    babilòniques
        Ištar, 387, 396
    etrusques
        Menrva, 49, 393
        Uni, 49, 412
    gregues
        Àrtemis, 34, 182, 360, 367, 370
        Atena, 378, 393, 394, 413
        Atena Nikē, *vegeu* Atena
        Europa, 377
        Gaia, *vegeu* Gea
        Gea, 362, 369, 380, 383, 385, 391

Hera, 358, 384, 388, 412
Hestia, 413
Leto, 357, 390
Òmfale, 197
Thalassa, 362
romanes
Bona Dea, 377, 391
Ceres, 366, 377
Diana, 367, 370
Faune, *vegeu* Bona Dea
Juno, 49, 388, 392, 412
Minerva, 49, 388, 393, 394
Vesta, 184, 186, 413
Victòria, 178, 413
sabines
Vacuna, 412, 413
Demetri de Falèron, 37, 38, 369, 370
Demòcrit, 16, 355, 370
Demòcrit d'Abdera, *vegeu* Demòcrit
Demòstenes, 26, 27, 171-173, 175, 176, 366, 370, 375, 387
Descartes, René, 4, 89, 101, 370
déus
àrabs
Al·là, 29
egipcis
Serapis, 41, 405
etruscos
Tínia, 49, 410
fenicis
Baal, 55
grecs
Apol·lo, 357, 360
Ares, 358, 392
Dionís, 179, 180, 371
Hèlios, 35
Hermes, 364, 376, 377
Himeneu, 385
Ladó, 364, 389
Pan, 377, 398
Posidó, 195, 395, 402
Urà, 362, 369, 383, 385, 412
Zeus, 34, 175, 357, 358, 368, 369, 378, 381, 384, 388, 391, 404, 415
estàtua de, 182
romans
Consus, 195
Júpiter, 49, 199, 388
Mart, 45, 184, 185, 358, 392, 403
Mercuri, 377, 384
Neptú, 192, 194, 395, 402
Neptú Eqüestre, *vegeu* Neptú
sabins
Quirí, 403
deu de la llança, 45
Deutsch, Adolph, 191, 366, 370
Dinarc, 370, 387
Dinòmenes de Siracusa, 65, 370
Dió Cassi, 371
Dió de Siracusa, 79, 371
Diocles, XI, XIII, XIV, 44, 371
cissoide, XI, 371
miralls ustoris, 371
Diodor de Sicília, 27, 30, 60, 352, 371, 398, 405
Diodor Sícul, *vegeu* Diodor de Sicília
Diofant, 44, 371
Diofant d'Alexandria, *vegeu* Diofant
Diògenes Laerci, 17, 137, 299, 357, 371, 415
Dionís d'Halicarnàs, 45, 46, 183, 189-191, 193, 202, 355, 372
Dionís de Tràcia, 43, 372
Dionís el Vell, 371, 372
Dionísodor, XI, XIII, XIV, 44, 372
resolució de la cúbica, XI

Dodgson, Charles Lutwidge, *vegeu* Carroll, Lewis
Domici Ahenobarb, Cneu, 372
Donen, Stanley, 191, 372
Dositeu, XI, XIII, XIV, 44, 372
Douglas, Kirk, 68, 375
Drus Major, 373, 391
Duili, Gai Nepos, 54, 373

Edèsia, 43, 373
Eecke, Paul ver, 262, 283, 373
Eetes, 373, 392
Egeó, *vegeu* Briàreu
Egest, 186, 373
Electra, 367, 373
Eliot, Thomas Stearns, 373
Empèdocles d'Agrigent, 373
Enees, 374, 391
Enòpides, 19, 168, 374
Enòpides de Quios, *vegeu* Enòpides
Eos, 383
Epícides, 59, 65, 66, 374, 386
Erasístrat, 43, 374
Eratòstenes, XI-XIV, 21, 39, 44, 85, 137, 206, 240, 300, 301, 357, 374, 390
  mapa d', 39
Eratòstenes de Cirene, *vegeu* Eratòstenes
Erigi, 177, 374
Escipió, Publi Corneli, 57, 58, 374, 375
Escipió Africà, Publi Corneli, 55, 58, 59, 349, 356, 374
  bust, 57
Escipió Emilià, Publi Corneli, 55, 59, 67, 375
Escipió, Gneu Corneli, 58, 374
Escopines, 301, 375
Escopines de Siracusa, *vegeu* Escopines
Espàrtac, 68, 375
  estàtua de jurament d', 68
Èsquil, 182, 375
Èsquines d'Atenes, 205, 375, 387
Estobeu, Joan, 72, 105, 209, 300, 376
Estrabó, 37, 197, 198, 376, 400
Estrató de Làmpsac, 37, 137, 376
Euclides, XI-XIV, 2-6, 9, 15, 18, 21, 36, 40, 44, 71-77, 80, 82-92, 94-96, 98, 99, 102, 103, 105, 106, 108-110, 112, 115, 117, 119-121, 124-133, 136, 137, 140, 143, 146, 158, 168, 169, 205-210, 212, 217, 218, 220, 226, 232, 234, 236, 239, 240, 242, 243, 248, 249, 251, 257, 258, 261, 270-273, 283-287, 292, 294-298, 308, 316, 318, 328, 351-353, 362, 367, 376, 383, 394, 400, 402, 404, 410, 414, 415
  aportacions conceptuals, 71, 75, 205
    anàlisi, 77
    definició, 79
    epistemològiques, 75
    específiques, 105
    existència en, 79
    lògiques, 75
    metodològiques, 105
    model aristotèlic, 78
    ontològiques, 75
    síntesi, 77
  biografia d', 72
  bonhomia personal d', 72
  estàtua d', 73
  gravat d', 106
  i el diàmetre del cercle, 18
  i el lloc de les tres o les quatre rectes, 284-287
  i l'anècdota del deixeble, 209
  i la llum, 288

i la no acceptació de l'infinit en acte, 90
i la síntesi de la geometria, 76
i la visió, 288
i les còniques, 2
i les fal·làcies, 89
obres d', 105-133
elementals de geometria, 107
menors, 240
pintura d', 74
porisma, 120
com a síntesi, 121
Euclides de Mègara, 73, 74, 376
Eudem, 1, 2, 11-20, 44, 155, 163-165, 168, 169, 210, 231, 235, 369, 376
aristotèlic, 16
el peripatètic, 11
figura d', 14
i el concepte d'angle, 14
obres d', 13
peripatètic, 16
primer historiador de la ciència, 2, 11
retrat d', 12, 347
Eudem de Rodes, *vegeu* Eudem
Eudor, 376, 384
Èudox, 17, 19, 20, 74, 99, 127, 136, 142, 147, 149, 168, 206, 363, 376, 404
hipopede d', 147
i la teoria de la proporció, 127
Èudox de Cnidos, *vegeu* Èudox
Euler, Leonhard, 376
Eunus, 68, 377
Eurípides, 40, 182, 377
Eustaci de Tessalònica, 377
Eutoci, 5, 20, 155, 272, 377, 384
Eva, 183, 351, 363, 377
Evandre, 187, 364, 377, 384
família Barca
Amílcar, *vegeu* Amílcar
Anníbal, *vegeu* Anníbal
Asdrúbal, *vegeu* Asdrúbal
faraons egipcis
Kheops, 34, 37
Ptolemeu IV Filopàtor, 405
faraones egípcies
Cleòpatra, 37
Faune, 377
Faustí, 187, 378
Fàustul, 185, 187, 188, 190, 378, 390
Fermat, Pierre de, 121, 378
Fetti, Domenico, 378
Fídies, 34, 136, 142, 378
Fil, Luci Furi, 378
Filinna de Larissa, 360, 378
Filip II, 24-27, 31, 33, 172-176, 198, 347, 354, 356, 359, 360, 367, 370, 374, 375, 378, 379, 395-398, 400, 405
assassinat de, 27
estratègia militar de, 27
guerra de les represàlies, 27
innovació estratègica de, 26
medalló de, 27
model d'exèrcit de, 27
regne de, 25
restauració de l'honor grec, 27
tomba de, 28
Filip II de Macedònia, *vegeu* Filip II
Filip V de Macedònia, 66, 67, 378, 379, 399
Filó, 379
Filòcrates, 379
Filolau, 137, 145, 300, 308
i l'heliocentrisme, 308
filòsofes gregues
Edèsia, *vegeu* Edèsia

filòsofs
 anglesos
  Adelard de Bath, 351
 grecs
  Estobeu, Joan, 105, 209
  Marí, 234
Filotes, 176, 363, 379, 383
Fínties d'Agrigent, 60, 379
Flamini, Tit Quinti, 378, 379
Fontana, Niccolò, 379, 408
Fortunat, Atili, 379
Forster, Edward M., 72

Gai Mari, 61, 379
Gal, Gai Sulpici, 380
Galè, 37, 43, 380
Galenus, Claudius, *vegeu* Galè
Galilei, Galileo, *vegeu* Galileu
Galileu, 365, 380
Gant, Just de, 350, 380
Gauss, Carl Friedrich, 380
Gavin, John, 68, 375
Gel·li, Aule, 12, 163, 380
Geló I, 62, 381, 385
Geló II, 59, 64, 381, 388
Gemine, 155, 216, 217, 364, 381
Gemine de Rodes, *vegeu* Gemine
Geminus, *vegeu* Gemine
Gerió, 381, 399
Giambologna, 46, 381
Gies, 383
Ginouvès, René, 381
Girard, Albert, 121, 381
Gel·li, Gneu, 195, 381
Goodrich, Frances, 361, 362, 382
Gregory, David, 382
Grenfell, Bernard Payne, 40, 382
Guillem de Moerbeke, 382

Hackett, Albert Maurice, 361, 362, 382
Hairy, Isabelle, 36
Hankel, Hermann, 80, 382
Hannó el Gran, 64, 382
Hannó el Vell, 358, 383
Hardy, Godfrey Harold, V, 383
Hàrpal, 177, 383
Heath, Sir Thomas, 4, 9, 10, 146, 318, 383
Hecatonquirs, 383
Heemskerk, Maerten, 35, 383
Heiberg, Johan Ludvig, 168, 213
Hèlios, 383, 405, 408
Hèracles, 25, 173, 179, 180, 197, 354, 381, 384, 399
Heràclides, 384
Heràclit, 137, 299, 307, 384
Heràclit d'Efes, *vegeu* Heràclit
Hèrcules, *vegeu* Hèracles
Hermes, 355, 384
Hermòdor, 210, 384
Hermòtim, 84, 384
Heró, 44, 113, 382, 384
Heró d'Alexandria, *vegeu* Heró
Heròdot, 26, 172, 384, 398, 409
Heròdot d'Halicarnàs, *vegeu* Heròdot
Heròfil de Calcedònia, 43, 384
Hersília, 194, 384
Hesíode, 383, 385, 404
Hesiqui de Milet, 385
Hestia, 385
Hicetes II, 59, 60, 379, 385
Hieró II, 54, 59, 62-65, 358, 365, 381, 385, 388, 390, 397
 medalló d', 63
 tomba d', 64
Hieró II de Siracusa, *vegeu* Hieró II
Hièrocles, 62, 385
Hilbert, David, 88, 385
Hiparc, 44, 136, 145, 302, 359, 385
Hipàtia, 41, 44, 385, 408
 mort d', 41
Hipèrides, 385, 387
Hiperió, 383, 385, 405

Hipòcrates de Cos, 71, 385
  jurament hipocràtic, 385
Hipòcrates de Quios, 19, 20, 76, 84, 99, 168, 210, 226, 386
  duplicació del cub, 99
  principi de generalització, 99
Hipòcrates de Siracusa, 59, 65, 66, 386
Hipsicles, 5, 7, 44, 106, 155, 158, 159, 386
Homer, 25, 39, 179, 180, 357, 358, 374, 386, 394
Horaci, 379, 386
Horaci Flac, Quint, *vegeu* Horaci
Hultsch, Friedrich Otto, 261, 262, 283, 386
Humboldt, Alexander von, 135, 386
Hunt, Arthur Surridge, 40, 382, 386

Íber, 386, 411
Íbic, 40, 386
ibn Matar, al-Hajjaj ibn Yūssuf, 351, 352
Ifigènia, 367, 387
Ília, *vegeu* Rea Sílvia
Iseu, 387
Isidor de Milet, 106, 387
Isidor de Sevilla, 387
Isòcrates d'Atenes, 385, 387, 394, 409

Jacobi, Carl Gustav Jakob, 387
Jàmblic, 13, 364, 387
Jàson, 177, 357, 368, 388, 392
Jerònim de Càrdia, 201, 388
Jerònim de Siracusa, 59, 64, 65, 370, 381, 388, 411
Jesucrist, *vegeu* Jesús
Jesús, 388, 407, 410
Joan, 388
Jordanus de Nemore, *vegeu* Jordanus Nemorarius
Jordanus Nemorarius, 113, 388
Juli Cèsar, 37, 41, 53, 59, 371, 388, 406, 412
Justí, 30, 352, 389, 398

Keel, Howard, 191, 389
Kingsley, Dorothy, 361, 362, 389
Kopernik, Mikołaj, *vegeu* Copèrnic
Kubrik, Stanley, 68, 375

Labrunie, Gérard de, *vegeu* Nerval, Gérard de
Lagrange, Joseph-Louis, 389
Laplante, Charles, 28, 347, 389
  gravat de, 28
La Porte du Theil, François-Jean-Gabriel, 146, 389
Larència, 185, 187, 188, 190, 378, 390
Laughton, Charles, 68, 375, 390
Legendre, Adrien-Marie, 390
  i la teoria de nombres, 390
  i les integrals el·líptiques, 390
Leodomant, 225, 390
Leonardo da Pisa, 113, 390
Leptines, 63, 390
Lessing, Gotthold Ephraims, 390
Licurg, 387, 390
Lidos, 197, 360, 390
Lísies, 387, 390
Lisímac, 32
Liu Hui, 391
Livi, Tit, 40, 45, 51, 64, 183, 185, 188, 191, 192, 200, 365, 381, 384, 391, 408
Llatí, 377, 391
Lleó, 76, 81, 84, 210, 391
Lleó de Tessalònica, 391
Lloba, *vegeu* Larència
Llucià, 391
Llucià de Samòsata, *vegeu* Llucià

Maharbal, 200, 391
Manes, 196, 391
Manfred I de Sicília, 391
Marc Antoni, 37, 392
Marcel, Marc Claudi, 59, 66, 200, 201, 392
Marci, Anc, 49
Marí, 234, 392
Marinus, *vegeu* Marí
Masinissa I, 59, 392
Massa, Maria Rosa, 146
matemàtics
- alemanys
  - Hilbert, David, *vegeu* Hilbert, David
- anglesos
  - Newton, Isaac, *vegeu* Newton, Isaac
  - Todhunter, Isaac, *vegeu* Todhunter, Isaac
  - Wallis, John, *vegeu* Wallis, John
- àrabs
  - Abū-l-Wafā', Muhàmmad al-Buzǧānī, *vegeu* Abū-l-Wafā', Muhàmmad al-Buzǧānī
  - al-Sijzí, Abu Said Ahmed, *vegeu* al-Sijzí, Abu Said Ahmed
  - Qurra, Thàbit ibn, *vegeu* Qurra, Thàbit ibn
- belgues
  - Girard, Albert, *vegeu* Girard, Albert
  - Saint-Vincent, Grégoire de, *vegeu* Saint-Vincent, Grégoire de
  - Sarton, George, *vegeu* Sarton, George
- escocesos
  - Playfair, John, *vegeu* Playfair, John
  - Simson, Robert, *vegeu* Simson, Robert
- francesos
  - Chasles, Michel, *vegeu* Chasles, Michel
  - Fermat, Pierre de, *vegeu* Fermat, Pierre de
  - Pascal, Blaise, *vegeu* Pascal, Blaise
  - Poincaré, Jules, *vegeu* Poincaré, Jules
  - Viète, François, *vegeu* Viète, François
- grecs
  - Apol·loni de Perge, *vegeu* Apol·loni
  - Aristarc de Samos, *vegeu* Aristarc
  - Arquimedes de Siracusa, *vegeu* Arquimedes
  - Carpos d'Antioquia, *vegeu* Carpos d'Antioquia
  - Catriste, *vegeu* Catriste
  - Conó, *vegeu* Conó
  - Demòcrit d'Abdera, *vegeu* Demòcrit
  - Diocles, *vegeu* Diocles
  - Dionísodor, *vegeu* Dionísodor
  - Dositeu, *vegeu* Dositeu
  - Eratòstenes, *vegeu* Eratòstenes
  - Euclides, *vegeu* Euclides
  - Eudem de Rodes, *vegeu* Eudem
  - Eutoci d'Ascaló, *vegeu* Eutoci
  - Heró d'Alexandria, *vegeu* Heró
  - Hiparc de Nicea, *vegeu* Hiparc
  - Leodomant, *vegeu* Leodomant

Nicomedes, *vegeu* Nicomedes
Pitàgores de Samos, *vegeu* Pitàgores
Teó d'Alexandria, *vegeu* Teó d'Alexandria
italians
Jordanus Nemorarius, *vegeu* Jordanus Nemorarius
Leonardo da Pisa, 390
matemàtiques gregues
Hipàtia, 385
Mausol, 34, 182, 392, 394
Medea, 357, 368, 373, 392
Megetius, 156, 392
Menandre d'Atenes, 40, 392
Menecme, 20, 21, 72, 84, 206, 220, 393
Menecme de Cízic, *vegeu* Menecme
Menelau, 44, 393
Menó, 13, 60, 223, 224, 393
peripatètic, 393
Mercer, John Herndon «Johnny», 191, 366, 393
Mersenne, Marin, 393
Minos, IX, 377, 394
Moisès, 183, 394
Montaigne, 1, 394
Montaigne, Michel Eyquem de, *vegeu* Montaigne
Montesquieu, 61, 203, 394, 405
Mubarak, Hosni, 42, 394

Nàucrates, 75, 208, 394
Nausica, 197, 358, 394
Nàusicles, 173, 395
Nearc, 177, 395
Nepos, Corneli, 199, 395
Neró, Gai Claudi, 58, 351, 395
Nerval, Gérard de, 41, 395
Newton, Isaac, 395
Nicolau V, 395
Nicòmac de Gerasa, 396
Nicomedes, XI, XII, XIV, 44, 396
concoide, XI
nimfes gregues
Carmenta, 364, 377
Maia, 391
Plèiades, 391
Ninus, 396, 405
Noè, 396, 399, 411
Numa Pompili, 49, 396
Numitor, 184, 186-188, 194, 355, 373, 396, 402, 406

Ocrísia, 396, 411
Octavi August, Gai Juli Cèsar, 53, 373, 395, 396, 406, 409, 412, 413
Olimpíada de l'Epir, 27, 177, 367, 396
Olivier, Laurence, Sir, 68, 375, 396
Òmfale, 197, 397
Onòmarc, 173, 397
Orestes, 352, 367, 397
Orfeu, 397
Orosi, Pau, 397
Otacili Cras, Tit, 397
Ovidi, 45, 183, 365, 397

Pàmfila, 18, 397
Pan, 377
Pappos, 3, 5, 8, 20, 44, 72, 74, 85, 106, 108, 120-122, 125-130, 132, 140, 145, 146, 155, 158, 168, 207, 226, 231, 240, 258, 272, 273, 281, 283, 285, 301, 304, 305, 307, 308, 364, 373, 392, 398, 402
lema de, 304
Pappos d'Alexandria, *vegeu* Pappos
Parigi, Giuglio, 398
Parmenió, 176, 398

Pascal, Blaise, 203, 270, 398
Paul, Gene de, 191, 366, 398
Pausànies d'Orèstia, 27, 177, 398
Pell, John, 398
Pelòpides, 398
Perdicàs I de Macedònia, 26, 32, 172, 398
Perdicàs III de Macedònia, 26, 399
Pèricles, 34, 369, 385, 399
Perseu de Macedònia, 66, 399
Pilat, Ponç, 399
Píndar, 40, 357, 368, 399
Pirene, 57, 399
Pirros de l'Epir, 60-63, 201-203, 349, 366, 379, 399
  bust de, 61
Pisano, Nino, 400
Pitàgores, 13, 17-19, 103, 111, 165, 400
  i l'enrajolament del terra, 17
  i la història
    com a ciència, 13
    com a recerca, 13
  teorema de, 19, 103
Píteas, 39, 307, 400
Pixòdar de Cària, 176, 359, 363, 379, 383, 400
Plató, 16, 43, 73, 74, 76, 78, 79, 81, 86, 87, 99, 132, 144, 169, 170, 206, 209, 213, 221, 225, 226, 230, 288, 294, 307, 326, 364, 368, 369, 371, 376, 384, 392, 400, 404, 410
  Acadèmia de, 76, 99, 209, 358, 391, 400
    i la possible influència en l'obra d'Euclides, 210
  i el concepte
    d'Idea, 78, 79
    de segment rectilini, 132
  i el símil de la línia, 77
  i l'aproximació d'$\sqrt{2}$, 144, 326
Playfair, John, 121, 400
Plini el Vell, 58, 401
Plutarc, 30, 45, 55, 61, 62, 138, 177, 179, 183, 188, 189, 193, 201, 301, 366, 379, 384, 401, 406
Plutarc, Luci Mestri, *vegeu* Plutarc
Plutarc d'Atenes, 236, 401
Poincaré, Jules, XI, 401
Polibi, 23, 372, 385, 401
  quadrat de, 401
Polícrates de Samos, 386, 401
Pólya, George, 136, 401
Pompeu Magne, Gneu, 41, 53, 401
Ponç Pilat, 407
Porfiri, 16, 402
Poros, 33, 181, 402
Posidoni, 145
Posidoni d'Apamea, 402
Powell, Jane, 191
Proca, 184, 355, 402
Procle, 2, 11, 13-19, 44, 72-74, 76, 78, 81-84, 91, 96, 106, 113, 116, 120, 130, 132, 164, 165, 206, 210, 212, 218, 220, 221, 225, 227, 232, 257-260, 356, 364, 365, 373, 392, 401, 402, 406
  i la classificació dels angles, 296
Procle d'Alexandria, *vegeu* Procle
Pròdic de Queos, 224, 402
Prúsies I, 59, 402
Ptolemeu, Claudi, 44, 85, 130, 132, 133, 137, 145, 146, 153, 212, 295, 302, 303, 318, 352, 353, 359, 402

Ptolemeu I Soter, 32, 34, 36, 41, 73, 177, 182, 206, 208, 362, 370, 383, 403, 405, 407
bust de, 32
mort de, 73
Ptolemeu II Filadelf, 36, 37, 40, 359, 367, 376, 403
Ptolemeu III Evergetes, 359, 362, 367, 403
Ptolemeu IV Filopàtor, 137, 403
Ptolemeu V Epífanes, 137, 403

Queril de Samos, 24, 403
Qurra, Thàbit ibn, 386

Rafael de Sanzio, 12, 80, 347, 403
Ratdolt, Erhard, 103, 404
Rea Sílvia, 183, 186, 396, 406
reines assíries
Semíramis, 34, 405
Zenòbia de Palmira, 42
reis
mesopotàmics
Nabucodonosor II, 34, 394
Sargon I, 404
romans
Marci, Anc, 48, 392, 408
Rem, 45, 46, 183, 188-191, 355, 378, 390, 396, 404, 406
nom de, 188
Renault, Mary, 30, 404
Reventós, Agustí, 117
Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 404
Ròmul, 45, 46, 49, 183, 188-192, 194, 195, 355, 365, 378, 384, 390, 396, 403, 404, 406, 407, 413
nom de, 188
Ruminal, figuera, 185
Russell, Bertrand, 404

Safo, 40
Saint-Vincent, Grégoire de, 404
mètode cinemàtic de determinació de tangents a les corbes, 404
Salinger, Conrad, 191
Salmoneu, 404
Sandrocottus, 181
Sargon I, 183
Sarton, George, 12, 405
Sàtir de Cal·latis, 40, 405
Schiaparelli, Giovanni Virginio, 147-149, 405
Schreiber, Peter, 75, 405
Schwartz, Bernard, *vegeu* Curtis, Tony
Segonat, Charles Louis de, *vegeu* Montesquieu
Selene, 383, 405, 408
Seleuc de Babilònia, 135
Seleuc de Selèucida, 145, 181, 308, 405
Seleuc I Nicàtor, 32, 356, 405
Sili Itàlic, 57, 405
Sílvia, *vegeu* Rea Sílvia
Simmons, Jean, 68, 375, 406
Simplici, 12, 15, 16, 147, 168, 328, 369, 406
Simplici de Cilícia, *vegeu* Simplici
Simson
porisma, 121
com a anàlisi, 121
Simson, Robert, 100, 121, 262, 406
Sirià d'Alexandria, 234, 235, 401, 406
Slodtz, Sébastien, 406
Sòcrates, 81, 167, 213-215, 223, 224, 230, 231, 369, 400, 404, 406, 415
Sòfocles, 40, 182, 406
Sosígenes, 17, 406
Sosístrat II, 60, 61, 407, 410

Sòstrat de Cnidos, 36, 407
Sòstrat II de Siracusa, *vegeu* Sosístrat II
Stevin, Simon, 407
Suïda, 168, 407

Taci, Tit, 46, 407, 413
Tàcit, 176, 407
Tàcit, Gaius Corneli, *vegeu* Tàcit
Talassi, 193, 408
Tales, 2, 17, 18, 93, 145, 164, 165, 408
    i la distància d'un vaixell a la costa, 17, 165
    mètode geomètric de, 93
        de superposició, 18, 165
Tarcont, 197, 198, 408, 410
Tarquini, Luci, el Superb, 48, 49, 408, 411
Tarquini Prisc, 48, 49, 189, 396, 408, 411
Tartaglia, *vegeu* Fontana, Niccolò
Tea, 383
Teetet, 20, 168-170, 206, 214, 230, 231, 408
Teofrast, 409
Teia, 405, 408
Tenó, *vegeu* Tinió
Teó d'Alexandria, 41, 44, 106, 130, 132, 408
Teó d'Esmirna, 408
Teodor, 20, 168, 230, 409
Teodor de Cirene, *vegeu* Teodor
Teodosi de Bitínia, 146
Teodosi I el Gran, 42, 409
    edicte, 42
Teodosi de Trípoli, 311, 373, 409
Teofrast, 11-13, 38, 163-165, 376
    nou director del Liceu, 163
    primer doxògraf, 11
Teopomp de Quios, 176, 409
Tèsal, 176, 177
Teseu, 409
Teudi, 84, 210, 409
Tiberi, 409
Timàrides de Paros, 409
Timeu, 307, 410
Timeu de Locres, *vegeu* Timeu
Timocaris d'Alexandria, 43, 136, 410
Tinió, 60, 61, 410
tirans de Siracusa, 66
    Agàtocles, *vegeu* Agàtocles
    Andranòdoros, *vegeu* Andranòdoros
    Arcàgat, *vegeu* Arcàgat
    Epícides, *vegeu* Epícides
    Geló II, *vegeu* Geló II
    Hicetes II, *vegeu* Hicetes II
    Hipòcrates de Siracusa, *vegeu* Hipòcrates de Siracusa
    Jerònim de Siracusa, *vegeu* Jerònim de Siracusa
    Menó, *vegeu* Menó
    Pirros de l'Epir, *vegeu* Pirros de l'Epir
    Sosístrat II, *vegeu* Sosístrat II
    Tinió, *vegeu* Tinió
Tirrè, 48, 197, 360, 390, 408, 410
Todhunter, Isaac, 410
Tomàs d'Aquino, 382, 410
Tomàs evangelista, 40, 410
Tonió, 407, 410
Torelli, Giuseppe, 410
Torricelli, Evangelista, 410
Trajà, Marc Ulpi, 411
    fòrum de, 413
Trasó, 65, 411
Tríada Capitolina, 49
    Juno, 49
    Júpiter, 49
    Minerva, 49
Trifó, Salvi, 68, 360, 411
Túbal, 386, 399, 411

Tucídides, VII, 26, 172, 363, 398, 409, 411
Tul·li, Servi, 48, 49, 396, 411
  assassinat de, 49
Túl·lia Minor, 49, 411
Tul·lus Histili, 49, 411

Ulisses, 394
Urban, Fortia d', 146
Ustinov, Peter, 68, 375

Valenciennes, Pierre-Henri de, 412
Valeri Màxim, 412
Valla, Giorgio, 146, 412
Varró, Marc Terenci, 44, 46, 189, 412
Vergilius, Maro Publius, *vegeu* Virgili
Vibenna, Celes, *vegeu* Vibenna, Celi
Vibenna, Celi, 46, 413
Victorí, Gai Mari, 413
Viète, François, 211, 413
  i la zeetètica, 211
Vimont, Édourd, 413
Virgili, 155, 357, 412, 413
Vitrac, Bernard, 14, 414
Vitruvi, 137, 139, 300, 307, 379, 414
Vitruvi Pol·lió, Marc, *vegeu* Vitruvi
Voltaire, 135, 359

Wallis, John, 135, 146, 322, 414
Wassermann, Jakob, 1, 414
Wehrli, Fritz, 15, 414
Woepcke, Franz, 257, 414

Xenòcrates, 177, 414
Xenòcrates de Calcedònia, *vegeu* Xenòcrates
Xenofont, 176, 414

Zenarc, 75, 208, 414
Zenó d'Elea, 16, 414
  atomisme, 90
Zenó de Cítion, 414
Zenó de Sidó, 357, 415
Zenòbia de Palmira, 361, 415
Zenòdor, 415
Zenòdot d'Efes, 38, 415
Zeuxip, 415

## Topònims i altres noms

Acadèmia de Plató, 16, 74, 76, 77, 209, 392, 400
arxipèlag mediterrani de Cabrera, 58

batalles
  cartagineses
    de Cannes (prœlium Cannæ), 58, 64, 65, 388
    de Metaure (prœlium Metaurus), 58, 395
    de Ticino (prœlium Ticino), 57
    de Trasimè (prœlium apud Transimenum Lacum), 57
    de Trèbia (prœlium Trebianum), 57
    de les Àgates (prœlium Insulæ Agathæ), 64, 365, 382
  macedòniques
    d'Issos (Μάχη τῶν Ισσός), 30, 33
    de Gaugamela (Μάχη τῶν Γαυγάμηλα), 33
    de Grànic (Μάχη τῆς Γράνικος), 33
    de Làmia (Λαμία), 61
    de Queronea (Μάχη τῆς Ξαιρώνειας), 27, 33, 376, 401
    del riu Hidaspes (Μάχη του Ψδάσπη), 33, 402

romanes
d'Àccium, *vegeu* d'Àctium
d'Àctium, 53, 67, 413
d'Àl·lia (clades Alliensis), 50, 362
d'Asculum, 61, 201
victòria, 62
de Cannes (bellum Cannæ), 64
de Cinoscèfals (pugna Cynoscephalarum), 379
de les Forques Caudines (bellum Furcularum Caudinarum), 52
de Règil (bellum Regillus), 50
de Zama (prœlium Zamæ), 58, 356
biblioteques
d'Alexandria, *vegeu* ciutats gregues
de Pèrgam, *vegeu* ciutats turques
Herzog August, 390

castells
de Montaigne, 394
Gandolfo, 411
catedrals
anglesa
Westminster, 398
italiana
Santa Maria dei Fiore, 400
turca
Santa Sofia, 387
ciutats
africanes
Hipona (en grec: Ιππον Βασιλικος; en llatí: Hippo Regius), 39, 352
alemanyes
Augsburg, 404
Berlín (Berlin), 349, 386, 387
Dessau, 414
Dresden, 386, 405
Fürth, 414
Gotha, 362
Kamenz, 390
Potsdam, 387
Schneeberg, 362
Tübingen, 382
Wolfenbüttel, 390
anatòliques
Calcedònia (Χαλκηδών), 43, 384, 414
Cízic (Κύζικος), 363, 393
Selinos (en grec: Σελινοῦς; en llatí: Selinus), 411
angleses
Ashford, 414
Ashtead, 383
Barnetby, 383
Bath, 351
Berkshire, 382
Birmingham, 382
Cambridge, 383, 410
Cranleigh, 383
Daresbury, 364
Dorking, 396
Essex, 386
Guildford, 364
Harpenden, 389
Kensington, 395
Londres (London), 373, 398, 406
Oxford, 73, 146, 382, 386, 414
Rye, 410
Southwick, 398
Steyning, 396
Westminster, 398
Woolsthorpe-by-Colsterworth, 395
Yorkshire, 390

assíries
Damasc (en grec: Δαμασκός; en llatí: Damascus), 74, 208
Palmira (en grec: Παλμύρα; en hebreu: Tadmor), 42, 415
austríaques
Altaussee, 414
babilòniques
Babilònia (Babili), 32, 34, 135, 182, 394, 405
muralla, 182
belgues
Anvers, 406
Berchem, 373
Bruges, 404, 407
Gant, 380, 404, 405
Menin, 373
Moerbeke, 382
bizantines
Constantinoble (en grec: Κωνσταντινούπολις; en llatí: Constantinopolis), 47, 356, 377, 385, 387, 391, 402
Istambul, *vegeu* Constantinoble
Tral·les (Τράλλεις), 356
cartagineses
Cartagena (Cartago Nova), 56, 360
Cartago (en grec: Καρχηδών; en llatí: Carthago), 52, 54, 55, 58, 59, 63-66, 199, 202, 356, 360, 372, 375, 382
Zama (Zama), 58
egípcies
Alexandria, *vegeu* ciutats gregues
Canop (Κάνωπος), 402
Memfis (Μέμφις), 34
Naucratis (Ναύκρατις), 38
Oxirrinc (Οξύρρυγχος), 40, 382
papirs d', 40, 382
Ptolemais Hermiu (Πτολεμάδα Ερμία), 402
escoceses
Aberdeen, 382
Benvie, 400
Burntisland, 400
Glasgow, 406
West Kilbride, 406
etrusques
Tarquínia (Ταρχυινιι), 48, 198
fenícies
Tir (en grec: Τύρος; en llatí: Tyrus; en hebreu: Tsor), 33, 74, 75, 208, 402
Zama, 356
franceses
Auteuil, 390
Clarmont d'Alvèrnia, 398
Clarmont d'Erau, 381
Épernon, 366
Fontenay-le-Comte, 413
La Brèda, 394
La Haye en Touraine, 370
Lugdunum (ara Lió), 363
Nancy, 401
París (Paris), 146, 350, 359, 361, 365, 366, 368, 381, 389, 390, 394, 398, 401, 406, 412-414
Saint-Mihiel, 381
Sceaux, 365
Sévres, 389
Tolosa (Toulouse), 412
gal·leses
Penrhyndeudraeth, 404
Trellech, 404

gàl·liques
- Ticinum, 395

gregues
- Abdera (Ἄβδηρα), 355, 370
- Afrodísia (Ἀφροδισιάς), 102, 229, 354
- Agrigent (en grec: Ἀκράγας; en llatí: Agrigentum), 60, 374, 379
- Alexandria (Αλεξάνδρεια), XIII, 28, 29, 33-39, 41-44, 69, 75, 113, 130, 132, 137, 208, 234, 235, 287, 357, 359, 362, 363, 367, 371, 373, 374, 384-387, 391-394, 398, 400, 401, 403, 405, 406, 408-410
  - Acadèmia d', 33
  - biblioteca d', XIII, 33, 34, 37-43, 182, 357-359, 363, 400, 403, 415
  - biblioteca actual d', 42, 394
  - far d', XIII, 33-36, 182, 403, 407
  - massacres d', 41
  - museu d', XIII, 28, 33, 34, 37-39, 41, 43, 136, 182, 353, 367, 370, 384, 385, 403
  - port d', 36
- Anapus (Ἀναπος), 386
- Argos (Ἄργος), 62, 172, 352, 363, 398, 399
- Atenes (Ἀθηνᾶι), 11, 25, 27, 40, 169, 173, 205, 355, 356, 359, 360, 363, 369, 370, 375, 379, 387, 390, 392, 394, 397, 399-402, 406, 408, 409, 411, 415
- Bizanci (Βυζάντιον), 39, 47, 71, 358, 359, 379
- Calcis (Χαλκίς), 12, 387, 409
- Carist (Κάρυστος), 371
- Cilícia (Κιλικία), 406
- Cirene (Κύρηνε), 38, 39, 301, 357, 362, 363, 374, 409
- Cnidos (Κνίδος), 36, 363, 376, 407
- Colofó (Κολοφών), 84, 384
- Colonos (Κολωνός), 372
- Corint (Κόρινθος), 26, 52, 368, 370, 373, 382, 386
- Crotona (Κρώτων), 2, 3, 6, 358
- Cítion (en grec: Κιτιον; en llatí: Citium), 414
- Delfos (Δελφοί), 401
- Edessa (Ἐδεσσα), 26, 363
- Efes (Ἔφεσος), 34, 38, 299, 376, 384, 388, 415
- Eges (Αιγαί), 26, 360, 363
- Elea (Ἐλέα), 16, 414
- Eleusis (Ἐλευσίς), 375
- Empúries (en grec: Ἐμπόριον; en llatí: Emporiæ), 58
- Epidaure (Επίδαυρος), 397
- Eresos (Ερεσός), 409
- Esmirna (Σμύρνα), 197, 408
- Esparta (Σπαρτη), 411
- Estagira (Στάγιρα), 359
- Etna (Αἴτη), 60
- Falèron (Φάληρον), 37, 38, 369, 370
- Gela (Γέλας), 74, 375, 381
- Gerasa (Γέρασα), 396
- Halicarnàs (en grec: Ἁλικαρνασσός; en llatí: Halicarnassus), 34, 45, 46,

183, 201, 355, 363, 372, 384, 400
Halimous (Ἁλιμοῦς), 411
Heraclea Pòntica (Ἡράκλεια Ποντική), 362
Himera (Ἱμέρα), 352
Ílion (ᾠΙλιον), *vegeu* Troia
Iolkos (en grec: Ἰωλκός; en llatí: Iolcus), 368
Issos (Ισσός), 30, 33
Kaunos (Καῦνος), 372
Laerte (Λαέρτη), 371
Làmia (Λαμία), 61
Làrissa (Λάρισα), 360, 378
Lindos (Λίνδος), 35, 364
Locres (Λοκροὶ Ἐπιζεφύριοι), 410
Massàlia (Μασσαλία), 307
Megalòpolis (Μεγάλη πόλις), 401
Mègara (Μέγαρα), 73, 74, 376
Messina (Μεσσήνε o Μασσάνα), 54
Micenes (Μυκῆναι o Μυκήνη), 352
Milet (Μίλητος), 17, 139, 385, 387, 408
Mitilene (Μιτυλήνη), 354
Muníquia (Μουνιχία), 369
Olímpia (Ολιμπια), 34, 378
Olint (Ὄλυνθος), 379
Orèstia (Ὀρεστις), 27, 177, 398
Pel·la (Πέλλα), 26, 29, 363, 378, 388, 399
Pelusium (Πηλούσιον), 372
Perge (Πέργη), 5, 6, 44, 130, 300, 357, 377
Pítana (Πιτάνη), 146, 358, 361
Queronea (Χαιρώνεια), 27, 33, 401
Rhamnous (Ραμνοῦς), 19, 356
Sardes (Σάρδεις), 354
Segesta (Σέγεστα), 358, 393
Siracusa (en grec: Συράκουσαι; en llatí: Syracusæ), 54, 59, 60, 62-66, 301, 352, 355, 358, 359, 365, 370-372, 374, 375, 377, 379, 381, 385, 386, 388, 390, 392, 393, 397, 407, 410, 411
Tanagra (Τανάγρα), 368
Tàrent (Τάρας), 61, 300, 359
Tassos (Θάσος), 390
Tebes (en egipci: Uaset; en grec: Θήβαι), 27, 40, 368, 399
Tessalònica (Θεσσαλονίκη), 30, 391, 409
Tràcia (Θράκη), 29, 32, 43, 53, 173, 370, 372, 390
Trípoli (Τρίπολη), 311, 373, 409
Troia (Τροία), 31, 179, 180, 184, 376, 391, 409
Vèlia (Ὑέλη), *vegeu* Elea
Vergina (Βεργίνα), 363, 378
Yulis (Ιουλίς), 402
hebrees
Betlem (en hebreu: Bet-Léhem), 388
Betsaida (en grec: Βεθσαϊδά; en hebreu: Bet'shayid), 388
Jersusalem (en hebreu: Yerushaláyim), 388
holandeses
La Haia, 407

Leiden, 381
hongareses
Budapest, 401
íberes
Arsé (Ἀρση), *vegeu* Sagunt
Braga, 397
Cauca, 409
Girona, 381
Ilorci, 374
Itàlica, 411
Numància (en llatí: Numantia), 67, 375
Sagunt (en grec: Σάγιυντον; en llatí: Saguntum), *vegeu* ciutats romanes
Sevilla, 387, 411
Sòria (Dauria), 67
Tarragona (en íber: Tarraho; en llatí: Tarraco), 411
iranianes
Bagdad (Baḡdād), 353
Rayy, 353
Tus (en persa: Tōs; en àrab: Tūs), 353, 360
iraquianes
Accad, 404
irlandeses
Dublín (en irlandès: Baile Átha Cliath; en anglès: Dublin), 355
israelianes
Ascaló (Ασχαλων), 377
italianes
Alba Fucens (Alba Fucens), 399
Arcetri, 380
Arpinium, 366
Benevento, 391
Bolonya (Bologna), 365
Brèscia (Brescia), 379
Como, 401
Cuneo, 405
Faenza (Fēnza), 410
Florència (Firenze), 381, 398, 400, 410
Formia, 366
Màntua (Mantova), 378
Milà (Milano), 365, 405
Morgàntia (Morgantia), 377
Nàpols (Napoli), 61, 349
Pàdua (Padova), 391
Pesaro (Pesaro), 146
Piacenza, 412
Pisa, 380, 390, 400
Pompeia, 401
Reggio de Calàbria (en grec: Ῥήγιον; en llatí: Regium; en italià: Reggio di Calabria), 386
Rocasecca, 410
Roma, *vegeu* ciutats romanes
Sarzana, 395
Savigliano, 405
Squillace, 365
Sulmona (en grec: Σουλμῶ; en llatí: Sulmo), 397
Tomis (en grec: Τόμις; en llatí: Tomis), 397
Torí (Torino), 200, 389
Tossanova, 410
Urbino, 350, 367, 403
Venècia, 146, 378, 379, 404, 412
Venosa, 386, 391
Verbania, 404
Verona, 365, 410
jordanes
al-Humayma (al-Ḥumayma), 353
Moab, 394
libaneses
Barca, 355
Cirenaica, 355

Sidó (en àrab: Ṣaydā; en fenici: Ṣdn; en hebreu bíblic: Ṣīḏōn; en grec: Σιδών; en turc: Sayda), 35, 357, 415

macedònies

Amfípolis (Ἀμφίπολις), 30

gran tomba, 30

Doberos (en grec: Δόβερος; en llatí: Doberus), 172

Metone (Μεθώνη), 174

Pidna (Πύτνα), 174

Potidea (Ποτίδαια), 174

mesopotàmiques

Nínive (en accadi: Ninua; en grec: Νινευη; romanitzat: Nīnwē; en àrab: Nínawa), 396, 405

Selèucida del Tigris (Σελέυκεια), 145, 308, 405

neerlandeses

Haarlem, 383

nord-americanes

Belleville, 382

Bethlehem, 361

Cambridge, 405

Colúmbia (Columbia), 372

Gillespie, 389

Las Vegas, 369

Los Angeles, 366, 390, 393

Monterey (Monterrey), 389

Nova Jersey (New Jersey), 382

Nova York (New York), 366, 369, 382, 389, 398

Nutley, 382

Palm Desert, 389

Palo Alto, 401

Savannah, 393

palestines

Flàvia Neàpolis, 392

perses

Bactris (en persa: Bāxtriš; en grec: Βακτριανή), 369

Bagdad (Bagdād), 352, 353, 386

Kadhimiya (al-Kāżimayn), 360

poloneses

Frombork, 389

Toruń, 389

romanes

Alba, *vegeu* Alba Longa

Alba Longa, 188, 189, 355, 396, 402, 411

Ardea, 51

Arpinum (Arpinium), 379

Asculum (Ausculum), 61, 62

Brindes (Brundisium, ara Brindisi), 413

Cannes (Cannæ), 58, 64, 65

Càpua (Capua Nova), 58

Castel Gandolfo, *vegeu* Alba Longa

Lavínium (Lāvīnīum), 188

Liternum (en llatí: Liternum; en grec: Λίτερνον), 57, 374

Màntua (Mantova), 413

Milà (en grec: Μεδιόλανιον; en llatí: Mediolanum), 39, 183, 355

Naissus (Nassius, ara Niš), 368

Nàpols (Napoli), 29, 396

Narbona (Narbo Martius), 67

Nicea (en grec: Νίκαια; en llatí: Nicæa), 44, 371, 385

Nicomèdia (Nicomedia), 359, 368

Nola (Nola), 396
Pal·lantea (Pallantium), 377
Pompeia (Pompeii), 29
casa del Faune, 29
Reate (Reate, ara Rieti), 412
Remòria (Remoria), 189, 190
Roma, XIV, 24, 38, 44-59, 61, 63-69, 171, 183, 184, 191-194, 196, 198-200, 351, 356, 358, 360, 362, 365-367, 373, 374, 378-382, 385, 386, 388, 392, 395, 396, 401-404, 406-413, 415
història de, 45, 50
caràcter mític i sagrat de la, 44
fundació de, 44, 183, 185, 189
naixement de, *vegeu* fundació
horòscop de, 44
monts de, 49
reis de, 49
restes arqueològiques de, 44
turons de, *vegeu* monts romans
Sagunt (Saguntum), 56, 57
Tàrent (en grec: Τάρας; en llatí: Tarentum), 20, 48
Trèveris (Treviri), 355
Túsculum (Tusculum), 51
romaneses
Cal·latis (Κάλλατις, ara Mangalia), 40, 405
sabines
Cures (Curi), 45, 407
sicilianes
Agrigent, *vegeu* ciutats gregues
Etna, *vegeu* ciutats gregues
Gela (en grec: Γέλα; en llatí: Gela), 375, 381
Leontins (Λεοντῖνοι), 65, 66, 370
Messana (Μεσσανή), 358
Miles (en grec: Μυλαί; en llatí: Mylæ), 373
Segesta, *vegeu* ciutats gregues
sirianes
Apamea (Ἀπάμεια), 370, 377, 402
Heliòpolis (Ἡλιούπολις), 352
sueques
Estocolm (Stockholm), 370
suïsses
Zuric (Zürich), 414
tràcies
Lisimàquia (Λυσιμαχία), 405
turques
Alopeconnés (Αλοπεκοννεσος), 393
Amàsia (Αμασεια), 376
Antioquia (en grec: Αντιόχεια: en turc: Antakya), 236, 364
Bursa (Προύσσα), 402
Harran, 363, 386
Làmpsac (en grec: Λάμψακος; en llatí: Lampsacus; en turc: Lapseki ilçesi), 37, 137, 376
Pèrgam (en grec: Πέργαμον; en llatí: Pergamum), 67, 360, 380, 402
biblioteca de, 37
Tars (en grec: Ταρσός; en llatí: Tarsus), 352, 353

xineses
Wei, 391
conca mediterrània, *vegeu* mar
constel·lacions
Aquari, 141
Àries, 141
Balança, 141
Bessons, 141
Capricorn, 141
Cranc, 141
Escorpió, 141
Lleó, 141
Peixos, 141
Sagitari, 141
Taure, 141
Verge, 141
continents
Àfrica, 52, 54, 55, 374
Àsia, 24, 32, 67, 179, 180, 360, 405
Europa, 351
cúria romana, 51

estats
africans
Eritrea, 394
nord-americans
Califòrnia (California), 362, 366, 390, 393, 401, 406
Carolina del Sud (South Carolina), 372
Filadèlfia (Philadelphia), 362
Georgia (Georgia), 393
Los Angeles (Los Angeles), 362
Massachusetts (Massachusetts), 405
Nevada (Nevada), 369
Nova Jersey (New Jersey), 382
Nova York (New York), 366, 369, 398
Pennsilvània (Pennsylvania), 361
Saint Louis (St. Louis), 373
estrets
grecs
Termòpiles (Θερμοπύλαι), 173
turcs
Dardanels o Hel·lospon (Δαρδανέλλια o Ἑλλήσποντος), 33
estudi d'arquitectura noruec
Snøhetta, 42

Fundació Bernat Metge, XIII

golfs grecs
de Pel·la (Πέλλα Κόλπος), 25, 29
Termaic (Θερμαϊκός Κόλπος), 25
Grècia antiga (Αρχαί Ελλάδα), 27, 41, 44, 52, 61, 171, 405
guerres
gregues
de Troia (Μάχη Τρωικός), 31, 179, 180, 358, 376, 409
de les represàlies, 31
del Peloponès (Πελοποννησιακός Πόλεμος), 25
dels Diàdocs (Πόλεμος των Διαδόχων), 32, 33
mèdiques (Περσικοί Πόλεμοι), 25, 384
romanes
civils, 41
de Numància (Numantiæ bella), 401
macedònies (Macedoniæ bella), 67, 378
segona, 379
tercera, 356, 399

púniques (Punici bella), 50, 52-54, 59, 171, 374, 375, 378, 401
primera, 50, 54, 63, 382, 383
segona, XIII, 50, 55, 58, 59, 64, 198, 386, 391, 392, 397
tercera, 50, 59, 392
Romano-Síria (bellum Antiochenum), 67
servils (Servilis bella), 68
primera, 377
segona, 68, 360, 411
tercera, 68

illes
britàniques, 400
gregues
Calaurea (Καλαύρεια), 370
Cíclades (Κυκλάδες), IX, 402
Cos (Κῶς), 71, 385, 403
Delos (Δήλος), 367
Eubea (Εὔβοια), 174, 359
Faros (Φαρος), 35, 36, 41
Kea (Κέα), 224, 374, 402
Lesbos (Λέσβος), 163, 354
Paros (Παρός), 409
Queos, *vegeu* Kea
Quios (Ξίος), 19, 20, 76, 84, 99, 168, 176, 210, 226, 374, 386, 409
Rodes (Ρόδος), 1, 2, 11, 35, 38, 43, 44, 163, 356, 357, 364, 372, 376, 381, 402
colós de, 182
Samos (Σάμος), 18, 24, 135-137, 299-301, 309, 358, 359, 367, 369, 386, 401, 403, 405
Samotràcia (Σαμοθράκη), 39, 358, 413
Sardes (Σάρδεις), 401
Sicília (Σικελία), 30, 48, 54-56, 60-66, 68, 74, 202, 352, 365, 370-372, 375, 377, 383, 391, 397, 399, 407, 410, 411
Xipre (Κύπρος), 358, 414
mediterrànies
Balears (Βαλλιαρεῖς), 54
Palma, 58
Còrsega (en grec: Καλλίστη; en llatí: Corsica), 54, 55
dels Conills, 58
Sardenya (en grec: Ιχνουσσα; en llatí: Sardinia), 54, 55, 378
romanes
Àgates (en grec: Αἰγάται ήσοι; en llatí: Aegates Insulæ), 64
indrets
egipcis
Serapeu d'Alexandria, 41
grecs
tomba d'Alexandre el Gran, 178
torre de Faros, *vegeu* ciutats gregues
romans
Basílica Júlia (Basilica Iulia), 53
Camp de Mart (Campus Martius), 53
Capitoli, 49, 51
Circ de Caracal·la, 195
Circ Màxim, 195, 408
Cloaca Màxima (Cloaca Maxima), 48, 408
cúria de Roma (Curiam Romanun), *vegeu* Senat
Forques Caudines (Furculæ Caudinæ), 52

fòrum romà (forum romanum), 48, 51
muralla de Servi Tul·li (Murus Servii Tullii), *vegeu* muralla serviana
muralla serviana, 46, 47, 49
Pont Sublici (Pons Sublicius), 48, 392
Senat Romà (Senatus Romanus), 53, 194
Teatre de Pompeu (Theatrum Pompeii), 53
Trastevere, 47
Via
Àpia (Via Apia), 195
Domícia (Via Domicia), 67, 351, 372

jardins
de les Hespèrides, 389
de les Tulleries, 350

lands alemanys
Saxònia, 390
Liceu d'Aristòtil, 11, 12, 16, 37, 137, 163, 164
llacs romans
Règil (Regillus lacus), 50
Trasimè (Transimenum Lacum), 57
Lliga grega, 27

mar
d'Eritrea (Ερυθρά Τάλασσα), 199
Egeu (Αιγαίο Πέλαγος), 25
Hel·lènica, IX
Mediterrània (en grec: Μεσόγειος Θάλασσα; en llatí: Mar Medi Terraneum), XIV, 34, 36, 39, 47, 53, 54, 58, 59, 64, 66, 67, 69, 171, 198, 365, 411
Negre, 373
Roig, *vegeu* d'Eritrea
Tirrena (en grec: Τυρρηνός Θάλασσα; en llatí: mare Tirrenus), 45, 197
monestirs de Vivarium, 365
monts romans
Aventí (Mons Aventinus), 47, 187-189
Capitoli (Mons Capitolinus), 47, 364, 394, 413
Celi (Mons Cælius), 46, 47, 413
Esquilí (Mons Esquilinus), 47, 49
Janícul (Mons Ianiculum), 47, 48
Palatí (Mons Palatinus), 44-47, 187-191, 413
Pincio (Mons Pincius), 47
Quirinal (Mons Quirinalis), 45, 47, 49
Vaticà (Mons Vaticanus), 47
Vèlia (Mons Velia), 47
Viminal (Mons Viminalis), 47, 49
municipis francesos
Bordeus, 361
Lengon, 361
muntanyes
búlgares
Caucàs, 373
Musala (en búlgar: Мусала), 29
gregues
Cinto (Κύνθος), 367
Olimp (Ὄλυμπος), 25, 29, 182, 415

muralla serviana, *vegeu* indrets romans
museus
Altes de Berlín, 63, 349
Archeologico Nazionale (Nàpols), 29, 61, 349
d'Alexandria, 28
d'Història Natural (Oxford), 350
del Louvre (París), 348, 349, 413
Galeria Nacional de les Marques (Urbino), 350

oceà Atlàntic (Oceanus Atlanticus), 54, 307, 308, 400

països
Afganistan (Dê Afghānistān Islām Jumhūryat), 353
Alemanya (Deutschland), 42, 362, 386, 387, 404, 405, 414
Anatòlia (Ανατολή), 32, 58, 360, 368, 372, 380, 401, 406, 408
Anglaterra (England), 364, 373, 382, 386, 396, 398, 406, 410, 414
Armènia (Hayastan), 352
Àsia Menor, *vegeu* Anatòlia
Àustria (Österreich), 414
Bèlgica (Belgique), 373, 380-382, 404-407
Bulgària (Balgària), 29
Egipte (antigament: Kemet; en grec: Αίγυπτος; en àrab: Miṣr), 32-34, 36, 38, 40, 42, 53, 67, 69, 75, 182, 354, 357, 359, 360, 362, 363, 365, 367, 369, 371, 372, 374, 376, 384-386, 391, 392, 394, 397, 398, 401-403, 405, 406, 408-410
Escòcia (Scotland), 382, 406
Estats Units d'Amèrica (The United States of America), 42, 361, 362, 372, 373, 382, 389, 390, 393, 401, 405, 406
Fenícia, 402
França (France), 42, 359, 361, 365, 366, 368, 370, 381, 389, 390, 394, 398, 406, 413, 414
Gal·les (en gal·lès: Cymru; en anglès: Wales), 404
Gàl·lia (Gallia), 67, 307, 363, 372
Cisalpina (Cisalpina), 54, 67, 395
Narbonesa (Narbonensis), 67
Transalpina (Transalpina), 54
Grècia (Αρχαί Ελλάδα), 16, 24, 25, 202, 355, 356, 359, 363, 365, 367-380, 382, 384, 386-388, 390, 392, 398-403, 405, 406, 408, 409, 411, 414, 415
Hispània (en grec: Ιβηρία; en llatí: Hispania), 36, 54-56, 58, 65, 67, 199, 356, 360, 374, 387, 399, 409
jaciments argentífers, 55
Hongria (Magyarország), 401
Índia (Bhārat), 33, 181, 369, 410
Iran (Irān), 353
Iraq (Al-'Irāq), 34, 352, 353, 360, 405
Irlanda (en irlandès: Èire; en anglès: Ireland), 355

Itàlia (Italia), 42, 45, 48, 52, 53, 55, 57, 58, 60, 65, 68, 197, 199, 200, 202, 356, 365-367, 373, 374, 377, 379-381, 386, 389-392, 395-398, 400-405, 408-415
Japó (Nihon o Nippon), 42
Jordània (al-Urdun), 394
Líban (Lebnān), 74
Líbia (Lībiyā), 202, 362, 374, 389, 409
Lídia (Λυδία), 48, 196, 197, 354, 360, 368, 390, 397
Mesopotàmia (Μεσοποταμία), 34, 183, 365
Mèxic (México), 42
Noruega (Norweegen), 42
Numídia (en grec: Νομαδια; en llatí: Numidia), 58, 352, 356, 392
Països Baixos (Nederland), 381, 407
Pèrsia (ἡ Περσίς), 369
Polònia (Polska), 389
Regne Unit (United Kingdom), 42, 389, 390
Romania (România), 405
Sèrbia (Srbija), 368
Síria (Συρία), 32, 53, 67, 352, 356, 370, 377, 396, 402, 415
Suècia (Sverige), 370
Suïssa (en alemany: Schweiz; en francès: Suisse; en italià: Svizzera; en romanx: Svizra; en llatí: Helvetia), 414
Terra de Goshen, *vegeu* Egipte *a* països
Turquia (Türkiye), 34, 363, 376, 385, 391, 402
Xina (Zhōngguó), 391

penínsules
  ibèrica, *vegeu* Hispània *a* països
  italiana, *vegeu* Itàlia *a* països
pics romans
  Ars, 47
  Cæliolus, 47
  Capitolium, 47
  Cispius, 47
  Fagutalis, 47
  Germalus, 47
  Latiaris, 47
  Oppius, 47
  Palatinus, 47
  Salutaris, 47
  Sanqualis, 47
  Velia, 47
piràmide de Kheops, 36, 37
planures
  de Mylae (Μύλας), 63
  del Po, 57
pont Sublici (Pons Sublicius), *vegeu* indrets romans
província Narbonesa (Narbonensis), 54

regions
  alemanyes
    regne de Hannover, 404
  anatòliques
    Cilícia (Κιλικία), 371, 372, 411
    Frígia (Φρυγία), 32
    Lídia (Λυδία), *vegeu* països
  angleses
    Surrey, 396
    Sussex, 398
    West Sussex, 396
  assíries
    Gaugamela (Γαυγάμηλα), 33

cartagineses
Tunísia (Tunesia), 55, 355, 356, 360
celtes
Llenguadoc, *vegeu* província Narbonesa
franceses
Gascunya, 394
Perigord, 394
gregues
Acaia (Ἀχᾶια), 67
Arcàdia (Ἀρκαδία), 364, 398
Bitínia (Βιθυνία), 59, 146, 356, 359, 385, 402, 414
Boècia (Αρχαία Βοιωτία), 368
Bottiea (Βοτταία), 25
Cària (Καρία), 34, 176, 354, 359, 363, 379, 383, 392, 400
Còlquida (ἡ Κολχίς), 357, 392
Edònia (Εδονία), 25
Èlide, 404
Emàtia (Ημαθίας), *vegeu* Macedònia
Epir (Ἤπειρος), 27, 60, 61, 67, 201, 349, 366, 367, 379, 396, 399
Frígia (Φρυγία), 391
Grècia (Ελλάδα), 29, 32, 33, 44, 52, 61, 173, 176, 196, 374, 385
Lícia (Λυκία), 32
Macedònia (Μακεδονία), 24-26, 28, 32, 33, 53, 61, 62, 67, 171-177, 202, 354, 356, 357, 359, 360, 363, 364, 367, 370, 371, 374-376, 378, 379, 390, 396-400, 403, 405
Magna Grècia (Μεγάλὴ Ελλάς, ara Itàlia), 24 48, 54, 359, 384, 414
Magnèsia (Μαγνεσία), 84, 409
Meònia (Μήονιας), 360, 390
Pamfília (Παμφυλία), 32
Peània (Παιανία), 370
Peloponès (Πελοπόννησος), 26
Peònia (Παιονία), 25
Pèrgam (en grec: Πέργαμον; en llatí: Pergamum), 37
Pieria (Πιερίας), 25
Tàrtar, 404
Tessàlia (Θεσσαλία), 173, 395, 397
hebrees
Palestina (en grec: Παλαιστίνη; en llatí: Palæstina; en hebreu: Palestina), 388
íberes
Andalusia (Hispània Ulterior), 54, 58
Galícia (Gal·lacia), 397
Tarragona (Tarraco), 397
índies
Panjab, 33, 402
italianes
Calàbria (en grec: Καλαβρίας; en llatí: Calabria), 386
Campània (Campania), *vegeu* regions romanes
La Toscana, 48
Piemont (Piemonte), 405
magrebines
Cabília (en grec: Καβίλια; en amazic: Tamurt n Iqbaylyen), 39
mediterrànies
Fenícia (en grec: Φοινίκη; en llatí: Phœnicia), 75

romanes
Campània (Campania), 54, 60
Cumes (Cumæ), 48, 408
Dàcia (Dacia), 368
Etrúria (en grec: Τυρρηνία; en llatí: Tirrenia), 48, 50, 51, 196-198, 390
Judea (en grec: Ἰουιδαία; en llatí: Iudaea; en hebreu: Yehuda), 388, 399
Laci (Latium), 47-50, 364, 377, 391, 408
Nàpols (en grec: Νεάπολις; en llatí: Neapolis), 48
Pulla (Apulia), 58
Tirrènia, *vegeu* Etrúria
turques
Samòsata, 391
Samsat, *vegeu* Samòsata
regne de l'Epir (Ἤπειρος), 399
rius
europeus
Po (Padus o Eridanus), 57, 197, 199
Roine (Rhodanus), 372
Ticino (Ticinus), 57
gals
Trèbia (Trebia), 57
germànics
Danubi (Danubius), 361
Elba (Albis), 361
Rin (Rhenus), 54, 361
grecs
Anapus (Ἄναπος), 66
Himera (Ἱμέρα), 65
Terias (Τηρίαν), 60
íbers
Ebre (en íber: Ebre; en grec: Ἴβηρος o Ἴβηρ; en llatí: Hiberus; en àrab: Ibruh), 58, 411
indis
Ganges (Gangā), 181
Hidaspes (en urdú: Jhilum; en grec: Ὑδάσπες), 33, 402
Indo (en sànscrit: Sindh; en grec: Ινδός), 29
jordans
Jordà (en hebreu: Nehar hayarden; en àrab: Nahr al-urdun), 353
mesopotàmics
Tigris, 405
romans
Àl·lia (Allia), 50
Metaure (Metaurus), 58
Tíber (Tiberis), 45-48, 53, 185, 392, 396, 408
sicilians
Longanus (Longanus), 63
turcs
Grànic (en grec: Γράνικος; en llatí: Granicus; en turc: Biga Çay), 33

Senat Romà (Senatus Romanus), *vegeu* indrets romans
Serapeu d'Alexandria, *vegeu* indrets egipcis
serralades europees
Alps (Albi montes), 54, 57, 197, 199, 200, 356
Apenins (Appenninus montes), 54, 197
Balcans (en grec: Αίμος; en llatí: Hæmus; en búlgar: Stara Planina), 29

Pirineus (Pyrenæi montes), 54, 57, 399

setge d'Etna, 60

tomba d'Alexandre el Gran, *vegeu* indrets

torre de Faros, *vegeu* indrets

turons romans
- Esquilí, 411
- Janícul, 392
- Quirinal, 411
- Viminal, 411
- primitius
  - Cispius, 47
  - Fagutalis, 47
  - Germalus, 47
  - Oppius, 47
  - Palatinum, 47
  - Sucusa, 47
  - Velia, 47

UNESCO, 42

Universitat d'Oxford, 350

# Índex d'obres i citacions


Aeci
*Opinions dels filòsofs* (*Περί των άρεσκόντων τοις φιλοσόφοις φυσικών δογμάτων συναγωγή*), 307, 351
llibre iii, capítol xvii, 307, 351
*Placita philosophorum*, *vegeu Opinions dels filòsofs*
Agustí
*Confessions* (*Confessiones*), 39, 183
llibre vi, capítol 3, § 2, 183
Allman, George Johnston
*La geometria grega de Tales a Euclides* (*Greek geometry from Thales to Euclid*), 355
al-Tusī
*Ahlāq-i nāṣirī*, 353
*Al-Ziǧ al-īl-hānī*, 353
Antípater de Sidó
fragment, 182
Apol·loni
*Còniques* (*Κωνικά*), xiii, 4, 6, 107, 130, 240, 274, 283, 377
*Contactes*, *vegeu Tangències*
*Dels llocs plans* (*Τόποι ἐπίπεδοί*), 240
*Secció de l'espai* (*Κωνίου ἀποτομή*), 240
*Secció de raó* (*Λόγου ἀποτομή*), 240
*Secció determinada* (*Διωρισμένη Τομή*), 240
*Tangències* (*Ἐπαφαί*), 240, 261
Apol·loni de Rodes
*Argonautes* (*Ἀργοναυτικά*), 38, 357
Aristarc
*Catàleg*, 136
*Del sistema del món*, 137
*De les mides i les distàncies del Sol i la Lluna* (*Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀπὸστημάτων ἡλόυ καὶ σελῆνης*), xiii, 139-140, 145, 309-346
conseqüències de les hipòtesis, 309
hipòtesis, 140, 299, 301, 309
hipòtesi 1, 309
hipòtesi 2, 309, 315, 340
hipòtesi 3, 309, 319
hipòtesi 4, 309, 324

hipòtesi 5, 309, 335
hipòtesi 6, 309, 317, 333
proposició 1, 142, 309-313, 318, 321
proposició 2, 142, 313, 314
proposició 3, 142, 314-316, 339
proposició 4, 316-320, 322, 333
proposició 5, 319, 320, 322
proposició 6, 320-323
proposició 7, 142, 323-329, 342, 343
proposició 8, 328
proposició 9, 328, 329, 345
proposició 10, 329, 330, 344
proposició 11, 142, 330-332, 341
proposició 12, 142, 332-334, 336, 338
proposició 13, 142, 334-336, 338-340
proposició 14, 339-341, 343
proposició 15, 144, 341-345
proposició 16, 344, 345
proposició 17, 144, 345
proposició 18, 345, 346

Aristeu el Vell
*Còniques* (*Κωνικά*), *vegeu Elements dels llocs sòlids*
*Elements dels llocs sòlids* (*Στοιχεία των κωνικών τομώμ*), 3-5, 208, 240, 283, 286
*La comparació dels sòlids canònics* (*Περὶ των κανονικών στερεών σωμάτων*), 5

Aristòtil
*Analítics primers* (*Ἀναλυτικὰ Πρότερα*), 80, 101
*Analítics segons* (*Ἀναλυτικὰ Ὕστερα*), 80, 215, 228
llibre II 1, 215
*Dels meteors* (*Μετεωρολογικά*), 139
*Ètica eudèmia* (*Ἠθικὰ Εὐδήμεια*), 13

Arquimedes
Ar, 64, 137, 138, 140, 150, 290, 300
*Arenari* (*Ψαμμίτης*), *vegeu* Ar
CE, 129
*De l'esfera i el cilindre* (*Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου*), *vegeu* EC
*De les línies espirals* (*Περὶ ἑλίκων*), *vegeu* LE
*Dels conoides i els esferoides* (*Περὶ κωνοειδέων και σφαιροειδέων*), *vegeu* CE
EC, 73, 219, 373
proposició 1, 73
proposició 6, 73
LE, 373

Arrià, Flavi
*L'expedició d'Alexandre* (*Anabasis Alexandri*), 359

Autòlic de Pítana
*Esfera en moviment* (*Περὶ κινουμένης σφαιρας*), 146
*Petita astronomia* (*Ὀ Μικρος αστρονομία προτος*), 130, 146, 308, 361

Autors anònims
*Hel·lènica d'Oxirrinc* (*Hellenica Oxyrhynchia*), 40
papir P 52, 40
tauleta babilònica AO 17264, 114

AUTORS BÍBLICS
Antic Testament, 40
*Èxode*, 394
*Gènesi*, 351, 396
*Pentateuc* (en hebreu: *Pentateuch*; en grec: *Πεντάτευχος*), 40, 41
Nou Testament, 40
*Evangeli copte*, 40
AUTORS DIVERSOS
*Cànon alexandrí* (*Ὀ Μικρος αστρονομία προτος*), 355
*Mil i una nits* (*Hazār-o yak xab*), 353, 383

BARRIAS, Louis-Ernest
*El jurament d'Espàrtac*, 68, 350
BENÉT, Stephen Vincent
*La cançó de John Brown* (*John Brown's Body*), 362
*Les sabines* (*The Sobbin' Women*), 362
BRANDIS, Christianus Augustus
*Escòlia a Aristòtil* (*Scholia in Aristotelem*), 300
BRETSCHNEIDER, Carl Anton
*De la geometria i els geòmetres anteriors a Euclides* (*Die Geometrie und die Geometer vor Eukleides*), 6
BRIANT, Pierre
*Alexandre el Gran* (*Alexandre el Grand*), 30, 179, 180

CAL·LÍMAC DE CIRENE
«La cabellera de Berenice» («Κόμη της Βερνίκης»), 363
CARPOS D'ANTIOQUIA
*Tractat d'astronomia* (*Αστρόνομμική πραγματεία*), 364
CARROLL, Lewis
*Alícia a través de l'espill* (*Through the looking-glass, and what Alice found there*), 83, 364
*Alícia al país de les meravelles* (*Alice's adventures in Wonderland*), 364
CASIRI
*Biblioteca arabohispana de l'Escorial* (*Bibliotheca arabico-hispana Escurialensis*), volum I, 209
CENSORÍ
*De la mètrica* (*De metris*), 365
*Dels accents* (*De accentibus*), 365
*Dels dies natalicis* (*De Die Natali*), 366
CHASLES, Michel
*Visió històrica de l'origen i desenvolupament dels mètodes en la geometria* (*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*), 3
CICERÓ, Marc Tul·li
*De la naturalesa dels déus* (*De Natura Deorum*), 71
CLAVIUS, Christopher
*Elements d'Euclides* (*Euclidis Elementorum*), 367
CLEÒNIDES
*Introducció a l'harmonia* (*Εἰσαγωγὴ ἁρμονική*), 367
COMMANDINO, Federico
*Aristarchi. De magnitudinibus et distantiis Solis et Lunæ*, 146

Copèrnic, Nicolau
*De les revolucions celestes* (*De revolutionibus orbium cælestium*), 308
Curci Ruf, Quint
*Història d'Alexandre el Gran* (*Historiæ Alexandri Magni*), 182, 369

Demòstenes
*Filípiques* (*Φιλιππικά*), 27, 171, 173-176, 370
primera, iv [1], 171
tercera, iv [4] - [11], 174, 175
ix [31], 173
Descartes, René
*Geometria* (*Géométrie*), 4
DIEC
*Diccionari de la llengua catalana*, 67
Diocles
*Dels miralls ustoris* (*Περὶ πυρέιων*), xiii
Diodor
*Biblioteca històrica* (*Τάδε ἔνεστιν ἐν τῆ͂ῆ πρώτη τῶν Διοδώρου βίβλιων*), 180
llibre xvii, 17.2-4, 180, 182
Diògenes Laerci
*Sobre les vides, les opinions i les sentències dels filòsofs il·lustres* (*Περὶ βίων, δογμάτων καί ἀποφθεγμάτων τῶν ἐν φιλοσοφία εὐδοκιμησάτων*), 299, 371
llibre ix [16], 20-25, 299
Dionís d'Halicarnàs
*Roma des de l'Antiguitat* (*Ῥωμαϊκὴ Ἀρχαιολογία*), 45, 186-191, 194-196, 372
llibre 1, lxxvi [1] - [4], 186, 187
lxxxiv [1] - [6], 187, 188
lxxxvi [1] - [4], 189
lxxxvii [1] - [4], 189-191
llibre 2, xxx [1] - [6], 194, 195
xxxi [1] - [2], 195, 196

Eratòstenes
*Sobre les mitjanes* (*Περὶ μεσοτήτων*), 240
Èsquil
*Orestea* (*Ορέστεια*), 397
Èsquines
*Discursos*, 205
Estobeu, Joan
*Florilegi* (*Ἀνθολόγιον*), 105, 209, 300
volum i 25, 300
*Qüestions seleccionades, sentències i preceptes* (*Ἰωάννου Στοβαίοι ἐκλογῶν, ἀποφθεγμάτων, ὑποθηκῶν βιβλία τέσσαγα*), 376
Estrabó
*Geografia* (*Γεογραφια*), 37, 181, 197
llibre v, capítol 2, § 2, 197, 198
llibre xv, capítol 1, § 36, 181
llibre xvii, capítol 1, § 8, 37
Euclides
*Catòptrica* (*Κατοπτρικός*), 106, 107, 130, 132, 206, 294-296
definicions, 294-295
definició 1, 294
definició 2, 294

definició 3, 294, 295
definició 4, 295
definició 5, 295
definició 6, 295
proposicions, 295
proposició 1, 294-297
proposició 2, 297, 298
proposició 5, 297, 298
proposició 6, 297
*Còniques* (*Κωνικῶν Βιβλία*), 3, 74, 106, 107, 129, 258, 283, 285
*Dades* (*Δεδομένα*), 106-110, 112, 127, 153, 207, 234, 240, 242, 243, 245-253, 277
dades, 109
dada 1, 109, 154, 243
dada 2, 109, 154, 243, 244
dada 3, 154, 244, 245
dada 4, 154, 245
dada 5, 109, 153, 278
dada 6, 109, 153, 278
dada 7, 109, 153
dada 8, 109, 154, 245, 246, 278
dada 9, 109, 153
dada 19, 110
dada 23, 110, 246, 247
dada 24, 110
dada 25, 110, 278
dada 26, 110, 247
dada 28, 110, 111, 248
dada 29, 110
dada 30, 278, 281
dada 58, 111, 248-250
dada 59, 111
dada 84, 111
dada 85, 111
dada 90, 111, 250
dada 91, 112, 250, 251
dada 92, 112
dada 93, 112, 251-253
dades 3 i 4, 109
definicions, 108, 241-243
definició 1, 241
definició 2, 241, 244, 277
definició 3, 241
definició 4, 241
definició 5, 242
definició 6, 242
definició 7, 242
definició 8, 242
definició 9, 242
definició 10, 242
definició 11, 242
definició 12, 242
definició 13, 242
definició 14, 243
definició 15, 243
definicions 25 a 30, 242
proposicions, 108-113
*De les divisions* (*Περὶ διαιρέσεων βιβλίων*), 83, 106, 107, 113, 115, 206, 240, 253, 257
divisions, 114
divisió 1, 114
divisió 2, 114
divisió 4, 114
divisió 5, 114
divisió 6, 114
divisió 10, 114
divisió 11, 114
divisió 12, 114
divisió 13, 114
divisió 14, 114
divisió 18, 253, 255
divisió 19, 113, 115, 253, 255
divisió 20, 113, 115, 255
divisió 28, 113, 115, 116, 255
divisió 29, 113, 115, 257

divisió 30, 115
proposicions, 113-116
*Del discurs* (*Περὶ λέξέως*), 14
*Dels angles* (*Περὶ γωνίας*), 14
*Elements* (*Στοιχεῖα*), xii, xiii, 2, 17, 19, 40, 72, 73, 75-78, 80, 82, 84-88, 90, 92, 93, 95, 96, 98, 99, 102, 103, 105, 107, 108, 111, 117, 120, 127, 130, 131, 164-167, 169, 170, 205-210, 212, 218-220, 228, 239, 241, 242, 249, 258, 260, 263, 267, 268, 277, 284, 296, 297, 328, 351, 352, 402, 404
DI 1, 318
DI 3, 88
DI 4, 294
DI 6, 88
DI 10, 18
DI 10 a 12, 167
DI 11, 18, 90
DI 12, 18
DI 13, 222, 232
DI 14, 222, 232
DI 15, 93, 165, 305, 311, 312, 318, 323, 330, 336, 340
DI 17, 18, 330
DI 17*b*, 165
DI 20, 143, 305
DI 22, 143, 325
DI 23, 88, 248
DIII 1, 161, 242
DIII 6, 242
DIII 7, 233
DIII 8, 318
DIV 15, 273
DV 4, 233
DV 5, 153, 160, 243, 244, 265, 266, 268, 270, 271, 273, 274, 276, 277, 327, 343, 345
DV 7, 150-152, 290, 326, 338, 340, 341
DV 9, 99, 229
DV 10, 99, 229
DV 11, 100
DV 12, 100, 254
DV 13, 153, 265, 266, 268, 270, 271, 277, 278, 342, 343, 345
DV 15, 101
DV 16, 254, 277
DV 17, 277
DVI 1, 307
DVI 3, 161
DX 1.1, 230
DX 1.2, 230
DXI 3, 322
DXI 14, 93, 311, 313, 315
DXI 18, 93, 315
DXI 21, 93, 311
EI, 82, 87, 90, 93, 98, 102, 103, 108
EI 1, 81, 84, 88, 89, 96, 98, 215, 220, 256
EI 2, 9, 73, 84, 89, 91, 98, 151, 162, 220, 273, 275-277, 279
EI 3, 9, 98, 151, 275, 276, 279
EI 4, 91, 93, 98, 118, 151, 220, 311, 312, 317, 336
EI 5, 18, 98, 165, 220, 325
EI 6, 18, 87, 98, 102
EI 7, 91, 102, 220, 328
EI 8, 91, 93, 118, 220, 333, 334
EI 9, 143, 251, 325
EI 10, 115, 117, 153, 228, 249, 273

EI 11, 19, 117, 118, 149, 151, 275, 279, 281-283, 293, 305, 306, 311, 319, 324, 341, 342
EI 12, 19, 87, 90, 91, 115, 119, 168, 279, 290, 313, 337
EI 13, 260
EI 14, 102
EI 15, 17, 164, 252, 258, 260
EI 15 porisma, 19, 166, 317, 332
EI 16, 95, 306
EI 17, 322
EI 19, 82, 91, 102
EI 20, 119, 133, 298, 336
EI 22, 82, 87, 90, 91
EI 23, 19, 117, 119, 168
EI 25, 102
EI 26, 17, 102, 164
EI 27, 102, 336, 340
EI 28, 311, 319, 342, 343
EI 29, 102, 256, 295, 336, 340
EI 30, 248, 267
EI 31, 116, 248, 253, 255, 256, 267, 268, 282, 312, 317, 327, 333
EI 32, 18, 80, 165, 220, 252, 319, 325, 329
EI 32*b*, 324
EI 34, 254
EI 35, 19, 103, 166
EI 36, 19, 103
EI 37, 19, 103, 116, 256
EI 38, 19, 103
EI 39, 102
EI 40, 102
EI 44, 18, 166
EI 46, 143
EI 47, 9, 19, 20, 103, 116, 143, 150, 159, 167, 168, 282, 283, 290, 311, 316, 317, 323, 325, 330, 333, 340
EII, 108, 249
EII 4 porisma, 159
EII 5, 18, 82, 87, 103, 253
EII 6, 18, 82, 87, 103, 153, 273, 276, 277
EII 8, 162
EII 11, 160
EII 12, 87
EII 13, 87, 119
EII 14, 18
EIII, 102, 108
EIII 1, 242, 250, 256, 305, 306
EIII 3, 158, 340
EIII 7, 336, 340
EIII 8, 316, 318
EIII 10, 87
EIII 12, 18
EIII 15, 150, 306, 340
EIII 16, 233, 234, 296, 298
EIII 17, 111, 251, 306, 312, 313, 338
EIII 18, 150, 250, 313, 316, 317, 331-334, 336
EIII 19, 329
EIII 20, 19, 306, 327, 331, 332
EIII 21, 167, 252, 307
EIII 23, 242
EIII 24, 82, 242, 257, 328
EIII 25, 82, 87, 102
EIII 26, 319
EIII 27, 256, 257, 340
EIII 28, 336
EIII 29, 336
EIII 30, 115, 158, 159, 256, 305, 317
EIII 31, 18, 165, 250, 293, 298, 327
EIII 31*a*, 167

EIII 33, 305, 317
EIII 35, 111
EIII 36, 111, 251, 317
EIV, 108
EIV 1, 251, 331
EIV 2, 256
EIV 4, 332
EIV 5, 327
EIV 10, 227
EIV 11, 103
EIV 13, 159
EIV 15, 327
EIV 15 porisma, 332
EV, 86, 99, 127
EV 4, 160, 162, 325-327
EV 6, 243
EV 7, 144, 162, 243, 277, 278, 312, 315, 325, 332
EV 8, 151, 152
EV 9, 10, 119
EV 10, 10, 278
EV 11, 10, 153, 162, 252-254, 265, 266, 278, 290, 315
EV 12, 153, 252, 278
EV 13, 269, 336, 338, 340, 343
EV 15, 162, 265, 317, 318, 326, 334, 338, 342, 344
EV 16, 10, 119, 162, 243, 244, 252, 254, 265, 266, 278, 291, 332
EV 17, 10, 153, 162, 247, 266, 278, 291, 318, 342-344
EV 18, 101, 126, 144, 151-153, 162, 266, 277, 315, 326, 342, 343
EV 19, 341
EV 19 porisma, 254
EV 22, 11, 246, 268, 269, 326, 342, 343, 345
EV 24, 10
EVI, 99, 127, 249
EVI 1, 119, 126, 127, 151, 152, 265, 266, 268, 276, 290
EVI 2, 254, 265-268, 290, 295, 340, 342, 344
EVI 3, 143, 252, 325
EVI 4, 144, 149-151, 241, 252, 253, 312, 315, 326, 329, 332, 336, 338, 340, 341, 343
EVI 5, 296
EVI 6, 295, 336
EVI 7, 307
EVI 8, 150, 316
EVI 10, 277
EVI 12, 253, 255, 256, 277, 278, 306, 312
EVI 13, 9
EVI 15, 254
EVI 16, 150, 253, 254
EVI 17, 150, 161, 268
EVI 18, 249, 278
EVI 19, 119
EVI 20, 336
EVI 21, 9
EVI 22, 10, 160, 162, 278
EVI 23, 99, 100, 269
EVI 24, 249
EVI 28, 18, 253, 292
EVI 29, 18, 292
EVII, 260
EVII 2, 260
EVIII, 100
EVIII 5, 99
EX, 20, 99, 169, 170, 231
EX 1, 73, 404
EX 2, 73
EX 54 a EX 59, 231
EX 60 a EX 65, 231
EX 91 a EX 96, 231
EX 97 a EX 102, 231
EXI, 92, 93

Exi 1, 321, 322
Exi 2, 334
Exi 18, 234, 313
Exii, 99, 404
Exii 2, 19, 20, 168
Exii 18, 330, 344
Exiii, 6, 7, 20, 99, 170
Exiii 7, 160
Exiii 8, 7
Exiii 9 porisma, 160
Exiii 10, 7, 158-160
Exiii 12, 7, 161
Exiii 13, 206
Exiii 15, 7, 160
Exiii 16, 8
Exiii 16 diorisma, 8
Exiii 16 porisma, 160
Exiii 17, 7
Exiii 17 porisma, 160
Exiii 18, 206
Exiv, 158
Exiv 2, 160-162
Exiv 3, 7, 158-161
Nc 1, 10, 119, 144, 150, 159, 161, 164, 245, 256, 257, 268, 282, 283, 297, 307, 315-317, 319, 330, 333, 334, 340
Nc 2, 101, 159, 161, 256, 257, 276, 282, 296, 297, 336
Nc 3, 118, 164, 245, 252, 257, 324, 325, 331, 332
Nc 4, 94, 248, 324, 331, 332
Nc 4′, 298
Nc 5, 297
Nc 6′, 317, 325
P 1, 89, 95, 115-118, 149, 151, 248, 250, 251, 254-256, 282, 290, 292, 293, 298, 305-307, 310-312, 316, 319, 321-324, 329-334, 336, 338, 339
P 2, 9, 88, 89, 91, 95, 143, 149, 151, 253-255, 305, 310, 319, 323-325, 330, 336
P 3, 89, 95, 117, 143, 151, 290, 292, 293, 305, 306, 327, 331, 332
P 4, 17, 94, 95, 164, 325, 332
P 5, 88, 89, 95, 103, 111, 116, 117, 119, 143, 149-151, 212, 248, 267, 268, 290, 298, 325
qüestions metodològiques dels
anàlisi, 76
aspectes
conceptuals, 76
metodològics, 76
inevitabilitat de l'infinit en acte, 90
punt de vista platònic estricta, 84
*Elements de música*, *vegeu Introducció de l'harmonia*
*Fenòmens* (*Φαινόμενα*), 106, 107, 130, 132, 146, 207, 283
*Fonaments de la geometria*, *vegeu Elements*
*Introducció de l'harmonia* (*Εἰσαγωγὴ ἁρμονική*), 106, 107, 206
*Llibre de les fal·làcies* (*Περὶ Ψευδαρῶν*), 106, 107, 116, 218, 240, 257, 258
*Llocs en superfícies* (*Τόπων Ἐπιπέδων βιβλία Β*), 6, 9, 106, 107, 128-130,

240, 258, 271-274, 276-281, 283
lemes
lema 1, 272
lema 2, 272
lema 3, 273, 274, 276, 282
lema 3 anàlisi, 274
lema 3 síntesi, 274-276
lema 4, 276
lema 4 anàlisi, 276-278
lema 4 síntesi, 279-281
lema 5, 281
lema 5 anàlisi, 281, 282
lema 5 síntesi, 283
*Òptica* (*Ὀπτικά*), 106, 107, 130-132, 143, 146, 206, 288, 289, 292, 293
definicions, 289
definició 1, 289, 290
definició 2, 289
definició 3, 289
definició 4, 289
definició 5, 289
definició 6, 289
definició 7, 289
proposicions, 289-293
proposició 1, 289, 290, 292
proposició 8, 290-292
proposició 22, 292
proposició 24, 292, 293, 316
*Porismes* (*Πορισμάτων Βιβλία*), 92, 106, 107, 120, 124-127, 207, 240, 258, 259, 261
lemes
lema I, 124
lema II, 124
lema III, 124-126
lema IV, 124, 125
lema V, 125
lema X, 125
lema XI, 126
lema XII, 271
porismes
porisma 1, 122, 123
porisma 1 anàlisi, 123
porisma 1 síntesi, 123
*Pseudària*, *vegeu Llibre de les fal·làcies*
*Secció del cànon* (*Κατατομὴ κανόνος*), 106, 107
EUDEM
*Analítics* (*Αναλιτικά* o *Κατηγοριαι*), 13
*Corpus Aristotelicum*, 12
*Física* (*Φυσικά*), 14
*Història de l'aritmètica* (*Ἀριθμητικὴ ἱστορία*), 14
*Història de l'astronomia* (*Ἀστρολογικὴ ἱστορία*), 14, 17
*Història de la geometria* (*Γεωμετρικά ἱστορία*), 14, 15, 17, 20, 164, 168
*Història de la teologia* (*Θεολογία ἱστορία*), 14
EURÍPIDES
*Helena* (*Ἑλένη*), 377
*Ifigènia a Aulis* (*Ἰφιγένεια ἐν Αὐλίδι*), 377
*Ifigènia a Tàuride* (*Ἰφιγένεια ἐν Ταύροις*), 377
*Ió* (*Ἴων*), 377
*Les Bacants* (*Βάκχαι*), 377
*Medea* (*Μήδεια*), 177
EUSTACI DE TESSALÒNICA
*Comentari sobre la Ilíada i l'Odissea* (*Παρεκβολαὶ*

*εἰς τὴν Ὁμήρου Ἰλιάδα καὶ Ὀδυσσείας*), 377

Eutoci
*Comentari a 'De l'esfera i el cilindre' d'Arquimedes* (*Σχόλια στο 'Περί σφαῖρα καὶ κυλίνδρος' του Αρχιμήδην*), 20

Forster, Edward M.
*Alexandria. A history and a guide*, 73

Galè
*Galè sobre les 'Epidèmies' d'Hipòcrates* (*Galeni in Hippocratis epidemiarum*), 182
v 10, 2, 1, 182

Gel·li, Aule
*Les nits àtiques* (*Noctes Atticæ*), 380

Gemine
*Teoria matemàtica* (*Θέωρία τών μαθηματικών*), 155

Gillispie, Charles Coulston
*Diccionari de biografies dels científics (Biographical dictionary ¨~8mathematicians: Reference biographies from the dictionary of cientific biography*), 126, 210

Ginouvès, René
*La Macedònia de Filip II a la conquesta romana* (*La Macédoine de Philippe II à la conquête romaine*), 381

Girard, Albert
*Tractat de trigonometria* (*Traité de trigonometrie*), 121

Guastalla, R.
*Notícies preliminars a les Filípiques*, 173, 174

Hardy, Godfrey Harold
*Apologia d'un matemàtic* (*A mathematician's apology*), v, 239

Hermòdor
*Sobre la matemàtica* (*Περὶ μαθημάτων*), 384
*Sobre Plató* (*Περὶ πλάτωνος*), 384

Heròdot
*Història* (*Ἰστορίαι*), 172, 196, 401
i, 94, 196
v, 22, 172
viii, 137, 172
*Història* (*Ἱστορία*), 384

Hesíode
*La Teogonia* (*Θεογονία*), 385, 404

Hipòcrates de Quios
*Elements* (*Στοιχεῖα*), 76

Homer
*Ilíada* (*Ἰλιάς*), 25, 352, 358, 362, 377, 386
*Odissea* (*Ὀδύσσεια*), 357, 358, 374, 377, 386, 394

Humboldt, Alexander von
«Cosmos», 135

Isidor de Sevilla
*Etimologies* (*Etymologiæ*), 387

Jàmblic
*Vida de Pitàgores* (*Πυθαγόρειος Βίος*), 13, 387

JOAN
*Apocalipsi* (*Αποκαλιψις Ιεσοὺ Ξριστού*), 388
JUSTÍ
*Compendi de les històries filípiques* (*Epitoma Historiarum Philippicarum Libri XLIV*), 180
llibre XI, 5.10-12, 180
llibre XI, 6.1, 180

KUBRIK, Stanley
*Spartac*, 68

LEGENDRE, Adrien-Marie
*Elements de geometria* (*Eléments de géométrie*), 390
LIVI, Tit
*Des de la fundació de la ciutat* (*Ab urbe condita*), 45, 184-186, 188, 189, 191, 192, 194, 196, 199-201, 365
llibre 1
III 10 - IV 9, 184-186
VI 3 - VII 2, 188, 189
IX [1] - [16], 191, 192
XI [2], 194
XIII [1] - [4], 196
llibre 21, IV [1] - [3], 199
llibre 22, LI [3], 200
llibre 25, XXXI [9], 201
LLEÓ
*Elements* (*Στοιχεῖα*), 76, 391

MASSA, Maria Rosa
*Aristarco de Samos. Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna*, 147
MÀXIM, Valeri
*Dits i fets memorables* (*Dicta i facta memorabilia*), 201, 202
llibre VIII, 7, 201, 202
MOISÉS
*Gènesi*, 351, 363, 377
MONTAIGNE
*Assajos* (*Essais*), 1
III 13, 1
MONTESQUIEU
*Consideracions sobre les causes de la grandesa dels romans i de la seva decadència* (*Considérations sur les causes de la magnitude des Romains i de leur décadence*), 203

NEPOS, Corneli
*Les vides dels homes il·lustres* (*De viris illustribus*), 198, 199
llibre III [1], 198, 199
NERVAL, Gérard de
*Les filles del foc* (*Les filles del feu*), 41

OVIDI
*Fastos* (*Fasti*), 183, 184
llibre III 11-40, 183, 184

PÀMFILA
*Comentaris històrics* (*Ὑπονήματα ἱστορικά*), 397
PAPPOS
*Col·lecció matemàtica* (*Συναγωγή μαθηματική*), 261-271, 283, 287
*El tresor de l'anàlisi*, 106, 107, 120, 122, 128, 129, 208, 212, 226, 240, 241, 258, 265, 270, 301-306
llibre V, 8, 155, 157, 158, 392
i els vuit llibres de les còniques, 285, 287
introducció, 155, 157, 158

lema 2, 270
lema 12, 8
lema 13, 8
llibre VI, 308
§ 37, 301-304
§ 39, 305
§ 40, 305, 306
§ 41, 306
llibre VII, 107, 283
§ 1, 212
§ 3, 261-265
§ 127, 265-267
§ 129, 267-270
§ 136, 271
§ 138, 270-271
§ 676 25 - 678 6, 208, 240, 241
§ 678 10-12, 208, 241
lema 2, 129
proposicions
proposició 127, 122, 152
proposició 128, 122
proposició 129, 122, 125, 126, 152
proposició 130, 122
proposició 131, 122
proposició 132, 122
proposició 133, 122
proposició 136, 122, 125
proposició 137, 122, 126
proposició 138, 122
proposició 139, 122
proposició 140, 122
proposició 141, 122
proposició 142, 122
proposició 143, 122
proposició 145, 122
proposició 218, 129
*Comentari al llibre x dels Elements d'Euclides*, 232
llibre I 1, 232
llibre II 35, 232

PASCAL, Blaise
*Pensaments* (*Pensées*), 203
PLATÓ
*Càrmides* (*Θαρμίδης*), 364
*Cartes* (*Ἐπιστολαί*)
VII, 342 b4 - 343 a7, 79
*Cràtil* (*Κρατυλος*), 224
*Críties* (*Κριτίας* ), 410
*Diàlegs socràtics* (*Σωκρατικός λόγος*), 400
*Fedó* (*Φαίδων*), 223
93 b - d, 223
*Menó* (*Μένων*), 87, 223, 224
74 d 3, 223
74 d 3 - 75 a 5, 223
75 b 3, 224
*Parmènides* (*Παρμενιδης*), 294
182 d 8 - e 8, 294
*Teetet* (*Θεαίτητος*), 79, 169, 213, 230-231
147 c10 - 148 b4, 230-231
201 e - 202 e, 213, 215
*Timeu* (*Τίμαιος*), 230, 288, 410
PLUTARC
*De la cara visible de la Lluna* (*Περὶ τοῦ εμφαινομένου προσώπου τῷ κύκλῳ τῆς Σελήνες*), 138, 301
*Numa* (*Νυμα*), 184
*Obres morals* (*Moralia*), 301
*Ròmul* (*Ῥώμυλος*), 189
*Sobre la fortuna o la virtut d'Alexandre* (*Περί της Αλεξανδρου τυχης η αρετης λογος β΄*), 179
1.8, 179
*Vides paral·leles* (*Παράλλελοι Βιος*), 176-178, 181, 188, 200-203, 379, 401
I 6 [2], 188
IX 7 [5] - [9], 177, 178
8 [4] - [5], 177

10 [1] - [8], 176, 177
19 [8] - [11], 200, 201
52 [1] - [9], 181
XI, 14 [3] - [12], 203
21 [11] - [15], 201, 202
POINCARÉ, Henri
*La valeur de la science*, XI
POLIBI
*Història* (*Ἱστορίαι*), 23, 24, 199, 200
llibre III
11, 199
12, 23, 24
54, 200
55, 200
PÓLYA, George
*Mètodes matemàtics en la ciència* (*Mathematical methods in science*), 135, 136
PORFIRI
*Comentari a l'*'*Harmònica de Ptolemeu*' (*Εις τα* '*Αρμονικα Πτολεμαιου*'), 16
*Vida de Pitàgores* (*Πυθαγόρειος Βίος*), 402
PROCLE
*Comentari al llibre primer dels Elements d'Euclides* (*Σχόλια εἰς πρῶτον τῶν Εὐκλείδου στοιχείων βιβλίον*), 2, 81, 113, 120, 132, 206, 209, 210, 212, 213, 215, 217, 218, 220, 222, 226-228, 232-238, 253, 258, 261
Sumari, 2, 15, 16, 72
19 - 20, 218
68, 206
68 - 70, 206, 207
69 - 74, 220
70 - 71, 258
76 - 77, 212
84, 209, 210
121 - 126, 232-238
127 - 128, 237-238
139 - 140, 222
142 - 143, 222
144, 253
178 - 179, 213
200 - 202, 215, 217
202, 81
203, 9 - 205, 10, 226-228
212, 258
301 - 305, 261
PTOLEMEU
*Almagest*, vegeu *Sintaxi matemàtica*
*Sintaxi matemàtica* (*Μαθηματική Σύνταξις*), 132, 146, 303, 304, 318, 352
llibre I
proposició 1, 318
proposició 10, 152

RAFAEL DE SANZIO
*L'escola d'Atenes* (*La scuola di Atene*), 12
RENAULT, Mary
*La naturalesa d'Alexandre* (*The nature of Alexander*), 30, 178, 179

SAINT-VINCENT, Grégoire de
*Obra geomètrica de la quadratura del cercle i les seccions còniques* (*Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni*), 404
SARTON, George
*Història de la ciència* (*A history of science*), 176
SÀTIR
*Vida d'Eurípides*, 40

SILI ITÀLIC
*Les guerres púniques* (*Bella Punica*), 405
SIMPLICI
*De cælo*, 328
SIMSON, Robert
*Elements d'Euclides* (*Euclidis Elementorum*), 230
llibre V
definició A, p. 94-95, 230
proposició 12, 124
SÒFOCLES
*Àiax* (*Àiax*), 406
*Antígona* (*Ἀντογόν*), 406
*Èdip a Colonos* (*Οἰδίπος ἐπὶ Κολωνῷ*), 406
*Èdip tirà* (*Οἰδίπος Τύραννος*), 406
*Electra* (*Ἠλέκτρα*), 406
*Filoctetes* (*Φιλοκτήτης*), 406
*Les Traquínies* (*Τραχίνιαι*), 406
SUÏDA
*Suda* (en grec: *Σοῦδα*; en llatí: *Suidæ lexicon*), 170, 407

TÀCIT, Gaius Corneli
*Annals* (*Annales*), 407
llibre XV, 44, 407
TEODOSI
*Dels dies i les nits* (en grec: *Στις Ημέρες και τις Νύχτες*; en llatí: *De dicbus et noctibus*), 146, 308
*Esfèriques* (*Σφαιρικά*), 146, 308, 311, 409
TEOPOMP
*Filípiques* (*Φιλιππικὰ*), 176, 409
TOMÀS
*Evangeli copte*, 40
TUCÍDIDES
*Història de la Guerra del Peloponès* (*Ιστορία του Πελοποννησιακού Πολέμου*), 172, 411
llibre II, XCIX [1] i [6], 172

URBAN, Fortia d'
*Tractat d'Aristarc de Samos sobre les grandàries i les distàncies del Sol i la Lluna* (*Traité d'Aristarche de Samos sur les grandeurs et les distances du Soleil et de la Lune*), 146

VALERI MÀXIM
*Dates i fets meravellosos* (*De Factis Dietisque Memorabilibus Libri IX*), 412
VALLA, Giorgio
*Aristarc de Samos. Sobre les magnituds i les distàncies del Sol i la Lluna* (*Aristarchi Samij. De magnitudinibus et distantiis Solis et Lunæ*), 146
VARRÓ, Marc Terenci
*Disciplines* (*Disciplinæ*), 412
*Sobre la llengua llatina* (*De lingua latina*), 46
VIÈTE, François
*Isagoge*, 212
VIRGILI
*Bucòliques* (*Bucolica*), 413
*Eneida* (*Æneis*), 357, 413
*Geòrgiques* (*Georgicæ*), 155, 413
VITRUVI POL·LIÓ, Marc
*Sobre l'arquitectura* (*De arquitectura*), 300, 307, 375, 414

llibre novè
capítol III, § IX, 300
capítol VIII, 307

VOLTAIRE
*Diccionari filosòfic* (*Dictionnaire philosophique*), 135

WALLIS, Thomas
*Aristarc de Samos, el Copèrnic antic. Una història de l'astronomia grega fins a Aristarc juntament amb el tractat d'Aristarc sobre les mides i distàncies del Sol i la Lluna* (*Aristarchus of Samus, the Ancient Copernichus. A history of Greek astronomy to Aristarchus, together with Aristarchus's treatise on the sizee and distances of the Sun and Moon*), 146

WASSERMANN, Jakob
*El cas Maurizius* (*Der Fall Maurizius*), 1, 2

WEHRLI, Fritz
*L'Escola d'Aristòtil, textos i comentaris (1944-1960)*, *tom* VIII. *Eudem de Rodos* (*Die Schule des Aristoteles, Texte und Kommentare (1944-1960), t.* VIII. *Eudemus von Rodos*), 15, 414

XENOFONT
*Anàbasis* (*Ἀνάβασις*), 414
*Apologia de Sòcrates davant el jurat* (*Ἀπολογία Σωκράτους πρὸς τοὺς Δικαστας*), 414

ZENÒDOR
*Sobre les figures isoperimètriques* (*Περὶ ισομετρων σχημάτων*), 415

# Índex de termes


acceleració de Coriolis, 138, 368
acroamàtics, 178
addició de segments, 91
alfabet
    etrusc, 49
    grec, 49, 364
    romà, 49, 364
àlgebra geometritzada, 18, 19
alvèol, 157
anàlisi, 77, 120, 210, 212, 225
    camp de l', 108
    construcció, 77
    de les aportacions matemàtiques gregues, 43
    platònica, 82
    reducció, 77
anàlisi/síntesi
    dualitat, 108
anècdota del deixeble, 72, 76, 77, 105, 209
angle, 14, 232, 233
    agut, 18, 102, 167
    central, 306, 325
    com a àrea, *vegeu* com a magnitud
    com a contracció de l'àrea, 234
    com a figura il·limitada, 232
    com a inclinació, 232, 234, 235, 238
    com a inflexió, 232
    com a magnitud, 232, 235
    com a qualitat, 14, 232-236
    com a quantitat, 234, 235
    com a relació, 234
    com a trencament, 236
    concepte d', 223
    construcció d'un, 19
    corniforme, *vegeu* de contacte
    curvilini, 238
    d'incidència d'un raig lluminós, 132, 295
    d'un cercle, 110
    de contacte, 232, 233, 295
    de reflexió d'un raig lluminós, 132, 295
    del con
        agut, 6
        obtús, 6
        recte, 6
    divisió d'un, 233
    donat
        en magnitud, 241
        en posició, 108
    extern
        d'un polígon, 220
        d'un triangle, 18
    inscrit en una semicircumferència, 18
    intern d'un triangle, 18
    obtús, 18, 102, 167
    pla, 237
        com a inclinació, 237

portar un, *vegeu* transportar un
recte, 18, 94, 102, 167
rectilini, 167, 233
sòlid, 237
transportar un, 18
angles
adjacents, 94
de la base d'un triangle isòsceles, 18
hipòtesi dels, 167
interns del mateix costat, 95
que s'oposen pel vèrtex, 17, 92
rectes
igualtat dels, 94
tipus d', 167
agut, *vegeu* angle agut
obtús, *vegeu* angle obtús
recte, *vegeu* angle recte
antecedents de la matemàtica grega, 72
any gran, 139
aplicació d'àrees, 18, 19, 103, 111, 216, 240
en paràbola, 273, 274
exacta, *vegeu* en paràbola
per defecte, 111, 249, 284
per excés, 111, 284
apodíptic, 207
aportacions conceptuals, 75
d'Aristòtil
definició, 79
estructura metodològica de la matemàtica, 78
axioma, 78
deducció, 78
definició, 78, 79
hipòtesi, 78
amb consens, 78
sense consens, 78
lleis de deducció, 78
noció comuna, 78
postulat, 78
principi, 78
tesi, 78
existència, 79, 80
infinit en potència, 90
magnitud divisible, 90
problema i/o construcció, 80
reducció a l'absurd, 101
síntesi, 78
sistema sinteticodeductiu, 79
teorema i/o demostració, 80
d'Euclides, 205
anàlisi, 77
axioma, 78
caràcter didàctic de la metodologia, 84
causa, 84
definició, 79
element en el sentit feble, 84
epistemològiques, 75
estructuració deductiva, 84
existència, 79
figura ideal, 86
figura impossible, 87
hipòtesi, 78
lògiques, 75
mètode
analític, 84
demostratiu, 84
dialèctic, 84
ontològiques, 75
postulat, 78
recta il·limitada en acte, 87
signe, 84
síntesi, 77
d'Èudox
concepte de raó, 99

d'Hipòcrates de Quios
principi de generalització, 99
raó composta, 99
de Plató
anàlisi, 77
coneixement
dialèctic, 77
matemàtic, 77, 78
vertader, *vegeu* Idea
definició, 79
nom i verb, 79
figura ideal, 86
Idea, 78, 79, 86
imatge, *vegeu* figura ideal
nom, 79, 86
objecte
ideal, *vegeu* Idea
real, 79
perible, *vegeu* real
regle i compàs, 80
símil de la línia, 77
de Zenó
atomisme, 90
apòtom, 169
aproximació pitagòrica d'$\sqrt{2}$, 144, 326
arc de circumferència
forma aparent d'un, 132
àrea d'una figura, 103
argiu, 172
aristotèlic, 16
aritmètica, X, 16, 169
arquimedianitat, 236
art de la guerra, 62
asímptotes, 166
de la hipèrbola, 284
aspectes teòrics dels *Elements* (*Στοιχεῖα*) d'Euclides
conceptuals, 76
metodològics, 76
astronomia, XII, 16, 300, 406
geometritzada, 140
atomisme en Zenó, 90
axioma, 212, 213

bàrbar, 26
ben determinat
element geomètric, 109
relació, 109
binomial, *vegeu* segment
bisectriu, 112
branques oposades d'una hipèrbola, 284
bust
d'Escipió Africà, Publi Corneli, 57
de Pirros de l'Epir, 61
de Ptolemeu I Soter, 32

calendari julià, 406
cànon dels poetes lírics, 386
cant nupcial, 193
caos, 43
caràcter
dual de la lògica, 102
ideal de la figura, 91
cas, 91, 220, 225, 226
cavalleria
cartaginesa, 57
macedònica, 26
romana, 57
cercle, 79, 83, 87, 93, 108, 161
com un polígon amb infinits costats, 158
diàmetre del, 18, 93, 165
divisió d'un, 113, 115
amb segments paral·lels, 113
donat
en magnitud, 241, 242
en posició, 108, 242
quadratura per exhaustió, 19
cilindre, 142
forma aparent d'un, 132
circumferència, 87, 112, 129
circumscrita a un triangle, 112

com a lloc, 127
inscrita en un triangle, 112
potència d'un punt a una, 111, 112
tangent a una, 111, 112
circumferències
externes, 82
no concèntriques, 82
que es tallen, 82, 151
condicions de tall, 82
tangents, 82
ciutadà guerrer, 45
civilització
micènica, 24
minoica, 24
classicisme grec, 41
classificació
d'angles, 18
del con segons el vèrtex, 5
clau de la geometria, 75
composició
d'una proporció, 101
d'una raó, *vegeu componendo* a operacions de la proproció
de raons, *vegeu* raó doble
con, 142, 167, 234, 272
acutangle, 284
angle del
agut, *vegeu* acutangle
obtús, *vegeu* obtusangle
recte, *vegeu* rectangle
classificació del, 5
escalè, 155
forma aparent d'un, 132
obtusangle, 284
rectangle, 284
recte, 155
concepció de la matemàtica
aristotèlica, 76
platònica, 76
conceptes geomètrics
angle, 14
aplicació d'àrees, 103, 274
en l'obra d'Euclides, 209, 238
i influències, 209
eudoxià de raó, 99
figura, 14
general de magnitud, 110
potència d'un punt a una circumferència, 103
invariància de la, 103
conclusió, 227
condició de tall de circumferències, 82
congruent, 94
cònica, XII, 2, 3, 5, 20, 21, 44, 74, 120, 128, 129, 155, 166, 271, 272, 276, 283, 287, 288
caracterització d'una, 128
construcció d'una, 285
creació d'una, 21
determinació d'una, 5, 6, 286
diàmetre d'una, 285
directriu d'una, 4, 129, 273
eix d'una, 285
elements bàsics d'una, 130
el·lipse, *vegeu* el·lipse
estructuració i estudi elemental d'una, 108
estudi i ús d'una, 2
excentricitat d'una, 273
focus d'una, 4, 129, 273
forma axial d'una, 273
hipèrbola, *vegeu* hipèrbola
màxims d'una, 286
mínims d'una, 286
paràbola, *vegeu* paràbola
propietat fonamental d'una, 4, 129
resultats elementals d'una, 4
teorema fonamental d'una, 9
conquesta àrab, 42
cònsol, 51

construcció, 77, 213, 216, 220, 227
amb regle i compàs, 80
com a existència, 84
d'un angle igual a un de donat, 19
d'un triangle de costats donats, 82
de segments rectilinis que divideixen una figura, *vegeu* divisió d'una figura
del pentàgon regular, 103
geomètrica, 88, 89
hipotètica de la demostració, 88
ideal, *vegeu* geomètrica
corba
cercle, 93
cilíndrica, 147, 148
cissoide, XII, 237, 371
com a lloc, 127, 128
concoide, XII
cònica, *vegeu* cònica
esfèrica, 147-149
espírica, 237
generada per moviment doble, 364
hèlix cilíndrica, 166
hipopede, 147-149, 237, 238
equació
cartesiana, 147
paramètrica, 148
lemniscata esfèrica, *vegeu* hipopede
corbes
lineals, 128, 129
més complexes, *vegeu* lineals
corda, 112
corol·lari, *vegeu* porisma
corpus d'un autor, 39
cos celeste
grandària aparent, 132
coses
congruents, 94
determinades, 121
donades, 121
iguals, *vegeu* igualtat
no donades, 121
que se superposen, *vegeu* congruents
cosmos, 43
creació de Roma
faula de la, 187
criptografia, 401
cristianisme, 42, 368
criteri d'igualtat de triangles, 17, 93, 94
ACA, 17, 94
CAC, 93, 220
CCC, 93
criticisme literari, 358
cub, 7, 8, 160, 170
aresta del, 7
cultura
cristiana, 41
etrusca, 49
grega, 41
islàmica, 41
curvatura, 14

dada, 107, 109
decàgon regular, 7, 159, 160
definició, 78, 84, 88, 96, 97, 213, 215, 223, 224
com a postulat, 132
i existència, 79
i postulats de l'òptica, *vegeu* postulats de l'òptica
platònica de segment rectilini, 132
demostració, 213, 215-217, 220, 225, 227
directa, 97, 228, 229
general, 91
independent de la figura, *vegeu* general

indirecta, *vegeu* per reducció a l'absurd
llacunes en la, 88
per l'impossible, *vegeu* reducció a l'absurd
per reducció a l'absurd, *vegeu* reducció a l'absurd
per tangram, 116
desigualtat
d'angles, 232, 233
de magnituds, 233
desigualtat trigonomètrica, 131, 150, 153, 290, 318
demostració geomètrica de la, 150, 153, 318
determinació, 240
de dues mitjanes proporcionals, 92
déu de la llança, 45
diàdoc, 31-33, 53
diagonal
incommensurabilitat de la, 229
dialèctica, 224
diàmetre
de l'esfera, 7, 159
de la Lluna, 302-304
aparent, 301
de la Terra, 303, 304
del cercle, 18, 165
del Sol, 303, 304
dimidiar, 114
dinastia
accàdia, 404
aquemènida, 33, 34
làgida, 73, 208
màuria, 366
ptolemaica, 69, 73, 208, 402, 403
diorisma, 7, 8, 81, 82, 96, 215, 216
directriu d'una cònica, 273
disjunció de casos, 82, 87, 92, 102, 165, 322, 328
dependència de la figura, 87
ser igual, 82
ser més gran, 82
ser més petit, 82
distància d'un vaixell a la costa, 165
distinció de casos, *vegeu* disjunció de casos
dividir per la meitat, *vegeu* dimidiar
divisibilitat d'un angle, 232, 233
divisió, 82, 102, 217, 253
com a anàlisi, 82
com a disjunció de casos, 82
d'un cercle, 113, 114
amb segments paral·lels, 113
d'un paral·lelogram, 114
d'un trapezi, 114
d'un triangle, 113, 114
d'una figura, 82, 83, 113
construcció de la, 113
per un punt de
l'interior de la corba, 83
la corba, 83
geomètrica, 102
i anàlisi platònica, 82
dodecaedre, 5, 7-9, 158, 170
costat del, 8
regular, 159
domini
etrusc
fi del, 50
púnic sicilià
fi del, 55
dretura, 14
dualitat
afirmació/negació, 83
anàlisi/síntesi, 108
aniversari / no aniversari, 83
Anníbal-Escipió, 58
congruent/igual, 94

història/llegenda, XIV
imatge platònica / figura geomètrica, 86
moviment/torsió, 92
parell/senar, 229
text teòric / anàlisi experimental, 131
duplicació del cub, 92, 226

eclipsi de Lluna, 144, 328
eclíptica, 301
edicte
de Milà, 408
de Teodosi, 42
element, 76, 84, 88, 92, 98, 142, 206, 207, 214, 218, 220, 228, 286, 287, 305, 325
geomètric
ben determinat, *vegeu* donat
donat, 108
elements
bàsics d'una cònica, 130
de l'univers, 43
aigua, 43, 141
aire, 43, 141
èter, 43
foc, 43, 141
quinta essència, *vegeu* èter
terra, 43, 141
elits del poble macedoni, 25
el·lipse, 6, 11 129, 154, 273, 276, 278, 281, 283, 285, 287, 288
diàmetre d'una, 278
empremta grega
científica, 31
matemàtica, 31
enllosar el terra, *vegeu* enrajolar el terra
enrajolar el terra, 17, 19, 158, 217
hexàgon regular, 19
quadrat, 19
triangle equilàter, 19
enunciació, 227
epígon, 32
epònim, *vegeu* magistrat
escèptic, 178, 408
Escola
de Milet, 139
epicúria, 357
estoica, 101
jònica, 384
megàrica, 74
peripatètica, 38, 356
pitagòrica, 77, 99, 167, 169, 209
nombres i intervals musicals, 16
ternes pitagòriques, 16
platònica, 72, 77
sofista, 224
escoliasta, 287
escultures
Victòria de Samotràcia, 413
esfera, 7-9, 142, 160
de les estrelles fixes, 302
diàmetre de l', 7, 8, 159
on es mou el Sol, 320
superfície de l', 95
esferes homocèntriques, 149
especificació, 227, 228
estagirita, 13, 16
estàtica, XII
estàtua
d'Anníbal, 55
d'Euclides, 73
de Zeus, 34
del jurament d'Espàrtac, 68
estoïcisme, 414
estrella fixa, 149
estudi
de l'anatomia, 43
de l'aritmètica, 43
de l'astronomia, 43
de l'enginyeria, 43

de la botànica, 43
de la filosofia, 43
de la física, 43
de la geografia, 43
de la geometria, 43
de la gramàtica, 43
de la lògica, 43
de la medicina, 43
de la música, 43
de la psicologia, 43
de la retòrica, 43
excentricitat d'una cònica, 273
exclusió del pas al límit, 90
exedra, 37
exhaustió
d'Antifont, 19
d'Èudox
aplicada al cercle, 19
de Brisó, 19
existència
d'una figura geomètrica, 79, 221
definicional, 79
dels ens geomètrics, 79
matemàtica, 233
per construcció, 84, 325
expansió de l'hel·lenisme, 24
exposició, 227, 228
extrem, 224
d'un segment, 88
d'una figura, 88
d'una superfície, 88

falange macedònia, 26, 29, 347
fal·làcia, *vegeu* raonament erroni
falsedat de la hipòtesi, 229
família Barca, 55
far, 36
fecial, *vegeu* magistrat
fenomen de la refracció, 294
festa
Consuàlia, 192, 195, 368
fi del domini púnic sicilià, 55
figura, 14, 15, 86-88, 219, 221, 223, 224, 234
aparença concreta de la, 87
bisecar una, 114
caràcter ideal de la, 86
com a
element de la demostració, 88
ens
construïble, 88
ideal, 98
convexa, 262
donada
en forma, *vegeu* en gènere
en gènere, 241, 242
en magnitud, 110
en posició, 110
dependència de la, 87
divisió d'una, 113
equilàtera i equiangle, *vegeu* regular
existència, 221
extrem d'una, 88
geomètrica, 95
ben determinada, *vegeu* donada
donada, 108
ideal, 14, 15, 18, 88, 91, 221
impossible, 87, 98
incorrecta, *vegeu* impossible
independència de la, 87
independent del cas concret, 87
límit d'una, 222
no convexa, 262
platònica, 86
poligonal, 220
rectilínia donada en gènere, *vegeu* objecte geomètric
regular, 157, 158
terme d'una, 222
figures
del Món, 219
equivalents, 103

no superposables, 103
rectilínies
àrees de, 240
fill de Mart, 54
filosofia grega
principi de generalització platònica, 131
flux i reflux, *vegeu* marea
focus d'una cònica, 273
forma
aparent dels objectes geomètrics, 132
de l'arc de circumferència, 132
axial d'una cònica, 273
formalisme de Hilbert, 88
fracció
arbitrària, 257
contínua, 338
sexagesimal babilònica, 303

geografia, XII
geometria, 169, 300
afí, 127
aplicada a
l'astronomia, 130, 131
l'òptica, 130
de l'espai, 93
fonaments de la, XII
europea
problema de les tres o les quatre rectes, 101
grega, 96, 99, 102
angle recte, 94
aplicació d'àrees, 103, 111
caràcter figuratiu de la, 88
congruent, 94
criteri d'igualtat de triangles, *vegeu* criteri d'igualtat de triangles
dada, 107, 109
definició, 215
demostració, 215
per reducció a l'absurd, 229
diorisma, 96, 215
eines constructives ideals de la, 89
element, 218
existència, 89
figura
donada en magnitud, 110
donada en posició, 110
fonament de la, X
hipèrbola, 95
asímptota d'una, 95
la incommensurabilitat, 99
i el concepte de raó, 99
lema, 225
objecte donat
en gènere, 108
en magnitud, 108
en posició, 108
potència d'un punt a una circumferència, 103, 111, 112
problema, 95
proposició, 96
conclusió, 96
construcció, 96
demostració, 96
enunciació, 96
especificació, 96
exposició, 96
quadratura
d'un cercle, 377
d'una lúnula, 168
raó, 99
composta, 99
simbolisme, 15
superfície quàdrica, 128
tangent
a una circumferència, 103, 111, 112
teorema, 95
torsió, 94
mètrica, 127
neutral, 95

pitagòrica, 111
plana, 93, 107
elemental, 103
projectiva, 120, 127
invariant, 122
teoria de les transversals, 120
superior, 120
gimnosofista, 363, 369
gnòmon, 249
gravat d'Euclides, 106
guerra de les represàlies, 28
guerrer, *vegeu* ciutadà guerrer

harmonia, 169
hel·lenisme, expansió de l', 24
heliocentrisme, XIII, 301, 302, 308
herència
alexandrina, 53
aquemènida, 30
hetaira, 187
hexaedre, *vegeu* cub
hexàgon regular, 7, 19, 157-160
i les abelles, 156, 158
hexàmetre, 373
hidrostàtica, XII
hipèrbola, 6, 11, 95, 129, 154, 167, 273, 275, 276, 278, 279, 281, 283, 284
asímptotes d'una, 95, 167, 284, 285
branques oposades d'una, 284, 285
diàmetre d'una, 278
torsió d'una, 95
hipòtesi, 160, 213, 263, 309
d'Aristarc
qualitativa, 140
quantitativa, 140
de l'absurd, 87, 92, 165, 226, 248, 297, 322, 323
com a lema, 226
dels angles, 167
falsa, 228, 229
història
com a ciència, 13
com a recerca, 13
de l'aritmètica, 16
de l'astronomia, XII, 13, 16
de l'òptica, 130-133
de la ciència, 13, 16
com a anàlisi, 13
com a tècnica, 13
de la geometria, 15, 107-120, 128-130
projectiva, 120-128, 263-272
de la matemàtica, 13
grega, XII, 43
de la medicina, 13
de la música, 13
de la perspectiva, 130-133
de la trigonometria, 131, 150-152
de les corbes, 272-287
de Roma, 45
honor grec, restitució de l', 27

icosaedre regular, 5, 7-9, 158, 159, 161, 170
Idea
de Pentàgon regular, 86
en Plató, 79
igualtat
d'angles, 232, 233
rectes, 94
illes àtiques, 26
imatge platònica, *vegeu* figura
Imperi
aquemènida, 29
assiri, 405
cartaginès, 55
d'Alexandre, *vegeu* macedoni
macedoni, XIII, 24-26, 28, 31, 33, 53, 66, 67, 172, 402, 405

mapa de l’, *vegeu* d’Alexandre
part, 363
persa, 33, 34, 369
romà, XIV, 34, 44, 47, 50, 52, 53, 68, 368, 403, 408
inici de l’, 53
naixement de l’, 44
selèucida, 405
impossibilitat per divisió, 82
incommensurabilitat, 99
de la diagonal i el costat d’un quadrat, 101, 229
independència de la figura, 250
infinit, 89
en acte, 90
en potència, 90
innovació estratègica de Filip II, 26
inspiració pitagòrica, 299
integrals el·líptiques, 390
invariància, 19, 166, 167
de la potència d’un punt a una circumferència, 103
invariant, 122
invasió persa, 25
irracionalitat de $\sqrt{2}$, 101

jardins penjats, 182
joc
de dames, 197
de daus, *vegeu* de l’osset
de l’osset, 197
de pilota, 197

lema, 84, 91, 122, 220, 225, 240
lemes previs de l’òptica, *vegeu* postulats de l’òptica
límit, *vegeu* figura
línia, 287
donada en magnitud, 241
donada en posició, 241
plana, 166
recta, 129
rectilínia, 166
simple, 166
sòlida, 166
llegenda dels setanta, 40
llei
curiada, 51
de deducció, 78
de la reflexió, 132, 294
llenguatge formalitzat, abús del, 100
llengües
osc, 45
sabèl·lic, 45
umbre, 45
lleó d’or, 372
lloba, 45, 46, 185, 187, 188
lloc, 19, 129, 166, 167, 240, 271
de l’espai, 20
de les cinc rectes, 287
de les dues rectes, 154
de les tres o les quatre rectes, 4, 284, 285, 287
de superfícies de revolució, 128
cilindre, 128
con, 128
esfera, 128
de superfícies planes, 128
del pla, 20
en superfície, *vegeu* sòlid
geomètric, 18, 127-129, 281
circumferència, 128
cònica, 128, 272
corba lineal, 128
magnitud del, 128
naturalesa del, 128
posició del, 128
segment rectilini, 128
pla, 271
circumferència, 271
recta, 271
sòlid, *vegeu* cònica

com a corba en una superfície, 272
com a superfície, 272
d'un con acutangle, *vegeu* con acutangle
d'un con obtusangle, *vegeu* con obtusangle
d'un con rectangle, *vegeu* con rectangle
hèlix cilíndrica, 272
secció cònica, *vegeu* cònica
Lluna, 138-142, 144, 309-310, 314-317, 319-324, 327-342, 344, 346
lògica
caràcter dual, *vegeu* binària
binària, 83
longitud, 230
lúnula, quadratura d'una, *vegeu* quadratura

magistrat, 411
epònim, 51
fecial, 411
magnitud, 232
en general, 110
figura de la, *vegeu* imatge de la
i atomisme, 90
imatge de la, 86
irracional, 169
més gran que una altra, 242
donada en raó, 242
més petita que una altra, 242
donada en raó, 242
potencialment divisible, 90
racional, 169
magnituds, 240
addició de, 86
commensurables, 169
incommensurables, 99, 168, 169
existència de, 99
multiplicació de, 86
quocient de, *vegeu* raó de
raó de, 86
sostracció de, 86
mamella, 188
manierisme, 383
mapa de Macedònia, 347
marea, 307, 308
matemàtica
grega, 100
anàlisi, 77, 210, 212
antecedents de la, 72
aportacions
epsitemológiques, XI
metodológiques, XI
aritmètica, 69
descobriment de l', XI
astronomia, 69
consolidació de l', XI
càlcul, X
cas, 92
cercle, 79
cim de la, 69
composta d'una proporció, 101
concepció
aristotèlica, 76
platònica, 76
cònica, 128, 276, 288
consolidació de la, 69
corba
cissoide, 371
cònica, *vegeu* cònica
definició, 78
desenvolupament de la, XIV
diorisma, 81
duplicació del cub, 99
element, 84
essència de la, 69
existència en la, 79
figura, 86-88
fonaments de la, XIV

geometria, 69
descobriment de la, XI
i la perspectiva, *vegeu* perspectiva
infinit, 89
en acte, 90
potència, 90
lema, 91
llei de deducció, 78
moviment, 92
naixement de l'essència de la, 69
noció comuna, 78
objecció, 92
pas al límit, exclusió del pas al límit, 90
perspectiva, 130, 131
porisma, 92
postulat, 78
problema, 80, 91
raó composta, 100
reducció, 92
regle i compàs, 80
resolució
de la cúbica, XII
de problemes, XI
restricció platònica, *vegeu* regle i compàs
segle d'or de la, XI, XIII, 28, 171
síntesi, 77, 210, 212
teorema, 80, 91
torsió, 92
valor crematístic, 72
occidental
raó anharmònica, 122
pitagòrica, 216
matemàtics grecs del museu d'Alexandria, 39
mausoleu, 34
màxim comú divisor, 260
medalló
de Filip II, 27
de Hieró II, 63
medial, *vegeu* segment
mercenari, 26, 54, 55, 60, 63, 66
campani, *vegeu* pobles
mamertí, *vegeu* pobles
mesures relatives
de la Lluna, 141
de la Terra, 141
del Sol, 141
metafísica, nom de la, 38
mètode
analític, 77, 207
cinemàtic de determinació de tangents a les corbes, 404
d'exhaustió, 404
de reducció a l'impossible, *vegeu* reducció a l'absurd
deductiu, *vegeu* demostratiu
del tangram, *vegeu* tangram generalitzat
demostratiu, 83, 92, 102, 261
dualitat afirmació/negació, 83
lògica binària, 83
dialèctic, 207
distributiu, 225
geomètric de Tales, 165
historicogramatical, 39
sintètic, 77
metodologia demostrativa, *vegeu* mètode demostratiu
milícia macedònia, 26
casc, 26
cuirassa, 26
escut, 26
espasa curta, 26
sarissa, 26
mínima acció, 131
mirall
còncau, 132, 307
convex, 132

corbat, 297
esfèric, 132, 295
còncau, 132
convex, 132
hemisfèric, *vegeu* còncau
pla, 132, 307
miralls,
teoria matemàtica dels, 132
mite de la lloba, 187, 188
mites cosmogònics, 43
mitjana
aritmètica, 231
geomètrica, 231, 232
harmònica, 231
i extrema raó, 7, 8, 160, 161
proporcional, *vegeu* geomètrica
mitjanes proporcionals
determinació de dues, 20, 21, 92
obtenció de dues, *vegeu* determinació de dues
història de les, 20
model
de la geometria
aristotèlic, 79
euclidià, 79
heliocèntric, 136-140, 145, 405
món projectiu, 123
monisme, 373
mosaic d'Alexandre, 29, 30
moviment, 92
a les definicions, 93
a les demostracions, 93
aparent dels planetes, 16, 17
de la visió, 295
de rotació al voltant d'un eix, 92, 93
en Arquimedes, 93
per desplaçament, 93
retrògrad del planeta, 237
rotatori
a l'espai, 93
al pla, 93
museu, 37
com a palau de les muses, 37
música, 300
del cel, 299

nau *Argo*, 357
no torsió, 95
noció comuna, 78, 84, 88, 92, 94, 96, 97, 164, 212, 213
nòmada, 58
nombre
$\sqrt{2}$, 101
imparell, *vegeu* senar
irracional, 101
no racional, *vegeu* irracional
parell, 229
parell/senar, 229
quadrat, 230
rectangular, 230
senar, 215
triangular, 263
nombres
costat-diagonal, 326
totalitat dels, 230
*nomos*, 25

objecció, 91, 92, 220, 225, 226
objecte geomètric, 94
donat
en gènere, 108
en magnitud, 108
en posició, 108, 241
existència, 95
obliqüitat de l'eclíptica, 300
òbol, 209
obres d'Euclides, 105-133
obtenció de dues mitjanes proporcionals, *vegeu* mitjanes proporcionals
octaedre regular, 8, 170
olimpíada, 172
primera, 25
olímpic, 368, 381

omplir el pla, *vegeu* enrajolar el terra
operació
  per construcció, 276, 278, 279, 318, 327
  per substitució, 144, 152, 153, 307, 318, 319, 323, 325, 326, 332, 334, 342
  per transitivitat, 306, 318, 326, 336, 344
operacions de la proporció
  *alternando*, 252, 277, 332
  *componendo*, 101, 151-154, 162, 265-267, 277, 315, 326, 342, 343
  *convertendo*, 247, 269, 332, 341-344
  *dividendo*, 154, 254, 267
  *ex æquali*, 11, 144, 326, 338, 341-343, 345
  *invertendo*, 154, 265, 266, 268, 270, 271, 277, 342, 343, 345
  *permutando*, 162, 243, 244, 265, 266, 291, 315, 341
  *separando*, 318
oposició, *vegeu* objecció
òptica, XII
òrbita del centre del Sol, 320
Oscar, premi cinematogràfic, 372

paganisme grec, 41, 42
palau de les muses, *vegeu* museu
papirs d'Oxirrinc, 40
paràbola, 6, 11, 129, 273, 274, 276, 281, 283, 284
  paràmetre d'una, 284
  propietat directriu-focal d'una, 4, 273
paral·laxi del Sol, 138, 142
paral·lelogram, 83, 103, 167, 240, 249, 325
paral·lelograms
  equivalents, 19
paralogisme, *vegeu* raonament erroni
paràmetre d'una cònica, 284
pas al límit, exclusió del, 90
pavimentar el terra, 156, 261
  amb hexàgons regulars, 156
  amb quadrats, 156
  amb triangles equilàters, 156
pensament
  aristotèlic, 79
  platònic, 79
pentàgon
  regular, 5, 7-9, 158-161, 261
    diagonal del, 7
període
  hel·lenístic, 31
  sideral, 238
peripatètic, 11, 16
perspectiva, 131
pintura d'Euclides, 74
piràmide, 182
pla
  no paral·lel ni a la generatriu ni a l'eix del con, 6
  paral·lel
    a l'eix del con, 6
    a la generatriu del con, 6
pla sense torsió, 94
planetes
  moviment aparent dels, 16, 17
plausibilitat, 83
pluralisme, 373
pobles
  alamà, 361
  anatòlic
    lidi, 196, 197, 390, 391
  antemnata, 192
  cartaginès, 53-56, 59-61, 63-65, 69, 198, 365, 393, 397
  cèltic, 54
    gal, 50, 54
    iber, 54

lígur, 54
sènon, 50, 363
ceninenc, 192
crustumí, 192
etrusc, 196
falisc, 363
hèrnic, 363
feaci, 394
fenici, 53
foci, 396
gal
sènon, 362, 363
germànic
ambró, 379
cimbre, 379
got, 362
teutó, 379
grec, 25, 48, 49, 54, 196, 403
arcadi, 187
atenenc, 174
macedoni, 24, 181
elits del, 25
meoni, 360
tirià, 74
hebreus, 74
hispànic
edetà, 56
indi
gandorita, 181
presi, 181
indiget, 377
itàlic, 45, 57
albà, 186, 188
arcadi, 187
campani, 60
equeu, 363
etrusc, 45, 48-50, 54, 197, 198, 391
alfabet, 49
cultura, 49
divinitats del poble, 49
herència, 49
llatí, 47, 50, 52, 188, 190
mamertí, 54, 60, 63
osc, 48
romà, 44, 46, 52, 53, 55-59, 61, 63-66, 69, 194, 195, 197-199, 201, 365, 392, 410
sabí, 45-47, 50, 57, 196
samnita, 48, 52
siracusà, 63
taurí, 57
tirrè, *vegeu* etrusc
umbre, 48, 197
volsc, 363
jueu, 183
lidi, 196
massili, 392
númida, 66, 392
persa, 27, 403
púnic, *vegeu* cartaginès
romà, 195
sabí, 195
semita
cananeu, 361
fenici, 361
hebreu, 361
sicilià, 55, 60, 61
siracusà, 65, 66, 393
vàndal, 361
poliedre regular, 8, 20, 76
cub o hexaedre, *vegeu* cub
dodecaedre, *vegeu* dodecaedre regular
icosaedre, *vegeu* icosaedre regular
poliedres regulars
cinc únics, 20
polígon regular, 217
decàgon, *vegeu* decàgon regular, 7
heptàgon, 80
hexàgon, 157, 158
pentàgon, 5, 7, 80, 86, 103
quadrat, 157, 158, 230, 261

triangle equilàter, *vegeu* triangle equilàter
porisma, 17, 19, 39, 91, 92, 120-123, 127, 148, 149, 159, 160, 165, 220, 225, 226, 254, 258, 260-263, 327-329, 344
aritmètic, 260
com a corol·lari, 259
com a lloc intermedi entre un problema i un teorema, 120
euclidià, 259
geomètric, 260
postulat, 78, 84, 88, 92, 96, 97, 164, 212, 213, 294
dels segments paral·lels, 95
postulats de l'òptica, 131
potència, 231
commensurable, 231
d'un punt a una circumferència, 103, 111, 112
incommensurable, 231
Premi Nobel de Literatura, 373
premisses verdaderes, 229
primer
doxògraf, 11
historiador de la ciència, 11
principi, 78, 84
com a element, 207
de generalització, 99
de la directriu i del focus d'una cònica, *vegeu* propietat fonamental de les còniques o teorema d'Aristeu
de la geometria, 84
de substitució d'iguals, 100, 336
del recorregut mínim, 131, 133
geomètric, 213
problema, 77, 80, 89, 91, 95, 97, 108, 120, 211, 213, 216, 225-228, 259, 260, 262
com a element, 84
compost, 166
condicions de solució, *vegeu* diorisma
de geometria, 224
de la duplicació del cub, 99
de les tres o les quatre rectes, 4, 101, 208
delià, 21
global, 127
i construcció, 80, 95
i existència, 95
impossible, 81
particular, 166
possible, 81
simple, 166
universal, 166
valor existencial del, 89
procònsul, 67
progressió geomètrica, 100
prolongació indefinida, 90
propietat
de la directriu i del focus d'una cònica, *vegeu* propietat fonamental de les còniques
directriu-focal, *vegeu* propietat fonamental de les còniques
focus-directriu, *vegeu* propietat fonamental de les còniques
fonamental de les còniques, 4, 9, 10, 128, 129, 273
harmònica, 122
propietats que lliguen les magnituds amb les operacions aritmètiques, 86
proporció composta de dues raons, 101

proporcionalitat dels sectors i els angles, 291
proposició, 96, 97, 225
  conclusió, 96, 97
  construcció, 96, 97
  demostració, 96, 97
  directa, 97, 98, 102, 228, 261
  enunciació, 96, 97
  especificació, 96, 97
  exposició, 96, 97
  general, 80
  indirecta, 97, 98, 102, 228, 261
    figura d'una, 98
  particular, 80
  per reducció a l'absurd, 228
prostituta, *vegeu* lloba
ptolemaic, 28
punt donat en posició, *vegeu* objecte geomètric

quadrat, 19, 81, 157, 158, 160, 161, 284, 325
  de Polibi, 401
quadratura
  d'un cercle
    per exhaustió, 19
  d'una lúnula, 20, 116, 168
  del cercle, 377, 404
quadrilàter, 108
  arbitrari, 83
  complet, 122
  hipersupí, 262
  supí, 262
quadrivi, 43
qualitat aristotèlica de la figura
  curvatura de la, 14
  dretura de la, 14

raig
  lluminós, 92, 132
    incident, 132, 133, 297
    reflectit, 132, 133, 297
  visual, 131
    instantaneïtat del, 131
raó, 99, 234
  al cub, *vegeu* triple
  anharmònica, 122
  composta, 99-101, 229, 329
    a l'aritmètica, 99, 100
    a la geometria, 100
    de les proposicions, 126
    doble, 99, 100, 127, 229
    general, 100
    triple, 99, 100, 229
  concepte de, *vegeu* eudoxià
  concepte eudoxià de, 99
  doble, 9, 154, 266
  donada en posició, *vegeu* objecte geomètric
  entre rectangles, 100
  harmònica, 122
  mitjana i extrema, 160, 161
  paral·lelepípede, 100
  triple, 329
raonament
  erroni, 116-119, 218
    com s'evita un, 88
  geomètric, 102
raons
  composició de, 127
  contínues, 100, 229
rapte de les sabines, 46, 183, 191, 194, 196, 407, 412
recta
  il·limitada en acte, 87
  limitada, *vegeu* segment
rectangle, 93, 101, 112, 284
  costat del, 93
  equilàter, *vegeu* quadrat
  medial, 228
rectes paral·leles, *vegeu* segments
reducció, 91, 92, 220, 225, 226
  a l'absurd, 18, 92, 98, 101, 102, 150, 228, 229, 261, 267, 320
    doble, 90

a l'impossible, 225
com a anàlisi, *vegeu* anàlisi
reescriptura trigonomètrica, 140, 142
regne
aquemènida, 27
de Macedònia, *vegeu* Imperi macedoni
dels albans, 186
relació
anharmònica, 120
trigonomètrica, 142
a Aristarc, 142, 143
República
Grega, 174
Romana, 50-52, 63, 68, 69, 374, 391
fi de la, 53
mitjana, 50, 69
primerenca, 50
tardana, 50, 67
restricció
aristotèlica
exclusió del pas al límit, 90
negació de l'atomisme, 90
negació de l'infinit en acte, 90
platònica, *vegeu* regle i compàs
retrat de Filip II, *vegeu* medalló
retrogradació planetària, 149
revolta dels mercenaris, 55

sarissa, *vegeu* falange macedònia
sàtir, 377
sàtrapa, 32, 34
secció
cònica, *vegeu* del con
del con, 272
acutangle, 284
obtusangle, 284
recte, 284
segle d'or de la matemàtica grega, 28
segment, 88
aixecat, 243
apòtom, 169, 231, 232
baixat, 242
binomial, 169, 231, 232
circular, *vegeu* del cercle
d'una corba
com a lloc, 127
del cercle, 110, 129
donat en posició, 242
i en magnitud, 242
donat
en magnitud, 240
en posició, 108, 240
homeomèric, 216
incommensurable, 20
irracional, 20, 169, 230, 231
com a mitjana
aritmètica, 20
geomètrica, 20
harmònica, 20
medial, 169, 228, 231
paral·lel
donat en posició, 243
unicitat del, 110, 111, 248
perpendicular des d'un punt, 220
de fora del segment, 19
del segment, 19
racional, 231, 232
rectilini, 101, 110, 129, 132
com a lloc, 127
definició platònica, 132
donat en
magnitud, 240
posició, 108, 240
segments
commensurables, 228
en longitud, 169
en potència, *vegeu* en quadrat

en quadrat, 230
incommensurables, 228
en longitud, 169, 230
paral·lels, 81, 87, 88, 90, 95, 113, 114, 167
proporcionals, 241
semblança de triangles, 127
semicon, 234
semipoliedres
descripció dels, 8
semirecta infinita, 91
serapeu, 41
set meravelles del món clàssic, 34, 35, 182, 383
colós de Rodes, 35, 182
estàtua de Zeus, 34
far d'Alexandria, 34, 35
jardins
de Semiramis, *vegeu* penjants de Babilònia
penjants de Babilònia, 34
jardins de Babilònia, 182
piràmide
de Gizeh, *vegeu* de Kheops
de Kheops, 34, 36, 37
temple d'Àrtemis, 34, 182
tomba de Mausol, 34, 182
signes del zodíac, 140, 317
aquari, 141
àries, 141
balança, 141
bessons o gèminis, 141
càncer o cranc, 141
capricorn, 141
escorpió o escorpí, 141
lleó, 141
peixos, 141
sagitari, 141
taure, 141
verge, 141
simbolisme geomètric, 15
símbols
$a$, 112
$\hat{A}$, 112
$\mathfrak{A}$, 100, 101, 229
$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, 101
$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}+\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}$, 101
$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$, 242
$\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$, 242
$\sqrt{2}$, 101, 144, 326
$\alpha < \beta < \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$, 150, 153, 318
$\frac{\alpha}{\beta}$, 153
$b$, 112
$b_a$, 112
$\hat{B}$, 112
$\mathfrak{B}$, 100, 101, 229
$c$, 112
$c_a$, 112
$\hat{C}$, 112
$\mathfrak{C}$, 100, 101, 229
$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, 242
$\frac{108}{43} < \frac{R_T}{R_L} < \frac{60}{19}$, 144
$5.832\,\mathcal{V}_{\text{Lluna}} < \mathcal{V}_{Sol} < 8.000\,\mathcal{V}_{\text{Lluna}}$, 144
$\mathfrak{D}$, 100, 101, 229
$18\,TL < TS < 20\,TL$, 142
$\frac{19}{3} < \frac{d_S}{d_T} < \frac{43}{6}$, 142
$\frac{19}{3} < \frac{R_S}{R_T} < \frac{43}{9}$, 144
$2\,\ell^2$, 229
$2^{2^{r n}}$, 257
$2^p\left(2^{2^{r_1}}+1\right)\ldots\left(2^{2^{r_s}}+1\right)$, 257
$d_L$, 144
$d_S$, 144, 142
$d_T$, 142
$\epsilon = 1$, 11
$\epsilon > 1$, 11
$\epsilon < 1$, 11
$\hat{\Phi}$, 296
$\hat{\Gamma}$, 296
$\urcorner EDFQCK[E]$, 249
$h^2 = 3\left(\frac{a}{2}\right)^2$, 231
$h_a$, 112

$h_b$, 112
$h_c$, 112
$\frac{k}{m}$, 229
$k^2$, 229
$\frac{k^2}{2}$, 229
$m^2$, 229
$m_a$, 112
$m_b$, 112
$m_c$, 112
$\frac{m}{n}$, 115
$\square AD$, 251
$\frac{44}{45} < \cos^2 1^{\text{o}} < 1$, 142
$r$, 112
$r_a$, 112
$R$, 112
$R_L$, 144
$R_S$, 144
$\frac{R_S}{R_T}$, 144
$\frac{R_S}{R_T} \sim 107$, 144
$R_T$, 144
$\frac{R_T}{R_L}$, 144
$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} d$, 143
$\frac{sin\alpha}{\sin\beta}$, 153
$\frac{\sin x}{x}$, 143
$t_a$, 112
$t_b$, 112
$t_c$, 112
$\frac{T_S}{T_L}$, 144
$\frac{\tan \mathrm{a}}{\tan \mathrm{b}} < \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, 131
$\frac{\tan x}{x}$, 143
$\mathcal{V}_{\text{Lluna}}$, 144
$\mathcal{V}_{\text{Sol}}$, 144
$\mathcal{V}_{\text{Sol}} \sim 64.000.000\, \mathcal{V}_{\text{Lluna}}$, 144
$\mathcal{V}_{\text{Sol}} \sim 7.000\, \mathcal{V}_{\text{Lluna}}$, 144
$\frac{1}{60} < \sin 1^{\text{o}} < \frac{1}{45}$, 142
$\frac{89}{90} < \cos 1^{\text{o}} < 1$, 142
símil de la línia de Plató, 77
síntesi, 77, 210, 212
de la geometria en l'obra d'Euclides, 76
deduccions, 77
definicions, 77
postulats, 77
proposicions, 77
veritat, 77
sistema d'Aristòtil
deductiu, 93
sinteticodeductiu, 79
Sol, 139-142, 144, 309-310, 314-317, 320-324, 327-330, 333-345
diàmetre del, 136
sòlid, 224
cilindre, 20, 93, 147, 148
con, 20, 93, 167
esfera, 8, 93, 147, 148
límit d'un, 224
tor, 20
sòlids
equivalents, 94
platònics, 7, 8, 170
cinc, 170
comparació dels, 5, 6
construcció dels, 76, 206
cub, *vegeu* cub
dodecaedre, *vegeu* dodecaedre regular
hexaedre, *vegeu* cub
icosaedre, *vegeu* icosaedre regular
n'hi ha cinc i només cinc, 84
octaedre, *vegeu* octaedre regular
tetraedre, *vegeu* tetraedre regular
semblants, 99
súbdit, 26
substitució, 154, 323
successió d'Aristòtil al Liceu, 163, 164
suma
de dos angles d'un triangle, 95
dels angles

d'un triangle, 18
d'un polígon, 220
externs, 80, 81
interns, 81
superfície, 224
cilíndrica, 128, 236
cònica, 128, 236
donada
en magnitud, 241
en posició, 108
esfèrica, 95, 128, 236
plana, 236
quàdrica, 128, 129
reglada, 129
superfícies
equivalents, 94

tangent a una circumferència, 111, 112
tangram, 18, 19, 102, 103
demostració per, 116
generalitzat, 103
taules pinaques, 38
teorema, 80, 89, 91, 95, 97, 120, 211, 213, 216, 220, 225-227, 259, 260, 262
com a element, 84, 219
d'Aristeu, 7, 8, 155, 158, 159, 162, 272
d'invariància, 167
de la raó harmònica, *vegeu* fonamental de la raó harmònica
de la bisectriu, 325
de llocs, 4, 166, 167, 271
de Menelau, 392
de Pitàgores, 2, 19, 103
demostració d'un, 80, 96
elemental, 219, 220
fonamental de la raó harmònica, 122, 123
global, 127
local, 127
místic, 270
teoria
de la proporció, 18, 101, 249
de les transversals, *vegeu* geometria projectiva
de nombres, 390
heliocèntrica, *vegeu* model heliocèntric
matemàtica dels miralls, 132
tercera proporcional, 232
terme, *vegeu* figura
com a porisma, 120
terna numèrica pitagòrica, 16
Terra, 138-145, 149, 309-328, 334-344, 346
diàmetre de la, 136
territori enemic, 180
tetraedre, 8, 170
tetràgon, 284
tirans de Siracusa, 59-66
tità, 368, 381
torsió, 92, 94
torsió / no torsió, 95
totalitat dels nombres, 230
tradició platònica, *vegeu* filosofia
transportar
un angle, 18
un segment, 88
trapezi
divisió d'un, 114
triangle, 81, 83, 94, 103, 108
altures del, 112
bisectrius del, 112
de costats donats
construcció d'un, 82
dibuixat en una banyera, 94
divisió d'un, 113, 114
donat, 240
equilàter, 5, 7-9, 19, 157-161, 231, 261
existència del, 97
isòsceles, 98, 220, 227, 228
angles de la base del, 18
especial, 227

medianes del, 112
rectangle, 93
catet del, 93
suma
de dos angles d'un, *vegeu* suma
dels angles d'un, *vegeu* suma
triangles equivalents, 19
triòbol, 209
trivi, 43
tropa alexandrina, 181

unicitat del segment paral·lel, *vegeu* segment

vestal, 184
victòria pírrica, 62, 201
visió, *vegeu* raig visual
volum
de la Lluna, 304
de la Terra, 303, 304
del Sol, 303, 304

zeetètica, 211
zodíac, 300-303, 310
signes del, 140

# Índex general


Introducció xi

Capítol 1. La transició: Aristeu el Vell i Eudem de Rodes 1
1.1 Una nota sobre la vida i l'obra d'Aristeu el Vell 3
1.1.1 Introducció 3
1.1.2 Les aportacions d'Aristeu el Vell 5
1.1.2*a* Les còniques 5
1.1.2*b* La comparació dels sòlids platònics 6
1.1.3 La propietat fonamental de les còniques 9
1.2 Eudem de Rodes, el peripatètic 11
1.2.1 Apunts biogràfics 11
1.2.2 Les obres atribuïdes a Eudem 13
1.2.3 Comentaris a les aportacions matemàtiques 14
1.2.3*a* Dos conceptes matemàtics 14
1.2.3*b* El *Sumari* de Procle 15
1.2.3*c* Les aportacions històriques d'Eudem, per llibres i cronològicament 16
1.3 Cloenda 21

Capítol 2. La situació política i cultural grega (segle iii aC) 23
2.1 La consolidació política de l'Imperi macedoni 24
2.1.1 Els orígens del regne de Macedònia 24
2.1.2 Filip II de Macedònia 26
2.1.3 L'Imperi d'Alexandre 28
2.2 L'herència política d'Alexandre: els diàdocs 31
2.3 El renaixement cultural grec a Egipte 33
2.3.1 El far d'Alexandria, una de les set meravelles del món antic 34

2.3.1*a* Les set meravelles del món clàssic 34
2.3.1*b* El far d'Alexandria 36
2.3.2 La Biblioteca d'Alexandria 37
2.3.3 El museu d'Alexandria 43
2.4 El naixement de l'Imperi romà 44
2.4.1 Els inicis de Roma 44
2.4.2 El domini etrusc 48
2.4.3 La República Romana 50
2.4.3*a* La República Romana primerenca 50
2.4.3*b* Una notícia breu sobre les guerres púniques 53
2.4.3*c* Els tirans de Siracusa: d'Hicetes II a Hipòcrates i Epícides 59
2.4.3*d* La República Romana tardana 66
2.5 Cloenda 69

Capítol 3. Les aportacions conceptuals d'Euclides 71
3.1 Unes gotes de biografia 72
3.2 Les aportacions conceptuals de l'obra d'Euclides 75
3.2.1 L'anàlisi i la síntesi 77
3.2.2 Els axiomes, les hipòtesis i els postulats 78
3.2.3 Les definicions i l'existència 79
3.2.4 Els diorismes 81
3.2.5 Les divisions 82
3.2.6 Els elements 84
3.2.7 Les figures 86
3.2.7*a* La imatge lligada al nom 86
3.2.7*b* La imatge geomètrica és limitada 87
3.2.7*c* Les demostracions figurals 88
3.2.8 L'infinit 89
3.2.9 Els conceptes de lema, cas, porisma, objecció i reducció 91
3.2.9*a* Lema 91
3.2.9*b* Cas 92
3.2.9*c* Porisma 92
3.2.9*d* Objecció 92
3.2.9*e* Reducció 92
3.2.10 El moviment i la torsió 92
3.2.10*a* El moviment 92
3.2.10*b* La torsió 94
3.2.11 Els problemes i els teoremes 95

3.2.12 Les proposicions i les seves parts 96
3.2.13 La raó i la raó composta 99
3.2.14 La reducció a l'absurd 101
3.2.15 El mètode del tangram generalitzat 102

CAPÍTOL 4. LES OBRES D'EUCLIDES, LLEVAT DELS *ELEMENTS* 105
4.1 Les obres elementals de geometria 107
4.1.1 *Dades* (*Δεδομένα*) 107
4.1.2 *De les divisions* (*Περὶ διαιρέσεων βιβλίον*) 113
4.1.3 *Llibre de les fal·làcies* (*Περὶ Ψευδαρίων*) 116
4.2 Les obres superiors de geometria 120
4.2.1 *Porismes* (*Πορίσματα*) 120
4.2.2 *Llocs en superfícies* (*Τόπων Ἐπιπέδων βιβλία B*) 128
4.2.3 *Còniques* (*Κωνικῶν Βιβλία*) 129
4.3 Les dues obres d'òptica 130
4.3.1 *Òptica* (*Ὀπτικά*) 131
4.3.2 *Catòptrica* (*Κατοπτρικός*) 132

CAPÍTOL 5. ARISTARC DE SAMOS I LA SEVA OBRA 135
5.1 Notes sobre la vida d'Aristarc i sobre l'heliocentrisme 137
5.2 Una breu descripció de *De les mides i les distàncies del Sol i la Lluna* 139
5.3 Del text d'Aristarc i les seves traduccions 146
5.4 Problemes 147

APÈNDIX A. TEXTOS SOBRE ARISTEU I EL SEU TEOREMA, I SOBRE EUDEM 155
A.1 Alguns textos sobre Aristeu 155
A.1.1 Dos textos d'Eutoci 155
A.1.2 La introducció del llibre V de la *Col·lecció matemàtica* de Pappos 156
A.1.3 El teorema d'Aristeu 158
A.2 Alguns textos sobre Eudem 163
A.2.1 El successor d'Aristòtil al Liceu 163
A.2.2 Els textos d'Eudem 164
A.2.2*a* Els textos relatius a Tales 164
A.2.2*b* Els textos relatius a Pitàgores 165
A.2.2*c* Els textos relatius a Enòpides 168
A.2.2*d* Un text sobre Antifont 168
A.2.2*e* El text relatiu a Hipòcrates de Quios 168
A.2.2*f* Un text sobre les magnituds incommensurables 168
A.2.2*g* El text relatiu a Arquites 170

Apèndix B. Textos històrics i polítics (segle iii aC) 171
B.1 La fundació del regne de Macedònia 172
B.2 Filip II de Macedònia 173
B.3 Alexandre el Gran 176
B.4 El far, el museu i la Biblioteca d'Alexandria 182
B.5 Notes sobre el naixement de Roma 183
B.6 Segona Guerra Púnica: un detall sobre Anníbal, i la mort d'Arquimedes 198
B.7 La victòria pírrica 201

Apèndix C. Textos relatius a les aportacions conceptuals d'Euclides 205
C.1 Textos sobre Euclides i la seva obra 205
C.2 Els conceptes matemàtics en l'obra d'Euclides 209
C.2.1 Les influències i el valor de l'obra d'Euclides 209
C.2.1*a* L'anècdota del deixeble 209
C.2.1*b* Possible influència de l'Acadèmia de Plató en els *Elements* d'Euclides 210
C.2.2 Els conceptes matemàtics en l'obra d'Euclides 210
C.2.2*a* L'anàlisi i la síntesi segons Procle 210
C.2.2*b* Els axiomes i els postulats en Procle 212
C.2.2*c* La definició segons Plató i Aristòtil 213
C.2.2*d* Els diorismes en Procle 215
C.2.2*e* Els conceptes de «divisió» en l'obra d'Euclides 217
C.2.2*f* La taxonomia del terme *element* en Procle 218
C.2.2*g* Les figures 222
C.2.2*h* Els termes vinculats a les proposicions i la classificació: problema/teorema 225
C.2.2*i* Les parts d'una proposició 227
C.2.2*j* Demostració directa i indirecta 228
C.2.2*k* La raó composta 229
C.2.2*ℓ* Un text sobre els irracionals del *Teetet* de Plató 230
C.2.2*m* Un parell de textos de Pappos sobre Ex 231
C.2.2*n* El complex concepte d'«angle» 232

Apèndix D. Textos d'Euclides, sense els *Elements* 239
D.1 Una informació genèrica de les obres menors d'Euclides 240
D.1.1 Les tres obres de contingut elemental 240
D.1.1*a* *El tresor de l'anàlisi* de Pappos 240
D.1.1*b* Les *Dades* segons Pappos 240
D.1.1*c* Alguns fragments de *Dades* d'Euclides 241

D.1.1$c_1$ [Definicions] 241
D.1.1$c_2$ [Algunes dades] 243
D.1.1$d$ Alguns fragments de l'obra *De les divisions* 253
D.1.1$e$ Procle esmenta *Pseudaria* 257
D.2 Les obres de geometria superior 258
D.2.1 *Porismes*, *Llocs en superfícies* i *Còniques* 258
D.2.1$a$ Procle ens apropa al concepte de porisma 258
D.2.1$b$ Pappos ens apropa als *Llocs en superfícies* d'Euclides 271
D.2.1$c$ El teorema d'Aristeu segons Pappos 272
D.2.1$d$ Les còniques abans d'Apol·loni 283
D.3 Presentació succinta de les obres d'òptica 288
D.3.1 L'*Òptica* (*Ὀπτικά*) 288
D.3.1$a$ El mecanisme de la visió 288
D.3.1$b$ Les definicions postulat i algunes proposicions 289
D.3.1$b_1$ Definicions[-postulats-lemes] (*Ὅροι*) 289
D.3.1$b_2$ Algunes proposicions 289
D.3.2 La *Catòptrica* (*Κατοπτρικός*) 294
D.3.2$a$ Una definició geomètrica del *Parmènides* de Plató 294
D.3.2$b$ Alguns fragments 294
D.3.2$b_1$ Definicions[-postulats-lemes] (*Ὅροι*) 294
D.3.2$b_2$ Les proposicions primera, segona i cinquena 295

Apèndix E. L'obra d'Aristarc de Samos 299
E.1 L'originalitat i la importància d'Aristarc 299
E.1$a$ Opinions sobre l'obra d'Aristarc 300
E.1$b$ L'acusació de Cleantes 301
E.1$c$ Un lema de Pappos 304
E.1$d$ Textos de Vitruvi, Aeci, Pappos i Copèrnic 307
E.2 L'obra *De les mides i les distàncies del Sol i la Lluna* 309
E.2.1 Les hipòtesis i les seves conseqüències 309
E.2.1$a_1$ [Les hipòtesis] 309
E.2.1$a_2$ [Conseqüències de les hipòtesis] 309
E.2.2 Les proposicions 310
E.2.2$a_1$ Proposició 1 310
E.2.2$a_2$ Proposició 2 313
E.2.2$a_3$ Proposició 3 314
E.2.2$a_4$ Proposició 4 316
E.2.2$a_5$ Proposició 5 319
E.2.2$a_6$ Proposició 6 320
E.2.2$a_7$ Proposició 7 323
E.2.2$a_8$ Proposició 8 328
E.2.2$a_9$ Proposició 9 328

E.2.2$a_{10}$ Proposició 10 329
E.2.2$a_{11}$ Proposició 11 330
E.2.2$a_{12}$ Proposició 12 332
E.2.2$a_{13}$ Proposició 13 334
E.2.2$a_{14}$ Proposició 14 339
E.2.2$a_{15}$ Proposició 15 341
E.2.2$a_{16}$ Proposició 16 344
E.2.2$a_{17}$ Proposició 17 345
E.2.2$a_{18}$ Proposició 18 345

Les figures del text 347
Matemàtics i personatges citats 351

Bibliografia 417

Índex de mots i formes 441
Índex de noms propis: antropònims, topònims i altres noms 447
Índex d'obres i citacions 477
Índex de termes 493

Índex general 517

9 788499 655888